Géométrie Différentielle, TD 3 du 20 février 2020

1. Questions diverses- A FAIRE AVANT LE TD

1– Peut on plonger $\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{R}^n$?

2– La composée de deux applications de rang constant est elle nécessairement de rang constant ?

3– Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique non dégénérée. Montrer que l'ensemble des matrices préservant Q défini par $O(Q) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ Q \circ A = Q\}$ est un sous-groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$ et expliciter son espace tangent en l'élément neutre (on pourra commencer par mettre Q sous une forme canonique).

4– Une morphisme injectif de groupes des Lie est il nécessairement une immersion ? un plongement ?

5– Montrer qu'une application continue entre variétés topologiques est propre si et seulement elle est fermée et l'image réciproque de tout point est compacte.

2. Exemples de plongements

1– Montrer que l'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, x^2)$ est un plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

2– Montrer que l'application $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ induit un plongement du plan projectif $\mathbb{RP}^2$ dans $\mathbb{R}^4$.

3– Soit $m, n \geqslant 1$ des entiers. Montrer que le produit d'espaces projectifs $\mathbb{RP}^m \times \mathbb{RP}^n$ se plonge dans $\mathbb{RP}^{(m+1)(n+1)-1}$ via l'application qui au couple $([x_0 : \ldots : x_m], [y_0 : \ldots : y_n])$ associe le point de coordonnées homogènes $[x_i y_j]_{0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n}$.

3. Exemples de quotients

On considère les actions suivantes du groupe $\mathbb{Z}$ sur une variété X, engendrées par le difféomorphisme f de X. Déterminer dans quels cas l'action est libre et proprement discontinue. Identifier le quotient quand c'est le cas.

Dans le cas contraire, le quotient est-il séparé ? Localement homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^N$?

1– $X = \mathbb{R}^{+*}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

2– $X = \mathbb{R}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

3– $X = \mathbb{R}^N \setminus \{(0, 0)\}$ et f est l'homothétie de rapport 2.

4– $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f(x, y) = (2x, y/2)$.

4. Application C^1 injective

Considérons une application f de classe C^1 de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est injective.

1– Montrer que la différentielle de f est de rang m sur un ouvert dense de $\mathbb{R}^m$.

2– En déduire que $m \leqslant n$.

3– La différentielle de f est-elle nécessairement de rang m partout ?

5. L'image d'une variété est-elle une sous-variété ?

Soient M et N deux variétés et $f : M \to N$ une application C^∞.

1– Donner des contre-exemples au fait que l'image d'une variété par une immersion injective propre est une sous-variété si l'on supprime "immersion", "injective" ou "propre".

2– On suppose que f est une immersion propre et que le cardinal de $f^{-1}(f(x))$ est fini constant. Montrer que $f(M)$ est une sous-variété de N.

6. Algèbre de Lie et Théorème de Von Neumann

Dans cet exercice, on prouve le théorème suivant :

Théorème (Von Neumann)**.** Un sous groupe $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe de Lie si et seulement s'il est fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$

1– Vérifier qu'un sous groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$

2– Donner des exemples de sous groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas des sous-variétés.

On va maintenant prouver le sens réciproque. On se donne $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe fermé.

3– Montrer que si G est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au voisinage de l'identité, alors G est un sous groupe de Lie de $GL_n(\mathbb{R})$.

On cherche une paramétrisation de G au voisinage de l'identité. Pour cela on introduit un sous-espace vectoriel $\mathcal{L}_G$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui s'avèrera être l'espace tangent en l'élément neutre de G) et on montre que l'exponentielle envoie $\mathcal{L}_G$ dans G est réalise une telle paramétrisation.

4– Montrer que pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a
$$e^A e^B = e^{A+B+o(||A||,||B||)}$$

5– On pose $\mathcal{L}_G = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} \in G\}$. Montrer que $\mathcal{L}_G$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par $(A, B) \mapsto [A, B] = AB - BA$.

Soit F supplémentaire de $\mathcal{L}_G$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_G \times F & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ (A, M) & \mapsto e^A e^M & \end{array} \right.$$

6– Montrer que pour $M \in F \setminus \{0\}$ assez proche de 0, on a $e^M \notin G$.

7– Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 dans $\mathcal{L}_G$ et un voisinage ouvert V de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi|_U$ soit un C^∞-difféomorphisme de U sur $V \cap G$, ce qui achève la preuve du théorème de Von Neumann.

En particulier, $\mathcal{L}_G$ est l'espace tangent à G en I_n et l'exponentielle réalise localement un difféomorphisme entre $\mathcal{L}_G$ et G.