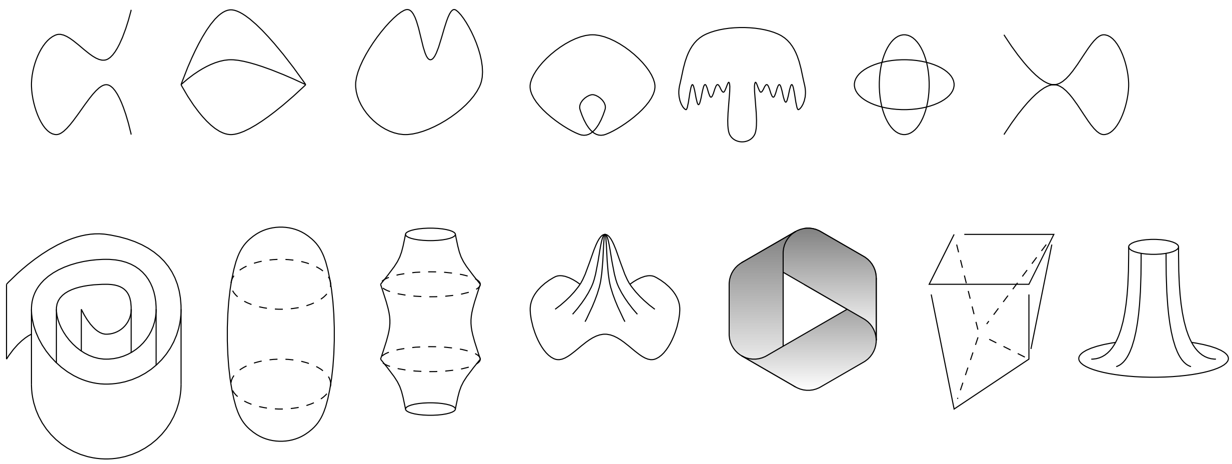
Géométrie Différentielle, TD 2 du 13 février 2020

Dans ce TD, les notions de variétés, sous variétés, submersions, plongements, etc. sont à considérer par défaut comme étant de classe C^∞. La plupart du temps, on peut facilement formuler un énoncé analogue pour la régularité C^k, et adapter la preuve en régularité C^∞ pour le démontrer.

1. Exemples et contre-exemples de sous-variétés - A FAIRE AVANT LE TD

Les dessins suivants représentent des parties de $\mathbb{R}^2$ (première ligne) ou de $\mathbb{R}^3$ (deuxième ligne). Dire, sans justification rigoureuse, lesquelles sont des sous-variétés C^∞.



Solution :

Les parties de $\mathbb{R}^2$ sont toutes des sous-variétés C^∞ à l'exception de la seconde, de la quatrième, de la sixième et de la septième de la première ligne, qui présentent des recoupements.

Pour les parties de $\mathbb{R}^3$, la troisième et la sixième de la deuxième ligne ne sont pas des sous-variétés C^∞, car elles ont des coins. Pour les autres, la réponse dépend ou non de l'inclusion du bord dans ces parties : si on n'inclut pas le bord, ce sont bien des sous-variétés C^∞, tandis que si on inclut le bord, ce ne sont pas des sous-variétés C^∞.

2. Avec des équations - A FAIRE AVANT LE TD

Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'espace hyperbolique S d'équation $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

La courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x - xy^2 + y^3 = 0$ est elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

La courbe de $\mathbb{RP}^2$ d'équation $xz^2 - xy^2 + y^3 = 0$ (en coordonnées homogènes $[x : y : z]$) est elle une sous-variété de $\mathbb{RP}^2$?

Solution :

1– Posons $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots - x_n^2 - 1$, de sorte que S est $F^{-1}(\{0\})$. Il suffit de vérifier que F est une submersion au voisinage de S. On calcule $dF_{(x_1,\dots,x_n)}(h_1, \dots, h_n) = 2(x_1h_1 + \cdots + x_{n-1}h_{n-1} - x_nh_n)$ de sorte que dF est nulle seulement en l'origine. En particulier, dF est non nulle, donc surjective en tout point de S.

3. Questions diverses

1– Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété, $x \in X$. Vérifier que l'ensemble

$$\{c'(0),\ c :]-1,1[\to \mathbb{R}^n \text{ chemin } C^1 \text{ à valeurs dans } X \text{ tel que } c(0) = x\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui s'identifie à T_xX.

