Géométrie Différentielle, TD 7 du 19 mars 2020

1. Exercices

NB : Des indications sont proposées plus bas.

1. Questions-diverses - A FAIRE AVANT LE TD

1– Soit $f : M \to N$ une immersion entre deux variétés. Montrer que pour tout $x \in M$, il existe $U \subseteq M$ ouvert contenant x tel que $f_{|U}$ est un plongement.

2– Soit $f : M \to N$ une application lisse et surjective, $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$ des champs de vecteurs tels que $f_\star X_i = Y_i$ au sens où pour tout $x \in M$, on a $Tf \circ X_i = Y_i \circ f$.

a) Si $[X_1, X_2] = 0$, a t'on $[Y_1, Y_2] = 0$?

b) A t'on la réciproque ?

Soit G un groupe de Lie connexe.

3– Montrer que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local en 0.

4– En déduire que le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est G.

5– Donner un exemple où $\exp : \mathfrak{g} \to G$ n'est pas surjective.

Solution :

1– Utiliser le théorème de forme normale des immersions : localement une immersion est une inclusion donc un plongement.

2– a) OUI. En effet, notons $\varphi_1^M(t,x)$ et $\varphi_2^M(t,x)$ les flots associés à X_1, X_2 sur M, $\varphi_1^N(t,y)$ et $\varphi_2^N(t,y)$ les flots associés à Y_1, Y_2 sur N. On va montrer que les flots φ_i^N, $i = 1,2$ commutent localement. On remarque que $f \circ \varphi_{i,t}^M = \varphi_{i,t}^N \circ f$. Soit $x \in M$. Comme $[X_1, X_2] = 0$, on a pour $s, t \in \mathbb{R}$ assez petits que

$$\varphi_{2,-s}^M \circ \varphi_{1,-t}^M \circ \varphi_{2,s}^M \circ \varphi_{1,t}^M(x) = x$$

puis en appliquant f et en utilisant l'équivariance par rapport aux flots :

$$\varphi_{2,-s}^N \circ \varphi_{1,-t}^N \circ \varphi_{2,s}^N \circ \varphi_{1,t}^N(f(x)) = f(x)$$

Les flots φ_i^N, $i = 1,2$ commutent donc localement au voisinage de $f(x)$. On en déduit que $[Y_1, Y_2](f(x)) = 0$. Comme f est surjective, cela conclut.

b) La réciproque est FAUSSE. Considérer $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1$ et des champs de vecteurs X_i à valeurs dans $\{0\} \times \mathbb{R}^2$ qui ne commutent pas. Leurs projections Y_i sont nuls donc commutent.

3– Soit $X \in \mathfrak{g}$. On a
$$T_e \exp(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \exp(tX) = X.$$
Donc $T_e \exp = Id_{\mathfrak{g}}$ et exp est un difféomorphisme local en 0

4– Soit $A = \{\exp(X_1)\dots\exp(X_k) \in G \mid k \in \mathbb{N}, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}\}$ le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$.

l'application $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme d'un voisinage U de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage V de e dans G. Soit $g = \exp(X_1)\dots\exp(X_k) \in A$. Alors gV est un voisinage de g dans G (car L_g difféomorphisme de G). Or tout élément de V s'écrit $\exp(X)$ pour un $X \in U \subset \mathfrak{g}$, donc tout élément de GV s'écrit $\exp(X_1)\dots\exp(X_k)\exp(X)$. On en déduit $gV \subset A$ et donc A est ouvert.

Soit $g \in \bar{A}$. L'ouvert gV est un voisinage de g dans G, donc il existe $g' \in gV$ tel que $g' \in A$. Alors il existe $h \in V$ tel que $g' = gh$ et donc gh s'écrit $gh = \exp(X_1)\dots\exp(X_k)$. Comme $h \in V$, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que $h = \exp(X)$. Alors $g = \exp(X_1)\dots\exp(X_k)\exp(-X)$ donc $g \in A$. L'ensemble A est donc fermé.

Bilan : A est un ouvert fermé non vide (contient e) de G connexe, donc $A = G$.

5– Pour $G = GL_2^+(\mathbb{R})$, l'application $\exp : M_2(\mathbb{R}) \to GL_2^+(\mathbb{R})$ n'est pas surjective. En effet, montrons que la matrice $A := \begin{pmatrix} -1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de exp. Si c'était le cas, il existerait $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Les valeurs propres de B sont de la forme $\lambda_1 = \pm i$, $\lambda_2 = \pm i\sqrt{2}$. De plus leur somme est réelle (comme trace d'une matrice réelle), ce qui est absurde.

