

Géométrie Différentielle, TD 8 du 26 mars 2020

1. EXERCICES

NB : Des indications sont proposées plus bas

1. Questions diverses

Formes alternées : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

- 1– Soit $l_1, \dots, l_k \in E^*$ des formes linéaires sur E . Justifier pourquoi l'identification $\Lambda^k E^* \equiv \text{Alt}^k(E, \mathbb{R})$ vue en cours fait correspondre le produit extérieur $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ avec la forme k -linéaire alternée $E^k \rightarrow \mathbb{R}, (v_1, \dots, v_k) \mapsto \det(l_i(v_j))_{i,j}$.

Dans la suite, cette identification est implicite.

- 2– Soient $\alpha \in \Lambda^k E^*$ et $\beta \in \Lambda^l E^*$. Montrer que le produit extérieur $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l} E^*$ est donné par la formule :

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

Formes différentielles : Soit M une variété.

- 1– Donnons nous pour tout $x \in M$ une forme k -linéaire alternée $\omega_x \in \Lambda^k(T_x M)^*$ et posons $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(T^*M), x \mapsto \omega_x$. Montrer que ω est une k -forme différentielle si et seulement si pour tous champs de vecteurs $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(TM)$, la fonction $\omega(X_1, \dots, X_k) : M \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ .
- 2– Soit N une variété, $f : M \rightarrow N$ une application C^∞ . Montrer que pour α, β formes différentielles sur N , on a $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$.
- Si de plus, L est une variété, $g : L \rightarrow M$ une application C^∞ , pourquoi n'a-t-on pas $(f \circ g)^*\alpha = f^*(g^*\alpha)$? Corriger la formule.

Solution :

- 1– Rappelons comment est faite l'identification. On considère la forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^k E^* \times \Lambda^k E \rightarrow \mathbb{R}$ caractérisée par la propriété que $\langle l_1 \wedge \dots \wedge l_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k \rangle = \det(l_i(v_j))_{1 \leq i,j \leq k}$. Elle identifie $\Lambda^k E^* \equiv (\Lambda^k E)^*$ via $a \mapsto \langle a, \cdot \rangle$. Notons $p : E^k \rightarrow \Lambda^k E, (v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k$. On a une identification entre $(\Lambda^k E)^*$ et $\text{Alt}^k(E, \mathbb{R})$ donnée par $f \mapsto f \circ p$. Finalement, en composant ces identifications, on obtient que $l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ s'identifie à $\langle l_1 \wedge \dots \wedge l_k, \cdot \rangle \circ p$, ce qui est le résultat voulu.

- 2– Quitte à décomposer dans une base les formes α et β , on peut supposer que $\alpha = l_1 \wedge \dots \wedge l_k$ et $\beta = m_1 \wedge \dots \wedge m_l$. On calcule que $\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \det(l_i(v_{\sigma(j)}))_{i,j} = \sum_{\rho \in S_k} \varepsilon(\rho) l_1(v_{\sigma \circ \rho(1)}) \dots l_k(v_{\sigma \circ \rho(k)})$.

De même $\beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) = \sum_{\tau \in S_l} \varepsilon(\tau) m_1(v_{\sigma(k+\tau(1))}) \dots m_l(v_{\sigma(k+\tau(l))})$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \sum_{\rho \in S_k} \varepsilon(\rho) l_1(v_{\sigma \circ \rho(1)}) \dots l_k(v_{\sigma \circ \rho(k)}) \sum_{\tau \in S_l} \varepsilon(\tau) m_1(v_{\sigma(k+\tau(1))}) \dots m_l(v_{\sigma(k+\tau(l))}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \sum_{(\rho, \tau) \in S_k \times S_l} \varepsilon(\sigma \circ j(\rho, \tau)) l_1(v_{\sigma \circ j(\rho, \tau)(1)}) \dots l_k(v_{\sigma \circ j(\rho, \tau)(k)}) m_1(v_{\sigma \circ j(\rho, \tau)(k+1)}) \dots m_l(v_{\sigma \circ j(\rho, \tau)(k+l)}) \end{aligned}$$

où $j : S_k \times S_l \rightarrow S_{k+l}$ est le morphisme de groupes injectif naturel.