2– Soit X, Y des variétés et $p : X \to Y$ une fonction C^1. Montrer que l'ensemble des points $x \in X$ tels que $T_xf : T_xX \to T_{f(x)}Y$ est surjective est un ouvert de X. L'ensemble des valeurs régulières de f est il nécessairement ouvert dans Y ?

3– Soit X, Y, Z des variétés, $p : X \to Y$ une submersion surjective, $f : Y \to Z$ une fonction (ensembliste). Montrer que f est C^k si et seulement si $f \circ p$ est C^k.

4– Soit X une variété, $Y \subseteq X$ une partie de X. Montrer que Y est une sous-variété si et seulement si pour tout $y \in Y$, il existe $U \subseteq X$ un voisinage ouvert de y dans X, $p \in \mathbb{N}$, et $\psi : U \to \mathbb{R}^p$ une submersion tels qu'on ait l'expression locale :

$$Y \cap U = \{\psi = 0\}$$

Solution :

1– Notons E l'ensemble en question. Soit $d \in \mathbb{N}$ la dimension de X, (U, φ) une carte en x telle que $\varphi(x) = 0$. Pour $v_1, v_2 \in E$, On se donne des chemins $c_1, c_2 :]-1,1[\to X$ de classe C^1 tels que $c_1(0) = c_2(0) = x$ et $c_1'(0) = v_1$, $c_2'(0) = v_2$. On peut supposer c_1, c_2 à valeurs dans U. On pose $c_3 := \varphi^{-1}(\varphi \circ c_1 + \varphi \circ c_2)$ chemin C^1 à valeurs dans X défini au voisinage de 0. Quitte à bien choisir c_1, c_2, on peut supposer c_3 défini sur $]-1,1[$. De plus, on a $c_3'(0) = v_1 + v_2$. Ainsi E est stable par somme. On a l'homogénéité par reparamétrisation et E est donc un sous-espace vectoriel. On définit $i : T_xX \to E, [c] \to c'(0)$. On vérifie que cette application est bien définie, bijective. Pour vérifier que c'est un isomorphisme vectoriel, on remarque que $i \circ \varphi_\star^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, v \to d\varphi^{-1}v$ est linéaire, donc que $i = i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ aussi.

2– Pour montrer que l'ensemble des points où il y a submersion est ouvert, il suffit de se placer en coordonnées locales autour d'un tel point et de remarquer que si une matrice $A \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ est de rang maximal (i.e. de rang q dans notre cas), alors c'est aussi le cas des matrices A' proches de A. L'ensemble des valeurs régulières n'est pas toujours ouvert. Par exemple on peut considérer l'application $f : \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \amalg \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ coïcidant sur chaque composante $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$, $\mathbb{R}^2$ avec l'inclusion. Alors $\{0\}$ est une valeur régulière mais tous ses voisinages rencontrent les valeurs critiques $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$. On peut bricoler cette idée et obtenir un contrexemple où le domaine de définition de f est connexe.

3– Il s'agit de prouver la réciproque. Soit $y \in Y$, $x \in X$ tel que $p(x) = y$. On se donne des cartes $(U, \varphi), (V, \psi)$ en x et y telles que $p(U) \subseteq V$ et p lue dans les cartes est de la forme $\psi \circ p \circ \varphi^{-1} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_r)$. On a alors $f \circ p \circ \varphi^{-1} = \varphi(U) \to Z, (x_1, \dots, x_n) \mapsto$

$f \circ \psi^{-1}(x_1, \ldots, x_r)$ de classe C^k par hypothèse. On en déduit que $f \circ \psi^{-1}$ est C^k sur $\psi(p(U))$ ouvert de $\psi(U)$ contenant $\psi(y)$ puis que f est C^k sur $p(U)$ vosinage ouvert de y dans Y.

4– Le sens réciproque est fait en cours. On prouve le sens direct. On suppose donc que Y est sous variété de dimension k de X, variété de dimension n. Soit $y \in Y$. Il existe une carte (U, φ) de X en y telle que $\varphi(U \cap Y) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. On pose $\psi : U \to \mathbb{R}^{n-k}, x \mapsto \mathrm{proj}_{\mathbb{R}^{n-k}}(\varphi(x))$. On a $\{\psi = 0\} = U \cap Y$.

4. Fibration de Hopf, premiers pas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la projection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \to & \mathbb{RP}^n \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & [x_0 : \ldots : x_n] \end{array}$$

est un C^∞-difféomorphisme local surjectif.

Solution :

La surjectivité est immédiate.