2. Commutation des champs de vecteurs

Nous allons montrer que le crochet de deux champs de vecteurs mesure le défaut de commutation de leurs flots à l'ordre 2. Soit X, Y des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ de flots respectifs φ^X et φ^Y. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on considère l'application $\psi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ définie au voisinage de 0 par :
$$\psi_x(s,t) = \varphi_s^Y \circ \varphi_t^X \circ \varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x).$$

1– Vérifier que $\psi_x(0) = x$, $d_0\psi_x = 0$.

2– Montrer que pour $s, t \in \mathbb{R}$ proches de 0, on a,
$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(s,t) = Y(\varphi_s^Y \circ \varphi_t^X \circ \varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x)) + d(\varphi_s^Y \circ \varphi_t^X)_{\varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x)}[-Y(\varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x))]$$

3– Montrer que $\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\psi_x(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_x(0,0) = 0$, et $\dfrac{\partial^2}{\partial t \partial s}\psi_x(0,0) = [X,Y](x)$.

Solution :

1– Comme $\varphi_0^Y = \varphi_0^X = Id$, on a $\forall s, \psi_x(s,0) = x$ et $\forall t, \psi_x(0,t) = x$ donc $\dfrac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\psi_x = \dfrac{\partial}{\partial t}_{|t=0}\psi_x = 0$. Finalement, $\psi_x(0) = x$ et $d_0\psi_x = 0$.

2– On a, par dérivation des fonctions de plusieurs variables,

$$\begin{aligned}(\frac{\partial}{\partial s}\psi_x)(s_0,t_0) &= \frac{d}{ds}_{|s=s_0}\varphi^Y_s(\varphi^X_{t_0}\circ\varphi^Y_{-s_0}\circ\varphi^X_{-t_0}(x)) + \frac{d}{ds}_{|s=s_0}(\varphi^Y_{s_0}\circ\varphi^X_{t_0})(\varphi^Y_{-s}\circ\varphi^X_{-t_0}(x))\\ &= Y(\varphi^Y_{s_0}\circ\varphi^X_{t_0}\circ\varphi^Y_{-s_0}\circ\varphi^X_{-t_0}(x)) + d(\varphi^Y_{s_0}\circ{\varphi^X}_{t_0})_{\varphi^Y_{-s_0}\circ\varphi^X_{-t_0}(x)}[-Y(\varphi^Y_{-s_0}\circ\varphi^X_{-t_0}(x))]\end{aligned}$$

3– D'après la question précédente,

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(s,0) = Y(\varphi^Y_s\circ\varphi^Y_{-s}(x)) + d(\varphi^Y_s)_{\varphi^Y_{-s}(x)}[-Y(\varphi^Y_{-s}(x))] = Y(x) - (\varphi^Y_s)_*Y(x)$$

et de même

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(0,t) = Y(x) - (\varphi^X_t)_*Y(x).$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\psi_x(0,0) = \frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\big(Y(x) - (\varphi^Y_s)_*Y(x)\big) = -\frac{\partial}{\partial s}_{|s=0}\big((\varphi^Y_s)_*Y(x)\big) = -[Y,Y](x) = 0$$

et de même

$$\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\psi_x(0,0) = -\frac{\partial}{\partial t}_{|s=0}\big((\varphi^X_t)_*Y(x)\big) = \frac{\partial}{\partial t}_{|s=0}\big((\varphi^X_t)^*Y(x)\big) = [X,Y](x).$$

On montre de manière similaire que $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_x(0,0) = 0$, ce qui achève la preuve.

3. Redressement simultané de champs de vecteurs qui commutent

Soit M une variété et $X_1,\dots,X_k$ des champs de vecteurs sur M. On suppose qu'au voisinage d'un point $x_0\in M$, la famille $(X_1(x),\dots,X_k(x))$ est libre et $[X_i,X_j](x)=0$ pour $i\neq j$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe alors un difféomorphisme ψ d'un voisinage U de x_0 vers un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ qui redresse simultanément ces champs de vecteurs, autrement dit tel que

$$\forall i\in\{1,\dots,k\},\quad \psi_*X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

1– Supposons dans un premier temps que la variété ambiente M est $\mathbb{R}^n$, que le point base x_0 est 0 et que pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$ que $X_i(0)=\frac{\partial}{\partial x_i}$. Soit F l'application définie au voisinage de 0 par la formule

$$F(x_1,\dots,x_n) = \varphi^{X_1}_{x_1}\circ\varphi^{X_2}_{x_2}\circ\cdots\circ\varphi^{X_k}_{x_k}(0,\dots,0,x_{k+1},\dots,x_n)$$

a) Montrer F est un difféomorphisme local en 0.

b) Pour $i=1,\dots,k$, calculer le poussé en avant $F_\star\frac{\partial}{\partial x_i}$.