On inverse les sommes, et le terme général est indépendant de (ρ, τ) . De plus, on reconnaît l'expression du déterminant calculé par $l_1 \wedge \dots \wedge l_k \wedge m_1 \wedge \dots \wedge m_l$. D'où la formule.

- 1– Il s'agit de montrer le sens réciproque. On suppose donc ω lisse au sens où l'évaluation en k champs de vecteurs C^∞ quelconques est automatiquement lisse. On veut montrer que $M \rightarrow \Lambda^k T^*M, x \mapsto \omega_x$ est lisse. Soit (U, φ) une carte de M . Elle identifie TU à $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$, puis $\Lambda^k T^*M|_U = \Lambda^k T^*U$ à $\varphi(U) \times \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. ω restreint à U s'identifie alors à une application $\tilde{\omega} : \varphi(U) \rightarrow \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que pour tout $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ champs de vecteurs sur $\varphi(U)$, on a $\tilde{\omega}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k)$ de classe C^∞ . En considérant les différents k -uplets formés à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on obtient que $\tilde{\omega}$ est C^∞ puis que ω aussi.
- 2– On peut par exemple utiliser la question 2 du cas vectoriel. Soit $x \in M, v_1, \dots, v_{k+l} \in T_x M$. On a :

$$\begin{aligned} f^*(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) &:= \alpha \wedge \beta(Tf(v_1), \dots, Tf(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(Tf(v_{\sigma(1)}), \dots, Tf(v_{\sigma(k)})) \beta(Tf(v_{\sigma(k+1)}), \dots, Tf(v_{\sigma(k+l)})) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) f^* \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) f^* \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= f^* \alpha \wedge f^* \beta(v_1, \dots, v_{k+l}) \end{aligned}$$

L'objet $f^*(g^* \alpha)$ n'a pas de sens car g n'est pas à valeurs dans N donc $g^* \alpha$ n'est pas défini. La formule correcte est $(f \circ g)^* \alpha = g^*(f^* \alpha)$ (il y a "contravariance"). La preuve est la suivante : $g^*(f^* \alpha) = f^* \alpha(Tg(\cdot), \dots, Tg(\cdot)) = \alpha(TfTg(\cdot), \dots, TfTg(\cdot)) = \alpha(T(f \circ g), \dots, T(f \circ g)) = (f \circ g)^* \alpha$.

2. Formes différentielles $SL(n, \mathbb{R})$ -invariantes

Soit ω la forme différentielle de degré $n - 1$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par :

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

- 1– Montrer que $\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$.
- 2– Soit $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^*\omega$?
- 3– Montrer que ω est, à constante multiplicative près, la seule forme de degré $n - 1$ invariante par $SL(n, \mathbb{R})$.
- 4– Montrer en revanche que, si $n \geq 3$, toute forme différentielle de degré 1 invariante par $SL(n, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ est nulle.

Solution :

- 1– C'est le développement du déterminant par rapport à la première colonne.
- 2– On calcule :

$$\begin{aligned} (A^*\omega)(x).(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) &= \omega(Ax).(A\xi_1, \dots, A\xi_{n-1}) = \det(Ax, A\xi_1, \dots, A\xi_{n-1}) \\ &= \det(A) \det(x, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \det(A) \omega(x).(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \end{aligned}$$

i.e. $A^*\omega = \det(A)\omega$.

