Géométrie Différentielle, TD 8 du 26 mars 2020

1. Exercices

NB : Des indications sont proposées plus bas

1. Questions diverses

Formes alternées : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.

1– Soit $l_1, \ldots, l_k \in E^\star$ des formes linéraires sur E. Justifier pourquoi l'identification $\Lambda^k E^\star \equiv \mathrm{Alt}^k(E, \mathbb{R})$ vue en cours fait correspondre le produit extérieur $l_1 \wedge \cdots \wedge l_k$ avec la forme k-linéaire alternée $E^k \to \mathbb{R}, (v_1, \ldots, v_k) \mapsto \det(l_i(v_j))_{i,j}$.

Dans la suite, cette identification est implicite.

2– Soient $\alpha \in \Lambda^k E^\star$ et $\beta \in \Lambda^l E^\star$. Montrer que le produit extérieur $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{k+l} E^\star$ est donné par la formule :

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \varepsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

Formes différentielles : Soit M une variété.

1– Donnons nous pour tout $x \in M$ une forme k-linéaire alternée $\omega_x \in \Lambda^k (T_x M)^\star$ et posons $\omega : M \to \Lambda^k(T^\star M)$, $x \mapsto \omega_x$. Montrer que ω est une k-forme différentielle si et seulement si pour tous champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_k \in \Gamma(TM)$, la fonction $\omega(X_1, \ldots, X_k) : M \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞.

2– Soit N une variété, $f : M \to N$ une application C^∞. Montrer que pour α, β formes différentielles sur N, on a $f^\star(\alpha \wedge \beta) = f^\star \alpha \wedge f^\star \beta$.

Si de plus, L est une variété, $g : L \to M$ une application C^∞, pourquoi n'a t on pas $(f \circ g)^\star \alpha = f^\star(g^\star \alpha)$? Corriger la formule.

2. Formes différentielles $\mathsf{SL}(n, \mathbb{R})$-invariantes

Soit ω la forme différentielle de degré $n-1$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

1– Montrer que $\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = \det(x, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$.

2– Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire. Que vaut $A^* \omega$?

3– Montrer que ω est, à constante multiplicative près, la seule forme de degré $n-1$ invariante par $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$.

4– Montrer en revanche que, si $n \geqslant 3$, toute forme différentielle de degré 1 invariante par $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^n$ est nulle.

3. Formes différentielles sur un quotient

Soit X une variété C^∞ et G un groupe de Lie agissant de façon libre et propre sur X. On note $p : X \to G\backslash X$ l'application quotient.

1– Soit $k \geqslant 0$. Montrer que $p^* : \Omega^k(G\backslash X) \to \Omega^k(X)$ est injective.

2– Dans le cas où G est discret, montrer que l'image de $p^* : \Omega^k(G\backslash X) \to \Omega^k(X)$ est l'ensemble $\Omega^k(X)^G$ des formes G-invariantes.

3– Identifier l'image de p^* dans le cas général.

4. Formes homogènes

Une forme différentielle α sur $\mathbb{R}^n$ est dite *homogène de degré d* si pour tout $t > 0$, $h_t^*\alpha = t^d\alpha$, où on désigne par h_t l'homothétie de rapport t.

Montrer qu'une k-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ est homogène de degré d si et seulement si ses coefficients sont homogènes de degré $d-k$.

5. Coordonnées de Plücker

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $e_1, \ldots, e_n$ une base de E^*. Pour chaque m-uplet $I = (i_1, \ldots, i_m)$ avec $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_m \leqslant n$, posons $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$. Si W est un sous-espace de E^* de dimension m et $x_1, \ldots, x_m$ une base de W, la m-forme linéaire alternée $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$ s'écrit $\sum a_I e_I$ pour certains coefficients a_I.

1– Montrer que, à une constante multiplicative près, les coefficients $(a_I)_I$ ne dépendent pas du choix de la base de W et définissent une application *injective* de l'ensemble $\{W \subset E^* \mid \dim W = m\}$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$, où $N = \binom{n}{m} - 1$.

Les coefficients a_I s'appellent les coordonnées de Plücker de W.

2– Montrer que les coordonnées de Plücker déterminent un plongement de la grassmanienne $\mathcal{G}_m(E^*)$ dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$.

3– Montrer qu'une forme bilinéaire alternée ω sur $\mathbb{R}^4$ s'écrit sous la forme $x_1 \wedge x_2$ avec x_1, x_2 deux formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^4$, si et seulement si $\omega \neq 0$ et $\omega\wedge\omega = 0$.

4– En paramétrant l'image de $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ par le plongement de Plücker, montrer que $\mathcal{G}_2(\mathbb{R}^4)$ est difféomorphe au quotient de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. On pourra poser $x_1 = a_{12}+a_{34}$, $x_2 = a_{23}+a_{14}$, $x_3 = a_{31}+a_{24}$, $y_1 = a_{12}-a_{34}$, $y_2 = a_{23} - a_{14}$, $y_3 = a_{31} - a_{24}$.

