Géométrie Différentielle, TD 1 du 6 Février 2020

1. Propriétés de base des variétés

1– Montrer que la réunion disjointe de deux variétés (de classe C^k) admet une structure naturelle de variété (de classe C^k).

2– Montrer qu'un ouvert / une composante connexe d'une variété (de classe C^k) admet une structure naturelle de variété (de classe C^k).

3– Montrer qu'une variété topologique connexe est de dimension constante et connexe par arcs.

4– Montrer qu'une variété topologique se plonge (au sens topologique) dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (et est donc métrisable).

2. Espace projectif

L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$. On va le munir d'une structure de variété de dimension n. Chaque point $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ définit une droite (celle qui le contient), notée $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$. Ainsi, $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n] = [x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_n] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^\star, (x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$.

Pour $i = 0, \ldots, n$, on note $U_i := \{x \in \mathbb{RP}^n,\ x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \text{ avec } x_i \neq 0\}$. On définit des fonctions $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ par

$$f_i([x_0 : \ldots : x_n]) = (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}).$$

Montrer que les f_i sont des bijections et qu'elles munissent $\mathbb{RP}^n$ d'une structure de variété C^∞ (et même analytique) compacte de dimension n.

3. Surfaces classiques

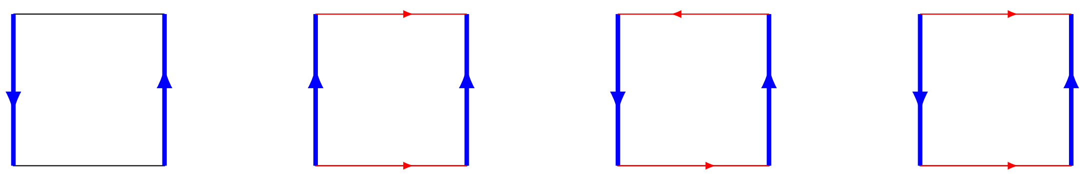
Munir les espaces topologiques suivant d'une structure de variété :

1– Le ruban de Möbius : $[0,1]\times]0,1[\ /_{(0,y)\sim(1,1-y)}$.

2– Le tore : $[0,1] \times [0,1]\ /\ \begin{smallmatrix}(0,y) \sim (1,y)\\ (x,0) \sim (x,1)\end{smallmatrix}$.

3– Le plan projectif : $[0,1] \times [0,1]\ /\ \begin{smallmatrix}(0,y) \sim (1,1-y)\\ (x,0) \sim (1-x,1)\end{smallmatrix}$.

4– La bouteille de Klein : $[0,1] \times [0,1]\ /\ \begin{smallmatrix}(0,y) \sim (1,1-y)\\ (x,0) \sim (x,1)\end{smallmatrix}$.



Ruban de Möbius — Tore — Plan projectif — Bouteille de Klein

4. Somme connexe de deux variétés

Soient M_1 et M_2 deux variétés de dimension n, et(U_1, φ_1) (resp. (U_2, φ_2)) une carte de M_1 (resp. M_2) telle que φ_i soit un difféomorphisme de U_i sur la boule ouverte $B(0,2)$ ($\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne standard). Soit C la couronne $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} < \|x\| < 2\}$.

1– Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est un difféomorphisme de C.

2– On considère l'espace topologique X obtenu à partir de la réunion disjointe
$$M_1 \setminus \varphi_1^{-1}(\overline{B(0,1/2)}) \amalg M_2 \setminus \varphi_2^{-1}(\overline{B(0,1/2)})$$
en identifiant $\varphi_1^{-1}(C)$ et $\varphi_2^{-1}(C)$ via le difféomorphisme $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$.
Montrer qu'il existe une (unique) structure de variété sur X telle que les projections $M_i \setminus \varphi_i^{-1}(\overline{B(0,1/2)}) \hookrightarrow X$ soient des difféomorphismes sur leurs images dans X. L'espace X muni de cette structure de variété est la *somme connexe* de M_1 et M_2, notée $M_1 \# M_2$.

3– Si $n \geqslant 2$, montrer que $M_1 \# M_2$ est connexe si et seulement si M_1 et M_2 sont connexes.

4– Montrer que $M \# S^n$ est difféomorphe à M.

5– Montrer que la somme connexe de deux plans projectifs $\mathbb{RP}^2$ est une bouteille de Klein.

Remarque : toute surface connexe compacte est difféomorphe à la sphère, à la somme connexe de k tores, ou à la somme connexe de k plans projectifs.

5. Grassmanniennes

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 0$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension k. Par exemple, si $V = \mathbb{R}^{n+1}$ et $k = 1$, on retrouve l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ de l'exercice 2. L'objet de cet exercice est de généraliser l'exercice 2 en munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété C^∞ compacte.

Soit B un sous-espace vectoriel de V dimension $n-k$. On veut construire à partir de B une carte de $\mathcal{G}_k(V)$ dont le domaine est l'ensemble des sous-espaces vectoriels supplémentaires de B, noté U_B. Soit A un supplémentaire de B. On note $\mathcal{L}(A,B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B. On définit
$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A,B) &\to U_B \\ f &\mapsto (\mathrm{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.

2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A,B)$ et de $\mathcal{L}(A',B')$. Montrer que $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ est un C^∞-difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.

3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.

4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas faisant de $\mathcal{G}_k(V)$ une variété C^∞.

5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.