2– Conclure dans le cas général.

Solution :

1– a) On a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \mapsto \varphi_{x_i}^{X_i}(0))_{|x_i=0} = X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Pour $i \geqslant k+1$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \mapsto Id(0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)_{|x_i=0} = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Donc $d_0F = Id$. D'après le théorème d'inversion locale, F est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

b) Pour $y = F(x)$ et $i \in \{1,\dots,k\}$, on a, en utilisant la commutation des flots,

$$\begin{aligned}
F_* \tfrac{\partial}{\partial x_i}(y) &= dF_x(\tfrac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= \tfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) \\
&= \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i \mapsto \varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0,\dots,0,x_{k+1},\dots,x_n)\right)_{|x_i} \\
&= \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(x_i \mapsto \varphi_{x_i}^{X_i}\varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \varphi_{x_{i-1}}^{X_{i-1}} \circ \varphi_{x_{i+1}}^{X_{i+1}} \dots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0,\dots,0,x_{k+1},\dots,x_n)\right)_{|x_i} \\
&= X_i\left[\varphi_{x_i}^{X_i}\varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \varphi_{x_{i-1}}^{X_{i-1}} \circ \varphi_{x_{i+1}}^{X_{i+1}} \dots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0,\dots,0,x_{k+1},\dots,x_n)\right] \\
&= X_i\left[\varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0,\dots,0,x_{k+1},\dots,x_n)\right] \\
&= X_i\left[F(x)\right] = X_i(y)
\end{aligned}$$

Donc

$$F_* \frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$$

En notant G l'inverse local de F, on a $G_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

2– Si nous sommes sous les hypothèses de l'énoncé, on se place dans une carte $\psi : U_{x_0} \to \mathbb{R}^n$ au voisinage de x_0. Quitte à composer ψ avec une application de $GL_n(\mathbb{R})$, on peut supposer que $Y_i := \psi_* X_i$ vérifie $Y_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$. D'après le travail que nous venons de faire, il existe un difféomorphisme G défini au voisinage de 0 tel que $G_* Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. En posant $\Phi = G \circ \psi$, on a défini un difféomorphisme d'un voisinage de x_0 dans M sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ qui vérifie pour tout i :

$$\Phi_* X_i = G_* \psi_* X_i = G_* Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

4. Théorème de Frobénius

Soit M une variété. Une *distribution p-plans* sur M la donnée pour tout $x \in M$ d'un sous-espace vectoriel $E(x) \subseteq T_xM$ de dimension p, telle que la famille $E = (E(x))_{x \in M}$ est lisse au sens où pour tout $x \in M$, il existe $U \subseteq M$ voisinage ouvert de x, et des champs de vecteurs $X_1,\dots,X_p$ définis sur U tels que $(X_1(y),\dots,X_p(y))$ est une base de $E(y)$ pour tout $y \in U$.

Une distribution E est dite *intégrable* si pour tout $x \in M$, il existe une sous-variété N de M contenant x tel que $\forall y \in N, T_yN = E(y)$. Cela signifie que la distribution E s'écrit localement comme le fibré tangent d'une sous variété.

1– Montrer qu'une distribution de 1-plans (i.e. un champ de droites) sur M est toujours intégrable.

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Frobénius :

Théorème. Soit E une distribution de p-plans sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) E est intégrable

ii) E est stable par crochet : Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ à valeurs dans E, on a $[X, Y]$ à valeurs dans E

iii) E a des bases locales commutatives : Pour tout $x_0 \in M$, il existe une base locale $(Y_1, \dots, Y_p)$ de E au voisinage de x_0 dont les crochets sont nuls : $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $[Y_i, Y_j] = 0$

2– Montrer que i) implique ii).

