Géométrie Différentielle, TD 7 du 19 mars 2020

1. Exercices

NB : Des indications sont proposées plus bas.

1. Questions-diverses

1– Soit $f : M \to N$ une immersion entre deux variétés. Montrer que pour tout $x \in M$, il existe $U \subseteq M$ ouvert contenant x tel que $f_{|U}$ est un plongement.

2– Soit $f : M \to N$ une application lisse et surjective, $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TN)$ des champs de vecteurs tels que $f_\star X_i = Y_i$ au sens où pour tout $x \in M$, on a $Tf \circ X_i = Y_i \circ f$.
Si $[X_1, X_2] = 0$, a t'on $[Y_1, Y_2] = 0$?
A t'on la réciproque ?

Soit G un groupe de Lie connexe.

3– Montrer que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ est un difféomorphisme local en 0.

4– En déduire que le groupe engendré par $\exp(\mathfrak{g})$ est G.

5– Donner un exemple où $\exp : \mathfrak{g} \to G$ n'est pas surjective.

2. Commutation des champs de vecteurs

Nous allons montrer que le crochet de deux champs de vecteurs mesure le défaut de commutation de leurs flots à l'ordre 2. Soit X, Y des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ de flots respectifs φ^X et φ^Y. On fixe $x \in \mathbb{R}^n$ et on considère l'application $\psi_x : \mathbb{R}^2 \to M$ définie au voisinage de 0 par :

$$\psi_x(s,t) = \varphi^Y_s \circ \varphi^X_t \circ \varphi^Y_{-s} \circ \varphi^X_{-t}(x).$$

1– Vérifier que $\psi_x(0) = 0$, $d_0\psi_x = 0$.

2– Montrer que pour $s, t \in \mathbb{R}$ proches de 0, on a,

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(s,t) = Y(\varphi^Y_s \circ \varphi^X_t \circ \varphi^Y_{-s} \circ \varphi^X_{-t}(x)) + d(\varphi^Y_s \circ \varphi^X_t)_{\varphi^Y_{-s}\circ\varphi^X_{-t}(x)}[-Y(\varphi^Y_{-s} \circ \varphi^X_{-t}(x))]$$

3– Montrer que $\dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\psi_x(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_x(0,0) = 0$, et $\dfrac{\partial^2}{\partial t \partial s}\psi_x(0,0) = [X,Y](x)$.

3. Redressement simultané de champs de vecteurs qui commutent

Soit M une variété et $X_1, \dots, X_k$ des champs de vecteurs sur M. On suppose qu'au voisinage d'un point $x_0 \in M$, la famille $(X_1(x), \dots, X_k(x))$ est libre et $[X_i, X_j](x) = 0$ pour $i \neq j$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe alors un difféomorphisme ψ d'un voisinage U de x_0 vers un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ qui redresse simultanément ces champs de vecteurs, autrement dit tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \psi_* X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

1– Supposons dans un premier temps que la variété ambiante M est $\mathbb{R}^n$, que le point base x_0 est 0 et que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ que $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Soit F l'application définie au voisinage de 0 par la formule

$$F(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}^{X_1} \circ \varphi_{x_2}^{X_2} \circ \cdots \circ \varphi_{x_k}^{X_k}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

a) Montrer F est un difféomorphisme local en 0.

b) Pour $i = 1, \dots, k$, calculer le poussé en avant $F_\star \frac{\partial}{\partial x_i}$.

2– Conclure dans le cas général.

4. Théorème de Frobénius

Soit M une variété. Une *distribution p-plans* sur M la donnée pour tout $x \in M$ d'un sous-espace vectoriel $E(x) \subseteq T_x M$ de dimension p, telle que la famille $E = (E(x))_{x \in M}$ est lisse au sens où pour tout $x \in M$, il existe $U \subseteq M$ voisinage ouvert de x, et des champs de vecteurs $X_1, \dots, X_p$ définis sur U tels que $(X_1(y), \dots, X_p(y))$ est une base de $E(y)$ pour tout $y \in U$.

Une distribution E est dite *intégrable* si pour tout $x \in M$, il existe une sous-variété N de M contenant x tel que $\forall y \in N, T_y N = E(y)$. Cela signifie que la distribution E s'écrit localement comme le fibré tangent d'une sous variété.

1– Montrer qu'une distribution de 1-plans (i.e. un champ de droites) sur M est toujours intégrable.

Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Frobénius :

Théorème. Soit E une distribution de p-plans sur M. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) E est intégrable

ii) E est stable par crochet : Pour tous $X, Y \in \Gamma(TM)$ à valeurs dans E, on a $[X, Y]$ à valeurs dans E

iii) E a des bases locales commutatives : Pour tout $x_0 \in M$, il existe une base locale $(Y_1, \dots, Y_p)$ de E au voisinage de x_0 dont les crochets sont nuls : $\forall i, j \in \{1, \dots, p\}$, $[Y_i, Y_j] = 0$

2– Montrer que i) implique ii).

3– Montrer que iii) implique i). [on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2]

On suppose désormais ii) et on cherche à prouver iii). On fixe $x_0 \in M$, (U, φ) un carte en x_0 telle que $\varphi(x_0) = 0$. Quitte à choisir U plus petit, on peut supposer qu'il existe $(X_1, \dots, X_p)$ une base de $E_{|U}$. On note $\widetilde{X}_i : \varphi(U) \to \mathbb{R}^n$ le champ de vecteurs X_i lu dans la carte (U, φ). On écrit $\widetilde{X}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$ où les coefficients $a_{i,j} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ sont C^∞.