2. Indications

Exercice 1 :

Formes alternées :

1 : Détailler les identifications $\Lambda^k E^\star \equiv (\Lambda^k E)^\star$ et $(\Lambda^k E)^\star \equiv \mathrm{Alt}^k(E, \mathbb{R})$.

2 : Quitte à décomposer dans une base les formes α et β, on peut supposer que

$$\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_k, \quad \beta = m_1 \wedge \cdots \wedge m_l$$

où les $l_i, m_j \in E^\star$. Utiliser alors la première question pour développer le membre de droite de l'égalité à prouver, et obtenir finalement le membre de gauche.

Formes différentielles :

1 : On se donne une carte de M. Elle induit une trivialisation locale du fibré des formes k-linéaires alternées. Il s'agit alors de montrer que l'application $x \mapsto \omega_x$ lue dans cette trivialisation est C^∞. On se ramène ainsi à montrer qu'une application $\widetilde{\omega} : \mathbb{R}^n \mapsto Alt^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est C^∞ si et seulement si pour tout n-uplet $X_1, \ldots, X_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ d'applications C^∞, on a $\widetilde{\omega} \circ (X_1, \ldots, X_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est C^∞.

2 : Utiliser la question 2 de la première partie de l'exercice pour montrer que le produit extérieur commute au tiré en arrière.

La formule correcte est $(f \circ g)^\star \alpha = g^\star(f^\star \alpha)$. Celle proposée n'a pas de sens.

Exercice 2 :

2.2 : Il faut montrer que $A^\star \omega = (\det A).\omega$

2.3 : Une forme différentielle ω' sur $\mathbb{R}^n$ invariante par $SL_n(\mathbb{R})$ est déterminée par son évaluation ω'_{e_1} en l'élement $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$. De plus cette évaluation est invariante par le stabilisateur de e_1 dans $SL_n(\mathbb{R})$ à savoir $G := \begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \cap SL_n(\mathbb{R})$

2.4 : Comme dans 2.3, il suffit de montrer que $\omega_{e_1} = 0$. Soit $H \subseteq \mathbb{R}^n$ le noyau de ω_{e_1}. Utiliser que $\dim H \geqslant 2$ et que H est G-invariant pour conclure que $H = \mathbb{R}^n$.

Exercice 3 :

3.2 : Pour montrer la G invariance d'un relevé, utiliser par exemple la formule $(p \circ g)^\star \alpha = g^\star(p^\star \alpha)$ démontrée dans l'exercice 1. Pour montrer que toute k-forme G-invariante $\beta \in \Omega^k(X)^G$ est un relevé d'une k-forme sur $G \backslash X$, définir cette dernière en posant pour $y \in G \backslash X$, $x \in p^{-1} y$,

$$\alpha_y = \beta_x((T_x p)^{-1}(.), \ldots, (T_x p)^{-1}(.))$$

et vérifier que α convient.

3.3 : Montrer qu'une k-forme β sur X est un relevé d'une k-forme sur $G \backslash X$ si et seulement si β est G-invariante et pour tout point $x \in X$, tout $v \in \mathrm{Ker} T_x p$, l'application

$$(T_x X)^{k-1} \to T_{p(x)} G \backslash X, (w_2, \ldots, w_k) \mapsto \beta(v, w_2, \ldots, w_k)$$

est nulle.

Exercice 4 :

Ecrire la forme en coordonnées et utiliser la formule du tiré en arrière.

Exercice 5 :

5.1 : Pour montrer l'injectivité, il faut voir que, si $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = \alpha y_1 \wedge \cdots \wedge y_m$, alors $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots x_m) = \mathrm{Vect}(y_1, \ldots, y_m)$. Compléter $x_1, \ldots, x_m$ en une base $x_1, \ldots, x_n$ de $E^\star$, décomposer y_i dans cette base et exprimer le fait que $y_i \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_m = 0$ pour obtenir que $y_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \ldots x_m)$.

5.2 : Soit P l'application de Plücker. Il s'agit de montrer que P est une immersion en tout point. Quitte à faire un changement de coordonnées linéaire à la source et au but, il suffit de travailler au voisinage de $W = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_m)$ (avec $P(W) = [1 : 0 : \ldots : 0]$). Exprimer alors P en coordonnées pour calculer sa différentielle en W. On rappelle que $\mathcal{G}_m(E^*)$ est paramétré au voisinage de W par l'application

$$\varphi : \mathcal{M}_{n-m,m} \to \mathcal{G}_m(E^*),\ A = (a_{i,j}) \mapsto \mathrm{Vect}(e_1 + \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,1} e_{m+i}, \ldots, e_m + \sum_{i=1}^{n-m} a_{i,m} e_{m+i})$$

5.3 : Utiliser le théorème de réduction des formes bilinéaires antisymétriques, assurant qu'une forme bilinéaire alternée peut s'écrire dans une certaine base avec une matrice de 0 et des blocs diagonaux de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.4 : En utilisant la question précédente , montrer d'abord que l'image de P est donnée par l'hypersurface déquation $a_{12}a_{34} + a_{31}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$ dans $\mathbb{P}^6(\mathbb{R})$

Réaliser alors le changement de variables suggéré dans l'énoncé.