3– Montrer que iii) implique i). [on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2]

On suppose désormais ii) et on cherche à prouver iii). On fixe $x_0 \in M$, (U, φ) un carte en x_0 telle que $\varphi(x_0) = 0$. Quitte à choisir U plus petit, on peut supposer qu'il existe $(X_1, \dots, X_p)$ une base de $E_{|U}$. On note $\widetilde{X}_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ le champ de vecteurs X_i lu dans la carte (U, φ). On écrit $\widetilde{X}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ où les coefficients $a_{i,j} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ sont C^∞.

4– Montrer qu'on peut choisir $(U,\ \varphi)$ telle que pour tout $i = 1, \dots, p$, $\widetilde{X}_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$, puis telle que la matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est inversible en tout point de $\varphi(U)$.

On note $(b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ l'inverse de $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, puis pour $i = 1, \dots, p$, $\widetilde{Y}_i := \sum_{j=1}^p b_{i,j} \widetilde{X}_j$, et $Y_i := \varphi^\star(\widetilde{Y}_i) \in \Gamma(TU)$.

5– Montrer que $(Y_1, \dots, Y_p)$ est une base de $E_{|U}$ et que $[Y_i, Y_j] = 0$ si et seulement si $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j] = 0$.

6– Montrer que $\widetilde{Y}_i$ est de la forme $\widetilde{Y}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^n c_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$

7– En déduire que $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j]$ est de la forme $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j] = \sum_{k=p+1}^n e_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ puis montrer que les $e_{i,j,k}$ sont nuls en utilisant l'hypothèse ii).

Solution :

1– Soit $x_0 \in M$, $U \subseteq M$ un ouvert contenant x_0, $X \in \Gamma(TU)$ un champ de vecteurs sur U sans point d'annulation et à valeurs dans E. On note $c(t) := \varphi_t(x)$ où φ est le flot associé à X. Le chemin c est définie sur l'intervalle de temps $] - \varepsilon, \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$ est assez petit. c est une immersion en $t = 0$ car $c'(0) = X((x_0)) \neq 0$. Quitte à choisir ε suffisamment petit, on peut donc supposer que c est un plongement (th. de forme normale des immersions). On pose $N := \mathrm{Im}(c)$. On a $T_{c(t)}N = \mathbb{R}c'(t) = \mathbb{R}X(c(t)) = E(c(t))$. La sous variété N admet donc $E_{|N}$ pour fibré tangent ce qui conclut.

2– Soit $X, Y \in \Gamma(TM)$ à valeurs dans E, $x \in M$. Montrons que $[X, Y](x) \in M$. Par hypothèse il existe $N \subseteq M$ une sous-variété tangente de fibré tangent $E_{|N}$ et contenant le point x. Les champs de vecteurs X, Y se restreignent en des champs de vecteurs $X_{|N}, Y_{|N} \in \Gamma(TN)$. On a $[X, Y](x) = [X_{|N}, Y_{|N}](x) \in T_x(N) = E(x)$. D'où le résultat.

3– D'après l'exercice précédent, si E est engendrée au voisinage de x_0 par des champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_k$ qui commutent deux à deux, alors il existe un difféomorphisme ψ défini au voisinage de x_0 tel que $\psi_* Y_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Alors $N := \psi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ est une sous-variété de M passant par x_0 et $T_x N = \psi^*(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \mathrm{Vect}(\psi^* \frac{\partial}{\partial x_1}(x), \ldots, \psi^* \frac{\partial}{\partial x_k}(x)) = \mathrm{Vect}(Y_1(x), \ldots, Y_k(x)) = E(x)$. La distribution E est donc intégrable.

4– Pour la suite, c.f. Frédéric Paulin, Cours de géométrie différentielle, preuve du th. de Frobénius page 113, deuxième paragraphe (accessible sur internet).

5. Deux champs de vecteurs

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur une variété M de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. On va montrer qu'il existe f, g des fonctions C^∞ strictement positives définies au voisinage de x telles que $[fX, gY] = 0$.

1– En écrivant $[X, Y] = aX + bY$, montrer que l'équation $[fX, gY] = 0$ se traduit par les équations découplées $Y.f - af = 0$ et $X.g + bg = 0$.

2– Conclure.

3– Ce résultat local est-il encore valable si M est de dimension supérieure à 3 ?

Solution :

1– Comme on est en dimension 2, on peut écrire $[X, Y] = aX + bY$, avec des fonctions a et b lisses, uniquement déterminées. Remarquons par ailleurs que l'équation $[fX, gY] = 0$ se réécrit $fg[X, Y] + f(X.g)Y - g(Y.f)X = 0$. On veut donc résoudre les équations (découplées) $Y.f - af = 0$ et $X.g + bg = 0$.