Dans la suite, on note $G := \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \cap SL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $SL_n(\mathbb{R})$ qui fixent le vecteur $e_1 := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

- 3– La question précédente montre que ω est invariante sous $SL(n, \mathbb{R})$. Comme $SL_n(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, la forme $(n - 1)$ -alternée ω_{e_1} sur $\mathbb{R}^n$ détermine uniquement la forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, puis sur tout $\mathbb{R}^n$ par continuité. Il reste à vérifier que ω_{e_1} est uniquement déterminée, à une constante multiplicative près en utilisant le fait qu'elle est G -invariante. On peut pour cela l'écrire en coordonnées : $\omega_{e_1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ où $a_i \in \mathbb{R}$. Montrons que les $(a_i)_{i \geq 2}$ sont nuls. Par G -invariance, on a pour $i \geq 1$, $a_i = \omega_{e_1}(e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_{n-1}) = \omega_{e_1}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + e_{i+1}, e_{i+2}, \dots, e_{n-1}) = a_i + a_{i+1}$, donc $a_{i+1} = 0$ d'où le résultat.
- 4– Soit $\omega \in \Gamma(T^*\mathbb{R}^n)$ une 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ invariante sous $SL_n(\mathbb{R})$. De même que dans la question précédente, il suffit de vérifier que son évaluation en e_1 est nulle. Notons $H \subseteq \mathbb{R}^n$ le noyau de ω_{e_1} . Comme $n \geq 3$, on a $\dim H \geq 2$, donc il existe $v \in H$ de la forme $\sum_{i \geq 1} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour un $i \geq 2$. Comme H est G invariant, et que $SL_{n-1}(\mathbb{R})$ agit transitivement sur $\mathbb{R}^{n-1}$, on a que $H \supseteq \lambda_1 e_1 \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ puis en soustrayant : $H \supseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. La transformation $f \in G$ donnée par $f(e_2) = e_1 + e_2$ et $f(e_i) = e_i$ si $i \neq 2$ stabilise H donc H contient $e_1 + e_2$ puis e_1 puis $H = \mathbb{R}^n$. Ainsi $\omega_{e_1} = 0$.

3. Formes différentielles sur un quotient

Soit X une variété C^∞ et G un groupe de Lie agissant de façon libre et propre sur X . On note $p : X \rightarrow G \backslash X$ l'application quotient.

- 1– Soit $k \geq 0$. Montrer que $p^* : \Omega^k(G \backslash X) \rightarrow \Omega^k(X)$ est injective.
- 2– Dans le cas où G est discret, montrer que l'image de $p^* : \Omega^k(G \backslash X) \rightarrow \Omega^k(X)$ est l'ensemble $\Omega^k(X)^G$ des formes G -invariantes.
- 3– Identifier l'image de p^* dans le cas général.

Solution :

- 1– Comme p^* est linéaire, il suffit de vérifier que son noyau est trivial.
Soit $\omega \in \Omega^k(G \backslash X)$ telle que $p^*\omega = 0$. Soit $y \in G \backslash X$ et soit x un antécédent de y par p . Comme p est une submersion, $d_x p$ est surjective et envoie donc $T_x X$ sur $T_y G \backslash X$. On a alors $\omega_y(T_y G \backslash X) = (p^*\omega)_x(T_x X) = \{0\}$ et donc $\omega_y = 0$. On a bien $\omega = 0$.
- 2– Soit $g \in G$. Comme $p \circ g = p$, $g^*p^*\omega = p^*\omega$, de sorte que $p^*\omega$ est G -invariante. Réciproquement, soit ω une forme G -invariante sur X . Soit $y \in G \backslash X$. On choisit x un antécédent de y , et on pose $\alpha_y = ((d_x p)^{-1})^*\omega_x$. Comme ω est G -invariante, α_y ne dépend pas du choix de x .
Pour montrer que α est C^∞ , on choisit des voisinages U et V de x et de y tels que p réalise un difféomorphisme entre U et V . Alors $\alpha|_V = ((p|_U)^{-1})^*\omega|_U$, ce qui montre que $\alpha|_V$ est C^∞ , comme voulu.
Finalement, par construction, on a bien $\omega = p^*\alpha$.
- 3– Dans le cas général, la projection $p : X \rightarrow G \backslash X$ est toujours une submersion. Remarquons qu'une forme ω dans l'image est encore G -invariante. De plus, si Y_x est dans le noyau de $d_x p$ (de façon équivalente, si Y_x est tangent à l'orbite de G passant par x), on a nécessairement $\iota_{Y_x}\omega_x = 0$. On va montrer que ces conditions nécessaires sont suffisantes. Soit donc ω une forme de degré k sur X , G -invariante et telle que $\iota_{Y_x}\omega_x = 0$ dès que Y_x appartient au noyau de $d_x p$. Soient $Z_1, \dots, Z_k$ des vecteurs dans $T_z(X/G)$. On considère un point x tel que $p(x) = z$ et des vecteurs $Y_1, \dots, Y_k$ tels que $d_x p(Y_i) = Z_i$ (on rappelle que p est une submersion). On définit alors