4– Montrer qu'on peut choisir $(U,\ \varphi)$ telle que pour tout $i = 1, \dots, p$, $\widetilde{X}_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}$, puis telle que la matrice $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ est inversible en tout point de $\varphi(U)$.

On note $(b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$ l'inverse de $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$, puis pour $i = 1, \dots, p$, $\widetilde{Y}_i := \sum_{j=1}^p b_{i,j} \widetilde{X}_j$, et $Y_i := \varphi^\star(\widetilde{Y}_i) \in \Gamma(TU)$.

5– Montrer que $(Y_1, \dots, Y_p)$ est une base de $E_{|U}$ et que $[Y_i, Y_j] = 0$ si et seulement si $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j] = 0$.

6– Montrer que $\widetilde{Y}_i$ est de la forme $\widetilde{Y}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^n c_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$

7– En déduire que $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j]$ est de la forme $[\widetilde{Y}_i, \widetilde{Y}_j] = \sum_{k=p+1}^n e_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ puis montrer que les $e_{i,j,k}$ sont nuls en utilisant l'hypothèse ii).

5. Deux champs de vecteurs

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur une variété M de dimension 2. Soit $x \in M$ tel que $X(x)$ et $Y(x)$ soient linéairement indépendants. On va montrer qu'il existe f, g des fonctions C^∞ strictement positives définies au voisinage de x telles que $[fX, gY] = 0$.

1– En écrivant $[X, Y] = aX + bY$, montrer que l'équation $[fX, gY] = 0$ se traduit par les équations découplées $Y.f - af = 0$ et $X.g + bg = 0$.

2– Conclure.

3– Ce résultat local est-il encore valable si M est de dimension supérieure à 3 ?

6. Une hypersurface compacte voit tout

Soit M une hypersurface compacte C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $f : M \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x \mapsto T_x M^\perp$. Montrer que f est une application C^∞ surjective.

2. Indications

Exercice 1 :

1.2 a) : Montrer que $[Y_1, Y_2] = 0$ en vérifiant que les flots associés aux champs de vecteurs Y_1, Y_2 commutent localement. Cela découle du fait que les flots associés aux champs de vecteurs X_1, X_2 commutent localement et de la relation $f_\star X_i = Y_i$

1.2 b) : Montrer que la réciproque est fausse en construisant un exemple où les champs de vecteurs X_1, X_2 ne commutent pas mais où les champs de vecteurs Y_1, Y_2 sont nuls.

1.4 Dans un groupe topologique connexe, un voisinage de l'identité engendre toujours tout le groupe (cf. TD 3).

1.5 : Considérer le groupe des matrices réelles 2×2 de déterminant positif $G = GL_2^+(\mathbb{R})$ et montrer que la matrice $A := \begin{pmatrix} -1 & \\ & -2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'image de exp.

Exercice 2 :

2.2 : On peut supposer t fixé. Il s'agit de dériver par rapport à s une fonction de la forme $f(s, u(s))$ où $f(s, x) = \varphi_s^Y(x)$ et $u(s) = \varphi_t^X \circ \varphi_{-s}^Y \circ \varphi_{-t}^X(x)$. On applique donc la formule de dérivation des fonctions de plusieurs variables :

$$\frac{\partial f(s, u(s))}{\partial s}_{|s=s_0} = \frac{\partial f(s, u(s_0))}{\partial s}_{|s=s_0} + df(s_0, .)(\frac{\partial u(s)}{\partial s}_{|s=s_0})$$

2.3 : Observer d'abord que

$$\frac{\partial}{\partial s}\psi_x(s, 0) = Y(\varphi_s^Y \circ \varphi_{-s}^Y(x)) + d(\varphi_s^Y)_{\varphi_{-s}^Y(x)}[-Y(\varphi_{-s}^Y(x))] = Y(x) - (\varphi_s^Y)_* Y(x)$$

puis dériver par rapport à s pour obtenir $\dfrac{\partial^2}{\partial^2 s}\psi_x(0, 0) = 0$. Raisonner de façon analogue avec les autres cas.

Exercice 3 :

3.1.a) : Théorème d'inversion local.

3.1.b) : Pour $y = F(x)$, on a $(F_\star \frac{\partial}{\partial x_i})(y) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$. Utiliser que les flots $\varphi_1^X, \ldots, \varphi_k^X$ commuttent deux à deux pour placer φ_i^X en tête dans l'expression définissant F. Dériver ensuite par rapport à la variable x_i et montrer que l'obtient $X_i(y)$.

3.2 : Utiliser une carte pour se ramener à la situation précédente.

Exercice 4 :

4.1 : On peut par exemple se donner une base locale du champ de droites et montrer qu'une portion de trajectoire du flot est un plongement (cf. exercice 1, question 1.1).

4.4 : Pour la deuxième partie, raisonner par continuité.

4.6 : remplacer $\widetilde{X}_j$ par son expression en termes de $a_{i,j}$ dans la formule définissant $\widetilde{Y}_i$.

4.7 : Remarquer que pour $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, le crochet $[\frac{\partial}{\partial x_i}, f\frac{\partial}{\partial x_j}] = \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ est dirigé suivant $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Exercice 5 :

4.2 : Se ramener à une EDO en redressant X en un champ de vecteur constant.

4.3 : Choisir X et Y générant un 2-plan non-intégrable et utiliser l'exercice précédent.

Exercice 6 :

Soit $d = \mathbb{R}v$ une droite de $\mathbb{R}^{n+1}$. Réaliser d comme l'orthogonal de l'espace tangent en un point de M en considérant l'application $M \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, v\rangle$.