Géométrie Différentielle, TD 9 du 2 Avril 2020

1. Exercices

1. Questions diverses

1– Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $v \in E$ et $\Lambda E^\star$ l'agèbre extérieure de $E^\star$ identifiée avec l'algèbre des formes multilinéaires alternées sur E. Montrer que le produit intérieur par v est une dérivation de degré -1 de $\Lambda E^\star$.

2– Montrer que si D_1, D_2 sont des dérivations d'une algèbre graduée de degrés respectifs $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ alors $[D_1, D_2] := D_1D_2 - (-1)^{r_1r_2}D_2D_1$ est une dérivation de degré $r_1 + r_2$.

Solution :

1– On se donne $\alpha \in \Lambda^p E^*$, $\beta \in \Lambda^q E^*$. On doit montrer que

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge (i_v\beta)$$

Par multilinéarité, on peut supposer que $\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_p$ et $\beta = m_1 \wedge \cdots \wedge m_q$. On note $v_1 = v$. Alors pour tous vecteurs $v_2, \dots, v_p \in E$, en développant le déterminant, on a :

$$\begin{array}{rcl} i_{v_1}(\alpha)(v_2, \dots, v_p) & = & i_{v_1}(l_1 \wedge \cdots \wedge l_p)(v_2, \dots, v_p) \\ & = & (l_1 \wedge \cdots \wedge l_p)(v_1, v_2, \dots, v_p) \\ & = & \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} l_i(v_1)(l_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{l_i} \wedge \cdots \wedge l_p)(v_2, \dots, v_p) \end{array}$$

c'est-à-dire

$$i_{v_1}(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} l_i(v_1) l_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{l_i} \wedge \cdots \wedge l_p.$$

En appliquant cette formule à β et $\alpha \wedge \beta = l_1 \wedge \cdots \wedge l_p \wedge m_1 \wedge \cdots \wedge m_q$, on a

$$i_{v_1}(\beta) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j-1} m_j(v_1) m_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{m_j} \wedge \cdots \wedge m_q$$

et

$$\begin{array}{rcl} i_{v_1}(\alpha \wedge \beta) & = & \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} l_i(v_1) l_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{l_i} \wedge \cdots \wedge l_p \wedge m_1 \wedge \cdots \wedge m_q \\ & + & \sum_{j=p+1}^{p+q} (-1)^{j-1} m_{j-p}(v_1) l_1 \wedge \cdots \wedge l_p \wedge m_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{m_{j-p}} \wedge \cdots \wedge m_q. \end{array}$$

Ce qui donne bien

$$\begin{aligned} i_{v_1}(\alpha\wedge\beta) &= \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}l_i(v_1)l_1\wedge\cdots\wedge\widehat{l_i}\wedge\cdots\wedge l_p\wedge\beta \\ &+ \alpha\wedge\left(\sum_{j=p+1}^{p+q}(-1)^{j-1}m_{j-p}(v_1)m_1\wedge\cdots\wedge\widehat{m_{j-p}}\wedge\cdots\wedge m_q\right) \\ &= (i_{v_1}\alpha)\wedge\beta+(-1)^p\alpha\wedge(i_{v_1}\beta). \end{aligned}$$

2– Calcul direct.

2. Produit intérieur et dérivée de Lie

Soient X, Y des champs de vecteurs sur une variété M. On va s'inspirer de la preuve de la formule de Cartan pour montrer que $i([X,Y]) = \mathcal{L}_X\circ i(Y) - i(Y)\circ\mathcal{L}_X$.

1– Montrer que $i([X,Y])$ et $\mathcal{L}_X\circ i(Y) - i(Y)\circ\mathcal{L}_X$ coïncident sur les 0-formes et les différentielles de 0-formes.

2– Montrer que $i([X,Y])$ et $\mathcal{L}_X\circ i(Y) - i(Y)\circ\mathcal{L}_X$ sont des dérivations de degré -1.

3– Conclure.

Solution :

On note $P := \mathcal{L}_X\circ i_Y - i_Y\circ\mathcal{L}_X$.

1– $i_{[X,Y]}$ *et* P *coïncident sur les 0-formes et les différentielles de 0-formes.*

Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$. Alors $P(f) = 0-0 = i_{[X,Y]}f$.