$$\alpha_z(Z_1, \dots, Z_k) := \omega_x(Y_1, \dots, Y_k).$$

D'autres choix pour les Y_i diffèrent des Y_i par des vecteurs dans le noyau de $d_x p$. En appliquant de proche en proche l'hypothèse faite sur ω , on en déduit que l'expression ne dépend pas des Y_i choisis. De plus, elle ne dépend pas non plus de x , comme précédemment, par G -invariance. Finalement, si s est une section locale de p , on a défini α comme $s^*\omega$. Ceci montre que α ainsi définie est lisse ; par construction, elle vérifie $p^*\alpha = \omega$.

4. Formes homogènes

Une forme différentielle α sur $\mathbb{R}^n$ est dite *homogène de degré d* si pour tout $t > 0$, $h_t^* \alpha = t^d \alpha$, où on désigne par h_t l'homothétie de rapport t .

Montrer qu'une k -forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ est homogène de degré d si et seulement si ses coefficients sont homogènes de degré $d - k$.

Solution :

- 1– Soit α une k -forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$. On l'écrit en coordonnées $\alpha = \sum_I a_I de_I$ où $a_I \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et I décrit les sous ensembles de $\{1, \dots, n\}$ de cardinal k . Alors $h_t^* \alpha = \sum_I (a_I \circ h_t) h_t^* de_I = t^k \sum_I (a_I \circ h_t) de_I$. On a donc $h_t^* \alpha = t^d \alpha$ si et seulement si $t^k a_I \circ h_t = t^d a_I$ i.e. $a_I \circ h_t = t^{d-k} a_I$ pour tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ tel $|I| = k$, ce qui est le résultat cherché.

- 2– Soit $t > 0$, α une forme différentielle homogène de degré d . Alors

$$h_t^*(d\alpha) = d(h_t^* \alpha) = d(t^d \alpha) = t^d d\alpha$$

donc $d\alpha$ est homogène de degré d .

5. Coordonnées de Plücker

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $e_1, \dots, e_n$ une base de E^* . Pour chaque m -uplet $I = (i_1, \dots, i_m)$ avec $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, posons $e_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$. Si W est un sous-espace de E^* de dimension m et $x_1, \dots, x_m$ une base de W , la m -forme linéaire alternée $x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ s'écrit $\sum a_I e_I$ pour certains coefficients a_I .

- 1– Montrer que, à une constante multiplicative près, les coefficients $(a_I)_I$ ne dépendent pas du choix de la base de W et définissent une application *injective* de l'ensemble $\{W \subset E^* \mid \dim W = m\}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$, où $N = \binom{n}{m} - 1$.

Les coefficients a_I s'appellent les coordonnées de Plücker de W .

