Géométrie Différentielle, TD 14 du 14 mai 2020

1. Exercices

1. Questions diverses

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface orientée.

1– Justifier que l'application de Gauss $\nu : S \to \mathbb{S}^2$ est C^∞.

2– Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$, on munit la surface compacte $f(S) \subseteq \mathbb{R}^3$ de l'orientation de S poussée par f. Montrer que les secondes formes fondamentales de S et $f(S)$ coïncident au sens où : $\forall p \in S$, $X, Y \in T_pS$,

$$II_S(X, Y) = II_{f(S)}(TfX, TfY)$$

3– Montrer que le résultat précédent devient faux si f n'est qu'un plongement isométrique de S dans $\mathbb{R}^3$ (qui ne s'étend pas à $\mathbb{R}^3$ à priori).

4– Soit $\sigma \in \Omega^2(S)$ la forme d'aire sur S (pour la métrique induite par $\mathbb{R}^3$), $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ la forme volume standard sur $\mathbb{S}^2$. Justifier que pour tout $p \in S$, on a

$$\sigma_p = \alpha_{\nu(p)}$$

2. Surfaces minimales

Soit S une surface riemannienne orientée connexe. La métrique riemanienne sur S induit une forme volume sur S notée vol_S, ainsi qu'une norme $|.|$ sur chaque espace tangent ou cotangent.

1– On note J a rotation d'angle $+\pi/2$ dans chaque espace tangent ou cotangent, i.e. si (X_1, X_2) est une base orthonormale directe locale de TS, et (X^1, X^2) sa base duale, alors $JX_1 = X_2$, $JX_2 = -X_1$, et de même $JX^1 = X_2$, $JX^2 = -X^1$. Montrer que si α est une 1-forme sur S, alors on a :

$$\alpha \wedge J\alpha = |\alpha|^2 \mathrm{vol}_S$$

2– Pour toute fonction $f \in C^\infty(S, \mathbb{R})$, on définit son laplacien en posant : $\Delta f := d(J(df)) \in \Omega^2(S)$. Montrer que si S est compacte, on a $\int_S f\Delta f = -\int_S |df|^2 \mathrm{vol}_S$, puis que $\Delta f = 0$ si et seulement si f est constante.

3– On suppose S isométriquement plongée dans $\mathbb{R}^3$. Soit $v \in \mathbb{R}^3$, $f_v : S \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_v(x) := \langle v, x\rangle$.

- Calculer Δf_v (on pourra décomposer df_v dans la base locale (X^1, X^2) puis appliquer $(IV.11)$ et $(IV.14)$ du cours).

- En déduire que S est minimale (i.e. de courbure moyenne nulle) si et seulement si $\Delta f_v = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$.

4– En déduire qu'il n'existe pas de surface minimale compacte dans $\mathbb{R}^3$.

3. Surfaces convexes

Soit Σ une surface compacte connexe orientée de $\mathbb{R}^3$. On suppose que Σ est convexe, c'est-à-dire que sa courbure K est strictement positive en tout point. Le but de cet exercice est de montrer que Σ est la frontière d'un ensemble convexe au sens usuel.

On note $\nu : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ l'application de Gauss de Σ.

1– On note σ la forme d'aire sur Σ et $\alpha_2 = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ la forme volume standard sur $\mathbb{S}^2$. Montrer que $\nu^*(\alpha_2) = K\sigma$.

2– Montrer que ν est un difféomorphisme local de degré strictement positif.

3– Montrer que Σ a la même caractéristique d'Euler que $\mathbb{S}^2$ et que $\deg \nu = 1$.

4– Montrer que ν est un difféomorphisme.

5– Soit $p = (x_0, y_0, z_0)$ l'unique point tel que $\nu(p) = (0, 0, 1)$. Montrer que, quitte à munir Σ de l'orientation opposée, on a Σ contenue dans $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leqslant z_0\}$.

6– Pour $u_0 \in \Sigma$ et $v \in \mathbb{S}^2$, on note $H(u_0, v) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u - u_0, v\rangle \leqslant 0\}$. Montrer que $\Sigma \subset \bigcap_{u_0 \in \Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$.

7– Montrer que $\bigcap_{u_0 \in \Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$ est un ensemble convexe ayant pour bord Σ.

4. Courbure de Gauss

1– Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

2– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que la courbure de Gauss $K(x)$ en x soit strictement positive (on pourra considérer un point à distance maximale de l'origine).

3– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée qui n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que $K(x) = 0$.

4– Montrer qu'on peut trouver une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ difféomorphe à $\mathbb{S}^2$ qui possède un point de courbure de Gauss nulle.

5. Calcul de courbure

On définit une surface de révolution en se donnant une sous variété connexe $L \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ de dimension 1 et en appelant Σ l'orbite de L sous le groupe des rotations d'axe (Oz). On peut se donner un chemin lisse $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}, s \mapsto (g(s), 0, h(s))$ parcourant L à vitesse 1. On a alors

$$\Sigma = \{(g(s)\cos(\theta), g(s)\sin(\theta), h(s)) \mid s \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

L'application $\varphi : (s, \theta) \mapsto (g(s)\cos(\theta), g(s)\sin(\theta), h(s))$ donne une paramétrisation locale de Σ, justifiant que Σ est bien une sous variété de $\mathbb{R}^3$.