2– Pour montrer qu'une telle équation admet toujours une solution, on peut redresser X en un champ de vecteur constant. On est alors ramené à une EDO en dimension 1 (dont on peut même choisir les conditions initiales).

3– Choisissons X et Y de sorte qu'ils engendrent un champ de 2-plans non intégrable. Alors fX et gY engendrent le même champ de 2-plans. La condition $[fX, gY] = 0$ permettrait d'appliquer le théorème de Frobenius pour montrer son intégrabilité. C'est absurde.

6. Une hypersurface compacte voit tout

Soit M une hypersurface compacte C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $f : M \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x \mapsto T_x M^\perp$. Montrer que f est une application C^∞ surjective.

Solution :

Voir le *Cours de Géométrie différentielle élémentaire* de Frédéric Paulin, exercice 62 (solution page 86).

2. Indications

Exercice 1

1.2 a) : Montrer que $[Y_1, Y_2] = 0$ en vérifiant que les flots associés aux champs de vecteurs Y_1, Y_2 commutent localement. Cela découle du fait que les flots associés aux champs de vecteurs X_1, X_2 commutent localement et de la relation $f_\star X_i = Y_i$

1.2 b) : Montrer que la réciproque est fausse en construisant un exemple où les champs de vecteurs X_1, X_2 ne commutent pas mais où les champs de vecteurs Y_1, Y_2 sont nuls.

1.4 Dans un groupe topologique connexe, un voisinage de l'identité engendre toujours tout le groupe (cf. TD 3).

1.5 : Considérer le groupe des matrices réelles 2×2 de déterminant positif $G = GL_2^+(\mathbb{R})$ et montrer que la matrice $A := \begin{pmatrix} -1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de exp.

Exercice 2 :

2.2 : On peut supposer t fixé. Il s'agit de dériver par rapport à s une fonction de la forme $f(s, u(s))$ où $f(s, x) = \varphi_s^Y(x)$ et $u(s) = \varphi_t^X \circ \varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x)$. On applique donc la formule de dérivation des fonctions de plusieurs variables :

$$\frac{\partial f(s, u(s))}{\partial s}_{|s=s_0} = \frac{\partial f(s, u(s_0))}{\partial s}_{|s=s_0} + df(s_0, .)(\frac{\partial u(s)}{\partial s}_{|s=s_0})$$

2.3 : Observer d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(s, 0) = Y(\varphi_s^Y \circ \varphi_{-s}^Y(x)) + d(\varphi_s^Y)_{\varphi_{-s}^Y(x)}[-Y(\varphi_{-s}^Y(x))] = Y(x) - (\varphi_s^Y)_* Y(x)$$

puis dériver par rapport à s pour obtenir $\dfrac{\partial^2}{\partial^2 s}\psi_x(0, 0) = 0$. Raisonner de façon analogue avec les autres cas.

Exercice 3 :

3.1.a) : Théorème d'inversion local.

3.1.b) : Pour $y = F(x)$, on a $(F_\star \frac{\partial}{\partial x_i})(y) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$. Utiliser que les flots $\varphi_1^X, \ldots, \varphi_k^X$ commuttent deux à deux pour placer φ_i^X en tête dans l'expression définissant F. Dériver ensuite par rapport à la variable x_i et montrer que l'obtient $X_i(y)$.

3.2 : Utiliser une carte pour se ramener à la situation précédente.

Exercice 4 :

4.1 : On peut par exemple se donner une base locale du champ de droites et montrer qu'une portion de trajectoire du flot est un plongement (cf. exercice 1, question 1.1).

4.4 : Pour la deuxième partie, raisonner par continuité.

4.6 : remplacer $\widetilde{X}_j$ par son expression en termes de $a_{i,j}$ dans la formule définissant $\widetilde{Y}_i$.

4.7 : Remarquer que pour $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, le crochet $[\frac{\partial}{\partial x_i}, f\frac{\partial}{\partial x_j}] = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ est dirigé suivant $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Exercice 4 :

4.2 : Se ramener à une EDO en redressant X en un champ de vecteur constant.

4.3 : Choisir X et Y générant un 2-plan non-intégrable et utiliser l'exercice précédent.

Exercice 5 :

Soit $d = \mathbb{R}v$ une droite de $\mathbb{R}^{n+1}$. Réaliser d comme l'orthogonal de l'espace tangent en un point de M en considérant l'application $M \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, v\rangle$.