- 2– Montrer que les coordonnées de Plücker déterminent un plongement de la grassmannienne $\mathcal{G}_m(E^*)$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$.
- 3– Montrer qu'une forme bilinéaire alternée ω sur $\mathbb{R}^4$ s'écrit sous la forme $x_1 \wedge x_2$ avec x_1, x_2 deux formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^4$, si et seulement si $\omega \neq 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$.
- 4– En paramétrant l'image de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ par le plongement de Plücker, montrer que $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ est difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. On pourra poser $x_1 = a_{12} + a_{34}$, $x_2 = a_{23} + a_{14}$, $x_3 = a_{31} + a_{24}$, $y_1 = a_{12} - a_{34}$, $y_2 = a_{23} - a_{14}$, $y_3 = a_{31} - a_{24}$.

Solution :

- 1– Si $y_1, \dots, y_m$ est une autre base de W , il existe une matrice $A \in GL(W)$ envoyant x_i sur y_i . Alors $y_1 \wedge \dots \wedge y_m = (\det A) x_1 \wedge \dots \wedge x_m$.

Ainsi, l'application $W \mapsto [x_1 \wedge \dots \wedge x_m]$ est bien définie. Pour montrer qu'elle est injective, il faut voir que, si $x_1 \wedge \dots \wedge x_m = \alpha y_1 \wedge \dots \wedge y_m$, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_m) =$

$\text{Vect}(y_1, \dots, y_m)$. On complète $x_1, \dots, x_m$ en une base $x_1, \dots, x_n$. On peut écrire $y_i = \sum a_{ij}x_j$. Alors

$$y_i \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \sum_{j=k+1}^n a_{ij}x_j \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k.$$

Mais $y_i \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \alpha y_i \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_k = 0$. Par conséquent, $a_{ij} = 0$ pour $j > k$. Ainsi, $y_i \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, ce qui conclut.

- 2– Soit P l'application de Plücker. Montrons que c'est un plongement. C'est une application clairement injective, et propre car $\mathcal{G}_m(E^*)$ est compact. Il suffit donc de montrer que c'est une immersion en tout point. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaire à la source et au but, il suffit de travailler au voisinage de $W = \text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ (avec $P(W) = [1 : 0 : \dots : 0]$).

Nous exhibons d'abord des coordonnées pour $\mathcal{G}_m(E^*)$ au voisinage de W . La structure de variété sur $\mathcal{G}_m(E^*)$ est définie en identifiant $\mathcal{G}_m(E^*)$ au quotient de $GL(E^*)$ par le stabilisateur de W . Dans la suite nous identifions par commodité E^* à $\mathbb{R}^n$ au moyen de la base $e_1, \dots, e_n$.

On définit une application

$$\varphi : \mathcal{M}_{n-m,m} \rightarrow \mathcal{G}_m(E^*), \quad A = (a_{i,j}) \mapsto \text{Vect}(e_1 + \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,1}e_{m+i}, \dots, e_m + \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,m}e_{m+i})$$

Autrement dit, $\varphi(A)$ est l'image de W sous l'action de la matrice $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ A & I_{n-m} \end{pmatrix}$. Vérifions que qu'au voisinage de 0, l'application φ définit une paramétrisation locale de la Grassmannienne $\mathcal{G}_m(E^*)$ au voisinage de W . Le noyau de la différentielle de la projection quotient de $GL(E^*)$ dans $\mathcal{G}_m(E^*)$ est le sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ donné par $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & M_{n-m}(\mathbb{R}) \end{pmatrix}$. Il intersecte trivialement l'espace vectoriel $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_{n-m,m}(\mathbb{R}) & 0 \end{pmatrix}$. L'application φ est donc une immersion en 0, puis un plongement au voisinage de 0 (car une immersion est toujours un plongement local).

On peut écrire

$$P \circ \varphi(A) = e_1 \wedge \dots \wedge e_m + \sum_{I \neq \{1, \dots, m\}} a_I(A) e_I,$$

où les fonctions a_I sont polynômiales en A (et donc $\mathcal{C}^\infty$). Dans la carte φ et la carte de l'espace projectif normalisant la coordonnée en $e_1 \wedge \dots \wedge e_m$, l'application P est donnée par $Q : A \mapsto (a_I(A))_{I \neq \{1, \dots, m\}}$. Elle est donc polynomiale.