1– Montrer que la métrique riemannienne sur Σ s'écrit $ds^2 + g(s)^2 d\theta^2$.

2– Calculer la courbure de Σ en $\varphi(s, \theta)$ en fonction de s et θ.

3– Calculer la courbure d'un tore de révolution muni de la métrique induite par celle de l'espace euclidien. Le théorème de Gauss-Bonnet est-il vérifié ?

2. Indications

Exercice 1 :

1.1 : Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

1.2 : Remarquer qu'une isométrie directe f de $\mathbb{R}^3$ provient de l'action d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ (donc est linéaire) pour montrer que $f \circ d\nu_S = d\nu_{f(S)} \circ f$.

1.3 : Montrer que $S =]0,1[^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ est isométrique à un pan de cylindre.

1.4 : Se rappeler les définitions de σ et α en termes de bases orthonormées directes.

Exercice 2 :

2.1 : Il suffit de raisonner localement. Sur un ouvert U assez petit, on peut alors écrire $\alpha = aX^1 + bX^2$ où $a, b \in C^\infty(U)$.

2.2 : Formule de Stokes.

2.3 : localement, la seconde forme fondamentale II_p en un point p est représentée dans la base (X_1, X_2) par une matrice $II_p = \begin{pmatrix} e(p) & f(p) \\ f(p) & g(p) \end{pmatrix}$. Montrer qu'on a localement

$$\Delta f_v = \langle v, \nu \rangle (e+g)\, X^1 \wedge X^2$$

où $\nu : S \to \mathbb{S}^2$ désigne l'application de Gauss.

2.4 : D'après ce qui précède, toute fonction f_v serait constante sur une telle surface.

Exercice 3 :

3.1 : Soit $p \in \Sigma$. Il existe une base orthonormée directe dans laquelle $d\nu_p$ est représentée par une matrice diagonale.

3.2 : Exprimer le degré de ν à l'aide de $\nu^* \alpha_2$.

3.3 : Vérifier d'abord que $\chi(\Sigma) \leqslant \chi(\mathbb{S}^2)$ en revenant à la définition de la caractéristique d'Euler. Appliquer le théorème de Gauss-Bonnet pour obtenir l'inégalité inverse, puis que $\deg \nu = 1$.

3.5 : Considérer l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & z \end{array}$$

et expliciter l'espace tangent de Σ en un extrémum de f.

3.6 : Utiliser 3.5 et la connexité de Σ.

3.7 : En utilisant la compacité de Σ, montrer qu'un point u du bord vérifie $\langle u - u_0, \nu(u_0) = 0$ pour un certain point $u_0 \in \Sigma$. Montrer alors que $u = u_0$ en considérant un chemin lisse $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \Sigma$ tel que $c(0) = u_0$, $c'(0) = u - u_0$ et en utilisant la stricte positivité de la courbure.

Exercice 4 :

4.2 : Soit $p \in S$ à distance maximale de l'origine. Quitte à faire agir une isométrie, puis une homotéthie (ce qui peut affecter la courbure de Gauss, mais pas son signe), on peut supposer $p = (0,0,1)$. En voyant la surface S au voisinage de p comme le graphe d'une fonction $(x,y) \mapsto z(x,y)$, montrer avec un développement limité que $K(p) \geqslant 1$.

4.3 : Se rappeler la classification des surfaces compactes orientables : il n'y a que la sphère et les sommes connexes de tores. Utiliser ensuite la formule de Gauss-Bonnet.

Exercice 5 :

5.1 : Il s'agit de calculer $T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial s})$ et $T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial \theta})$, leurs normes et leur produit scalaire.

5.2 : Noter $X_s = T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial s})$ et $X_\theta = T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial \theta})$ et normaliser le produit extérieur $X_s \wedge X_\theta$ pour obtenir une expression explicite de $\nu_{\varphi(s,\theta)}$. Calculer ensuite $d_{\varphi(s,\theta)}\nu[X_s]$ et $d_{\varphi(s,\theta)}\nu[X_\theta]$ et en déduire une expression de la seconde forme fondamentale $d\nu_{\varphi(s,\theta)}$ dans la base orthonormée $X_s, \frac{1}{g(s)}X_\theta$. A la fin (et en utilisant que $g' + h' = 1$) on obtient : $K(\varphi(s,\theta)) = -\dfrac{g''(s)}{g(s)}$

5.3 : Pour montrer que $\int_\Sigma K\omega_0 = 0$ et ainsi vérifier la formule de Gauss-Bonnet, tirer en arrière la forme $K\omega_0$ par une paramétriation globale du tore donnée par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} R/2\varphi\rho\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\varphi\mathbb{Z} & \to & \Sigma \\ (s,\theta) & \mapsto & ((R+\rho\cos(s/\rho))\cos(\theta), (R+\rho\cos(s/\rho))\sin(\theta), \rho\sin(s/\rho))) \end{array}$$

Il s'agit alors de montrer que $\int_s \int_\theta \varphi^*(K\omega_0) = 0$.