Considérons l'application $p : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{RP}^n$, $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : \ldots : x_n]$. Admettons provisoirement que p est une submersion C^∞ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, on a $\ker\ T_x p = \mathbb{R}x$. Cela implique que la restriction de p à la sous-variété est $\mathbb{S}^n$ est C^∞, et que pour $x \in \mathbb{S}^n$, on a $\ker T_x(p_{|\mathbb{S}^n}) = \ker(T_x p)_{|\mathbb{S}^n} = (\ker T_x p) \cap T_x \mathbb{S}^n = \mathbb{R}x \cap x^\perp = \{0\}$. Par égalité des dimensions, on en déduit que la différentielle de $p_{|\mathbb{S}^n}$ est inversible en tout point, donc que $p_{|\mathbb{S}^n}$ est C^∞-difféomorphisme local.

Il reste à prouver le résultat sur p. C'est un résultat local. Soit $x \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Il existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $x_i \neq 0$. On note $U_i := \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{RP}^n, x_i \neq 0\}$, $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n, [x_0 : \ldots : x_n] \to (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i})$. Le couple (U_i, φ_i) est ainsi une carte locale en x. On a $\varphi_i \circ p(x_0, \ldots, x_n) = (\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i})$. Si on note $(e_0, \ldots, e_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a donc $T_x(\varphi_i \circ p)(e_j) = (0, \ldots, 0, 1/x_i, 0, \ldots, 0)$ où la position du terme non nul est j si $j \leqslant i-1$, $j-1$ si $j \geqslant i+1$. En particulier, l'application tangente $T_x(\varphi_i \circ p)$ est surjective. Son noyau est donc de dimension 1. Comme p est constante sur $\mathbb{R}x - \{0\}$, il contient la droite $\mathbb{R}x$, donc $\ker T_x p = \mathbb{R}x$.

5. Un angle n'est pas une sous-variété

1– Montrer que l'ensemble $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y \geqslant 0,\ \text{ou } x \geqslant 0 \text{ et } y = 0\}$ n'est pas une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

2– Donner cependant un exemple d'application C^∞ injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'image A.

Solution :

1– Supposons par l'absurde que A soit une sous-variété de $\mathbb{R}^2$. Comme A n'est pas un ouvert et n'est pas constitué de points isolés, c'est nécessairement une sous-variété de dimension 1.

Méthode 1 : paramétrisation et vecteur vitesse

Dans un voisinage U de l'origine, on a $A = \{\varphi(t) \mid t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\}$ où $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$ est un plongement. Soit $(t_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $\varphi(t_n) = (0, \frac{1}{n})$ (bien défini pour n assez grand). Alors $\varphi'(0) = \lim_{n \to \infty} (0, \frac{\frac{1}{n}}{t_n}) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ (le veteur vitesse en 0 est horizontal). De même, en considérant $(t'_n)_{n \geqslant 0}$ telle que $\varphi(t'_n) = (\frac{1}{n}, 0)$, on obtient $\varphi'(0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$ (le veteur vitesse en 0 est vertical). Alors $\varphi'(0) = 0$: absurde.

Méthode 1 : équation et fonctions implicites

Dans un voisinage U de l'origine, on peut écrire $A = \{F = 0\}$ où $F : U \to \mathbb{R}$ est une submersion. Comme dF_0 est non nulle, $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ ne peuvent être tous deux nuls. On peut supposer, par symétrie, que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites. Celui-ci montre en particulier que, quitte à restreindre U, la projection de $U \cap A$ sur l'axe des abscisses est injective.

C'est absurde car les points $(0, \varepsilon)$ pour $\varepsilon \geqslant 0$ ont tous même image par cette projection.

2– Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x) = (xe^{-1/x}, 0)$ si $x > 0$ et $f(x) = (0, -xe^{1/x})$ si $x < 0$ (Le facteur x est juste là pour faire tendre la fonction vers l'infini et décrire A globalement). On montre aisément que cette application est $\mathcal{C}^\infty$ injective, et d'image A, comme voulu.

6. Intersection de sous-variétés

Soit M_0 une variété de dimension d, et M et N deux sous-variétés de M_0 de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = T_xM_0$, alors $M \cap N$ est une sous-variété $\mathcal{C}^\infty$ de M_0. Préciser sa dimension et son espace tangent en x. On dit alors que M et N sont **transverses**. La réciproque est-elle vraie ?

Solution :

1– Soit $x \in M \cap N$. Par définition des sous-variétés à l'aide de submersions, on peut trouver un voisinage U de x dans $\mathbb{R}^d$ et des submersions $F : U \to \mathbb{R}^{d-m}$ et $G : U \to \mathbb{R}^{d-n}$ telles que $U \cap M = \{F = 0\}$ et $U \cap N = \{G = 0\}$. Ainsi, $U \cap M \cap N$ est le lieu des zéros de $(F, G) : U \to \mathbb{R}^{2d-m-n}$.

