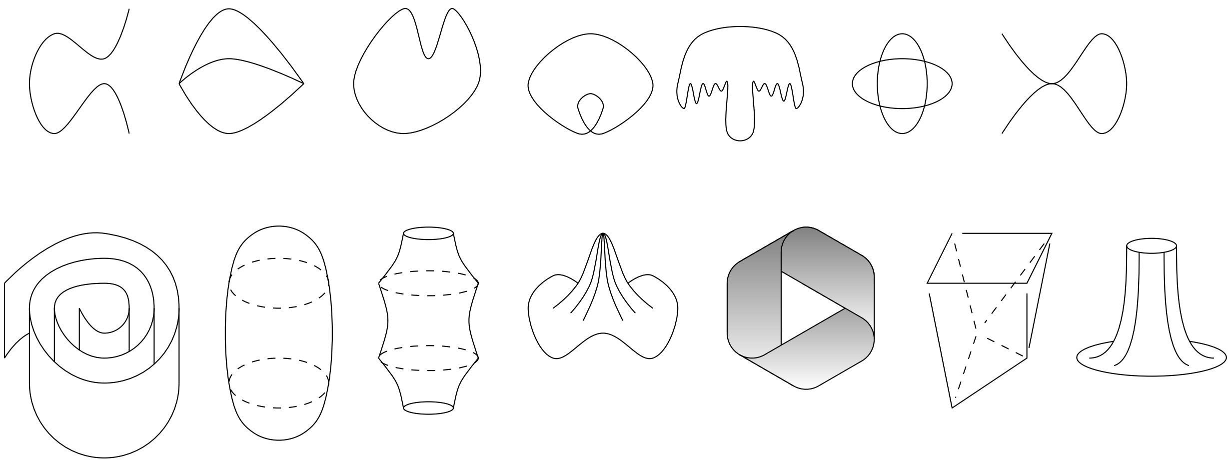
Géométrie Différentielle, TD 2 du 13 février 2020

Dans ce TD, les notions de variétés, sous variétés, submersions, plongements, etc. sont à considérer par défaut comme étant de classe C^∞. La plupart du temps, on peut facilement formuler un énoncé analogue pour la régularité C^k, et adapter la preuve en régularité C^∞ pour le démontrer.

1. Exemples et contre-exemples de sous-variétés - A FAIRE AVANT LE TD

Les dessins suivants représentent des parties de $\mathbb{R}^2$ (première ligne) ou de $\mathbb{R}^3$ (deuxième ligne). Dire, sans justification rigoureuse, lesquelles sont des sous-variétés C^∞.



2. Avec des équations - A FAIRE AVANT LE TD

Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'espace hyperbolique S d'équation $x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 1$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

La courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x - xy^2 + y^3 = 0$ est elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

La courbe de $\mathbb{RP}^2$ d'équation $xz^2 - xy^2 + y^3 = 0$ (en coordonnées homogènes $[x : y : z]$) est elle une sous-variété de $\mathbb{RP}^2$?

3. Questions diverses

1– Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété, $x \in X$. Vérifier que l'ensemble

$$\{c'(0),\ c :]-1,1[\to \mathbb{R}^n \text{ chemin } C^1 \text{ à valeurs dans } X \text{ tel que } c(0) = x\}$$

est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui s'identifie à T_xX.

2– Soit X, Y des variétés et $p : X \to Y$ une fonction C^1. Montrer que l'ensemble des points $x \in X$ tels que $T_xf : T_xX \to T_{f(x)}Y$ est surjective est un ouvert de X. L'ensemble des valeurs régulières de f est il nécessairement ouvert dans Y ?

3– Soit X, Y, Z des variétés, $p : X \to Y$ une submersion surjective, $f : Y \to Z$ une fonction (ensembliste). Montrer que f est C^k si et seulement si $f \circ p$ est C^k.

4– Soit X une variété, $Y \subseteq X$ une partie de X. Montrer que Y est une sous-variété si et seulement si pour tout $y \in Y$, il existe $U \subseteq X$ un voisinage ouvert de y dans X, $p \in \mathbb{N}$, et $\psi : U \to \mathbb{R}^p$ une submersion tels qu'on ait l'expression locale :

$$Y \cap U = \{\psi = 0\}$$

4. Fibration de Hopf, premiers pas

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la projection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \to & \mathbb{RP}^n \\ (x_0, \dots, x_n) & \mapsto & [x_0 : \ldots : x_n] \end{array}$$

est un C^∞-difféomorphisme local surjectif.

5. Un angle n'est pas une sous-variété

1– Montrer que l'ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ et } y \geqslant 0, \text{ ou } x \geqslant 0 \text{ et } y = 0\}$ n'est pas une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

2– Donner cependant un exemple d'application C^∞ injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ d'image A.

6. Intersection de sous-variétés

Soit M_0 une variété de dimension d, et M et N deux sous-variétés de M_0 de dimensions respectives m et n.

1– Montrer que si, pour tout $x \in M \cap N$, $T_xM + T_xN = T_xM_0$, alors $M \cap N$ est une sous-variété C^∞ de M_0. Préciser sa dimension et son espace tangent en x. On dit alors que M et N sont **transverses**. La réciproque est-elle vraie ?

7. Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P = \sum a_k z^k$ un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$. On montre que l'application polynomiale $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est surjective.

On note $\mathbb{CP}^1$ l'ensemble des droites vectorielles complexes de $\mathbb{C}^2$, $U_0 := \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{CP}^1,\ x_0 \neq 0\}$, $U_1 := \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{CP}^1,\ x_1 \neq 0\}$, $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{C}, [x_0 : x_1] \to x_1/x_0$, $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{C}, [x_0 : x_1] \to x_0/x_1$. Les couples (U_0, φ_0), (U_1, φ_1) induisent une structure de variété compacte sur $\mathbb{CP}^1$ (de dimension réelle 2). On identifie $\mathbb{C} \equiv U_0 \subseteq \mathbb{CP}^1$ via φ_0^{-1} et on note $\infty := [0 : 1]$. Ainsi $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1– Montrer que l'application polynomiale $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s'étend en une application lisse $f : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$.

2– Montrer que f a un nombre fini de points critiques. Quand le point à l'infini est-il un point critique ?

3– On note R l'ensemble des valeurs régulières de f, et $a : R \to \{0, 1\}$ la fonction qui à x associe 0 si x n'a pas d'antécédant par f, et 1 sinon. Montrer que a est localement constante et conclure.