Géométrie Différentielle, TD 5 du 5 mars 2020

1. Questions diverses - A FAIRE AVANT LE TD

Le **rang** d'un fibré vectoriel est la dimension des espaces vectoriels fibres de ce fibré.

1– Soit M une variété de dimension n. Montrer que $M \times \mathbb{R}^p$ est naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel de rang p sur M.

On dit qu'un fibré vectoriel de rang p sur M isomorphe à $M \times \mathbb{R}^p$ est **trivial**. Une variété est dite **parallélisable** si son fibré tangent est trivial.

2– Montrer qu'une variété M de dimension n est parallélisable si et seulement s'il existe des champs de vecteurs C^∞ $X_1, \ldots, X_n$ sur M tels que $\forall x \in M, (X_1(x), \ldots, X_n(x))$ est une base de T_xM.

3– Montrer que tout groupe de Lie est parallélisable.

2. Fibré normal

1– Soit M sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension p. Montrer que l'ensemble

$$\{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in (T_xM)^\perp\}$$

est une sous-variété de $M \times \mathbb{R}^n$ de dimension n, puis un fibré vectoriel sur M de rang $n-p$. On l'appelle le **fibré normal** de M, noté $N(M)$.

2– Montrer que le fibré normal de $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est trivial.

3– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion et $M = f^{-1}(\{0\})$. Montrer que $N(M)$ est trivial.

3. Théorème du voisinage tubulaire

Soit M une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$ compacte. On note $N(M) \subseteq M \times \mathbb{R}^n$ le fibré normal de M (cf. exercice précédent).

1– On définit une application $f : N(M) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par $f(x, v) = x + v$ où $x \in M, v \in T_xM^\perp$. Montrer que f est C^∞.

On veut montrer que la restriction de f à $N_\varepsilon(M) := \{(x, v) \in N(M) \mid \|v\| < \varepsilon\}$ définit un difféomorphisme de $N_\varepsilon M$ sur un voisinage ouvert de M si ε est assez petit.

2– Vérifier que pour $x \in M$, on a $T_{(x,0)}N(M) \equiv T_xM \times (T_xM)^\perp$. En déduire que $T_{(x,v)}f$ est inversible pour $(x, v) \in N_\varepsilon(M)$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit.

3– Soit (x_n) et (y_n) deux suites de points de M ayant même limite z et telles que $x_n \neq y_n$ pour tout n. Montrer que toute valeur d'adhérence de $\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$ est dans T_zM.

4– Montrer que f est injective sur $N_\varepsilon(M)$ si ε est assez petit (on pourra raisonner par l'absurde). Conclure.

5– Pour un tel $\varepsilon > 0$, l'image $f(N_\varepsilon(M))$ est appelée "voisinage tubulaire de M". Montrer que pour un point $y = f(x, v) \in f(N_\varepsilon(M))$, on a $d(y, M) = \|v\|$.

4. Ruban de Möbius

Dans cet exercice, on montre que le ruban de Möbius peut se voir comme un fibré vectoriel de rang 1 non trivial sur le cercle.

1– Identifions $\mathbb{S}^1$ au cercle unité dans $\mathbb{C}$, de sorte que $z \mapsto -z$ est une involution sans point fixe de $\mathbb{S}^1$. Quel est le quotient X de $\mathbb{S}^1$ par cette involution ?

2– Soit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ le fibré vectoriel de rang 1 trivial sur $\mathbb{S}^1$. Montrer que le quotient de ce fibré vectoriel par l'involution $(z,t) \mapsto (-z,-t)$ est un fibré vectoriel E de rang 1 sur X.

3– Montrer que $E \to X$ n'est pas un fibré vectoriel trivial.

4– Généralisation : On pose $E := \{(D,x) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in D\}$ et $p : E \to \mathbb{RP}^n, (D,x) \mapsto D$. Montrer que (E,p) est un fibré vectoriel de rang 1 non trivial sur $\mathbb{RP}^n$ (c'est le "fibré tautologique").

Remarque : On peut démontrer qu'il n'y a pas d'autre fibré en droites sur le cercle S^1 que le fibré trivial et le ruban de Möbius.

5. Théorème de la boule chevelue

Le but de cet exercice est de montrer qu'un champ de vecteurs C^∞ sur une sphère $\mathbb{S}^n$ de dimension paire admet toujours un point d'annulation. On commence par une mise en perspective :

1– Montrer que les sphères de dimension impaire admettent des champs de vecteurs C^∞ qui ne s'annulent pas.

2– Montrer que toute sphère (de dimension au moins 1) admet un champ de vecteur s'annulant exactement en un seul point.

Passons maintenant à la preuve du théorème. On suppose $n \geqslant 1$ pair.

3– Soient K une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant K et v une application de classe C^∞ de U dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour t dans $\mathbb{R}$, on définit une application $F_t : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ x & \mapsto & x + tv(x) \end{array} \right.$. Montrer qu'il existe un ouvert V de U contenant K et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout t avec $|t| \leqslant \varepsilon$, F_t soit un difféomorphisme de V sur son image. Montrer que la mesure de Lebesgue de $F_t(K)$ est alors un polynôme en t.

4– Soit v un champ de vecteurs unitaire sur $\mathbb{S}^n$. On pose toujours, pour t dans $\mathbb{R}$ et x dans $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $F_t(x) = x + tv(x)$. Montrer que, pour t suffisamment petit, F_t est un difféomorphisme entre $\mathbb{S}^n$ et la sphère de rayon $\sqrt{1+t^2}$.

5– Conclure.