Montrons que (F, G) est une submersion en x. Pour cela, on calcule, utilisant l'hypothèse de transversalité pour la dernière égalité :

$$\dim \operatorname{Ker} d_x(F, G) = \dim(\operatorname{Ker} d_xF \cap \operatorname{Ker} d_xG) = \dim(T_xM \cap T_xN) = m + n - d.$$

Ainsi, $\dim \operatorname{Im} d_x(F, G) = d - (m + n - d) = 2d - m - n$. Par dimension, $d_x(F, G)$ est bien surjective. On en déduit d'une part que $M \cap N$ est une sous-variété au voisinage de x, d'autre part que sa dimension est $d - (2d - m - n) = m + n - d$, et enfin que son espace tangent en x est $\{T_xF = T_xG = 0\} = T_xM \cap T_xN$.

La réciproque est fausse : considérer l'intersection d'une sous-variété avec elle-même ! Ou bien l'intersection, dans $\mathbb{R}^4$ de deux plans se coupant le long d'une droite.

7. Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = \sum a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$. On montre que l'application polynomiale $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.

On note $\mathbb{CP}^1$ l'ensemble des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^2$, $U_0 := \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{CP}^1,\ x_0 \neq 0\}$, $U_1 := \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{CP}^1,\ x_1 \neq 0\}$, $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}, [x_0 : x_1] \to x_1/x_0$, $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}, [x_0 : x_1] \to x_0/x_1$. Les couples (U_0, φ_0), (U_1, φ_1) induisent une structure de variété compacte sur $\mathbb{CP}^1$ (de dimension réelle 2). On identifie $\mathbb{C} \equiv U_0 \subseteq \mathbb{CP}^1$ via φ_0^{-1} et on note $\infty := [0 : 1]$. Ainsi $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1– Montrer que l'application polynomiale $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'étend en une application lisse $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$.

2– Montrer que f a un nombre fini de points critiques. Quand le point à l'infini est-il un point critique ?

3– On note R l'ensemble des valeurs régulières de f, et $a : R \to \{0, 1\}$ la fonction qui à x associe 0 si x n'a pas d'antécédant par f, et 1 sinon. Montrer que a est localement constante et conclure.

Solution :

1– On note ∞ le point à l'infini de $\mathbb{CP}^1$ vu comme compactifié d'Alexandroff de $\mathbb{C}$. On pose $f(\infty) = \infty$. Il s'agit alors de vérifier que f est lisse au voisinage de ∞. Par définition de la structure de variété différentielle sur $\mathbb{CP}^1$, il suffit de montrer que l'application $z \mapsto P(z^{-1})^{-1}$ bien définie sur un voisinage épointé de 0 s'étend en 0 en une application lisse (s'annulant en 0). On calcule $P(z^{-1})^{-1} = \frac{z^n}{\sum a_k z^{n-k}}$. Comme $a_n \neq 0$, le résultat est clair.

2– Un point $z \neq \infty$ est critique si, et seulement si, $P'(z) = 0$. En effet, la différentielle d'une application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ s'identifie à sa dérivée formelle, nombre complexe vu comme application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Donc, il y a un nombre fini de points critiques dans $\mathbb{C}$, et donc un nombre fini de points critiques pour f (au pire, on ajoute le pôle Nord). L'expression précédente de f dans des cartes au voisinage de l'infini montre que ∞ est un point critique si, et seulement si, $n \geqslant 2$.

3– Soit $x \in R$. L'image de f est fermée comme image continue de $\mathbb{CP}^1$ qui est compact. On a donc que si $a(x) = 0$ alors $a(x') = 0$ pour x' assez proche de x. Si $a(x) = 1$, alors il existe $y \in \mathbb{CP}^1$ tel que $f(y) = x$. Comme x est une valeur régulière, on a f submersive en y donc ouverte au voisinage de y. En particulier, un voisinage de x est atteint par f. Ainsi a est localement constante. Or l'ensemble R est égale à $\mathbb{CP}^1$ privé d'un nombre fini de points. Comme $\mathbb{CP}^1$ est connexe et de dimension $\geqslant 2$, on a donc que $\mathbb{R}$ est connexe. Ainsi a est constante, égale à 1. Comme toute valeur critique est également atteinte par f (par définition), on a donc prouvé la surjectivité.