Calculons la dérivée de Q en 0. On a

$$(e_1 + \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,1}e_{m+i}) \wedge \dots \wedge (e_m + \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,m}e_{m+i}) = e_1 \wedge \dots \wedge e_m + \sum_{j=1}^m (e_1 \wedge \dots \wedge \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,j}e_{m+i} \wedge \dots \wedge e_m) + O(\|A\|^2).$$

Ainsi, $dQ_0(A) = ((-1)^{m-i} a_{ij} e_{\{1, \dots, \widehat{i}, \dots, m, m+i\}})$. Cette différentielle est injective, ce qui conclut la preuve.

- 3– Si $\omega = x_1 \wedge x_2$ avec (x_1, x_2) libre, alors ω est non nulle et $\omega \wedge \omega = 0$. Réciproquement, soit ω telle que $\omega \neq 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$.

Le théorème de réduction des formes bilinéaires antisymétriques assure qu'une forme bilinéaire alternée peut s'écrire dans une certaine base avec une matrice de 0 et des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. S'il n'y avait aucun bloc diagonal, on aurait $\omega = 0$, ce qui est absurde. S'il y a exactement un bloc diagonal, alors $\omega = x_1 \wedge x_2$ et on a gagné. Enfin, s'il y a deux blocs diagonaux, alors $\omega = x_1 \wedge x_2 + x_3 \wedge x_4$ où (x_1, x_2, x_3, x_4) forme une base de E^* . On obtient $\omega \wedge \omega = 2x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \neq 0$, ce qui est encore absurde.

- 4– Une 2-forme non nulle

$$\omega = a_{12}e_1 \wedge e_2 + a_{31}e_3 \wedge e_1 + a_{14}e_1 \wedge e_4 + a_{23}e_2 \wedge e_3 + a_{24}e_2 \wedge e_4 + a_{34}e_3 \wedge e_4$$

est dans l'image du plongement de Plücker si et seulement si $\omega \wedge \omega = 0$, d'après la question précédente. Mais

$$\omega \wedge \omega = 2(a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24} + a_{14}a_{23})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4.$$

Ainsi, l'image de P est donnée par la surface d'équation $a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$.

Dans les coordonnées indiquées dans l'énoncé, cette équation devient $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Ainsi, $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ est diffeomorphe à l'ensemble

$$E = \{[x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{R}) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\}.$$

Cet ensemble est le quotient de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ par l'action diagonale de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ via (l'application $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \mapsto [x_1 : x_2 : x_3 : y_1 : y_2 : y_3]$ passe au quotient et donne un diffeomorphisme).

2. INDICATIONS

Exercice 1 :

Formes alternées :

1 : Détailler les identifications $\Lambda^k E^* \equiv (\Lambda^k E)^*$ et $(\Lambda^k E)^* \equiv \text{Alt}^k(E, \mathbb{R})$.

2 : Quitte à décomposer dans une base les formes α et β , on peut supposer que

$$\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k, \quad \beta = m_1 \wedge \cdots \wedge m_l$$

où les $l_i, m_j \in E^*$. Utiliser alors la première question pour développer le membre de droite de l'égalité à prouver, et obtenir finalement le membre de gauche.

Formes différentielles :

1 : On se donne une carte de M . Elle induit une trivialisation locale du fibré des formes k -linéaires alternées. Il s'agit alors de montrer que l'application $x \mapsto \omega_x$ lue dans cette trivialisation est C^∞ . On se ramène ainsi à montrer qu'une application $\tilde{\omega} : \mathbb{R}^n \mapsto \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est C^∞ si et seulement si pour tout n -uplet $X_1, \dots, X_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'applications C^∞ , on a $\tilde{\omega} \circ (X_1, \dots, X_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui est C^∞ .

2 : Utiliser la question 2 de la première partie de l'exercice pour montrer que le produit extérieur commute au tiré en arrière.

La formule correcte est $(f \circ g)^* \alpha = g^*(f^* \alpha)$. Celle proposée n'a pas de sens.

Exercice 2 :

2.2 : Il faut montrer que $A^* \omega = (\det A) \cdot \omega$

2.3 : Une forme différentielle ω' sur $\mathbb{R}^n$ invariante par $SL_n(\mathbb{R})$ est déterminée par son évaluation ω'_{e_1} en l'élément $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$. De plus cette évaluation est invariante par

le stabilisateur de e_1 dans $SL_n(\mathbb{R})$ à savoir $G := \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \cap SL_n(\mathbb{R})$

2.4 : Comme dans 2.3, il suffit de montrer que $\omega_{e_1} = 0$. Soit $H \subseteq \mathbb{R}^n$ le noyau de ω_{e_1} . Utiliser que $\dim H \geq 2$ et que H est G -invariant pour conclure que $H = \mathbb{R}^n$.

Exercice 3 :

3.2 : Pour montrer la G invariance d'un relevé, utiliser par exemple la formule $(p \circ g)^* \alpha = g^*(p^* \alpha)$ démontrée dans l'exercice 1. Pour montrer que toute k -forme G -invariante $\beta \in \Omega^k(X)^G$ est un relevé d'une k -forme sur $G \backslash X$, définir cette dernière en posant pour $y \in G \backslash X$, $x \in p^{-1}y$,

$$\alpha_y = \beta_x((T_x p)^{-1}(\cdot), \dots, (T_x p)^{-1}(\cdot))$$

et vérifier que α convient.

3.3 : Montrer qu'une k -forme β sur X est un relevé d'une k -forme sur $G \backslash X$ si et seulement si β est G -invariante et pour tout point $x \in X$, tout $v \in \text{Ker } T_x p$, l'application

$$(T_x X)^{k-1} \rightarrow T_{p(x)} G \backslash X, (w_2, \dots, w_k) \mapsto \beta(v, w_2, \dots, w_k)$$

est nulle.

Exercice 4 :

Ecrire la forme en coordonnées et utiliser la formule du tiré en arrière.

Exercice 5 :

5.1 : Pour montrer l'injectivité, il faut voir que, si $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = \alpha y_1 \wedge \cdots \wedge y_m$, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_m) = \text{Vect}(y_1, \dots, y_m)$. Compléter $x_1, \dots, x_m$ en une base $x_1, \dots, x_n$ de E^* , décomposer y_i dans cette base et exprimer le fait que $y_i \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = 0$ pour obtenir que $y_i \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_m)$.

5.2 : Soit P l'application de Plücker. Il s'agit de montrer que P est une immersion en tout point. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaire à la source et au but, il suffit de travailler au voisinage de $W = \text{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ (avec $P(W) = [1 : 0 : \dots : 0]$). Exprimer alors P en coordonnées pour calculer sa différentielle en W . On rappelle que $\mathcal{G}_m(E^*)$ est paramétré au voisinage de W par l'application

$$\varphi : \mathcal{M}_{n-m,m} \rightarrow \mathcal{G}_m(E^*), \quad A = (a_{i,j}) \mapsto \text{Vect}\left(e_1 + \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,1} e_{m+i}, \dots, e_m + \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,m} e_{m+i}\right)$$

5.3 : Utiliser le théorème de réduction des formes bilinéaires antisymétriques, assurant qu'une forme bilinéaire alternée peut s'écrire dans une certaine base avec une matrice de 0 et des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.4 : En utilisant la question précédente, montrer d'abord que l'image de P est donnée par l'hypersurface d'équation $a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$ dans $\mathbb{P}^6(\mathbb{R})$

Réaliser alors le changement de variables suggéré dans l'énoncé.