En utilisant le fait que $\mathcal{L}_Z = i_Z\circ d$ sur les 0-formes, on obtient :

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}(df) &= df([X,Y]) = \mathcal{L}_{[X,Y]}f \\ &= \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y f - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X f \\ &= \mathcal{L}_X i_Y(df) - i_Y\circ d\circ\mathcal{L}_X f \\ &= \mathcal{L}_X i_Y(df) - i_Y\mathcal{L}_X(df) \\ &= P(df) \end{aligned}$$

2– $i_{[X,Y]}$ *et* P *sont des anti-dérivations*

Cela découle de la question 2 du premier exercice.

3– *Conclusion.*

P et $i_{[X,Y]} : \Omega^p(M)\to\Omega^{p+1}(M)$ sont des opérateurs locaux (i.e. qui commutent à la restriction à un ouvert de M). Pour montrer que $P\alpha = i_{[X,Y]}\alpha$ on peut donc se restreindre à un domaine de cartes, puis supposer que $M=U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$. On écrit alors $\alpha = \sum_{i\in I} a_i dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}$ où I est l'ensemble des p-uplets sans répétition d'éléments de $\{0,\ldots,n\}$ ordonnés par ordre strictement croissant. On calcule par propriété d'antidérivations que $P\alpha = \sum_{i\in I} P(a_i)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p} + a_i P(dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p})$

et de même pour $i_{[X,Y]}$. Il suffit donc de montrer que $P(a_i) = i_{[X,Y]}(a_i)$ (fait en question 1), et $P(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = i_{[X,Y]}(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p})$ (provient de la question 1 en raisonnant par récurrence). D'où le résultat.

3. Divergence d'un champ de vecteurs

Soit M une variété différentielle, ω une forme volume sur M, X un champ de vecteurs sur M. On apelle divergence du champ X par rapport à la forme ω la fonction $\mathrm{div}(X) \in C^\infty(M)$ définie par $\mathrm{d}(i(X)\omega) = \mathrm{div}(X)\omega$.

1– Montrer que le flot du champ X préserve la forme ω si et seulement si la divergence de X est nulle.

2– Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$, calculer la divergence d'un champ X par rapport à la forme volume canonique $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.

Solution :

1– La formule de Cartan donne que $L_\xi\omega = di_\xi\omega + i_\xi d\omega$. Ici, ω est de degré maximal, donc $\mathrm{d}\omega = 0$, si bien que $L_\xi\omega = d(i_\xi\omega) = \mathrm{div}(\xi)\omega$. Mais rappelons qu'une des définitions de $L_\xi\omega$ est $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}_{|t=0}(\varphi_t)^*\omega$, où φ_t est le flot de ξ. Ainsi, ω est invariante le long du flot si et seulement si $L_\xi\omega = 0$, i.e. si et seulement si $\mathrm{div}(\xi) = 0$.

2– Si $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, alors par développement du déterminant par rapport à la première colonne,

$$i_\xi\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\xi_1 \,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \ldots \mathrm{d}x_n.$$

En différentiant, on trouve

$$d(i_\xi\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n,$$

i.e. $\mathrm{div}(\xi) = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}$: on retrouve la formule habituelle pour la divergence.

4. Théorème de Darboux

Soit M une variété de dimension $2n$ munie d'une 2-forme ω fermée (i.e. $d\omega = 0$) et de rang en tout point égal à $2n$. On dit que ω est une forme symplectique. On va montrer que tout point $p \in M$ admet un voisinage U muni de coordonnées locales $(x_1, \cdots, x_{2n})$ telles que

$$\omega_{|U} = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

1– On suppose tout d'abord $n = 1$. Montrer que si (y_1, y_2) est un système de coordonnées locales arbitraire en p, on peut trouver une fonction différentiable h telle que (y_1, h) soit un système de coordonnées répondant à la question sur un voisinage de p.

2– On étudie le cas général. Soit f une fonction différentiable telle que $f(p) = 0$ et $df_p \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X_2 sur M tel que $i_{X_2}\omega = df$, et qu'il existe une fonction différentiable g telle que $X_2.g = 1$ sur un voisinage de p.

3– Soit X_1 le champ de vecteurs tel que $i_{X_1}\omega = dg$. Montrer qu'au voisinage de p on a :
$$\omega(X_1, X_2) = 1 \text{ et } [X_1, X_2] = 0$$

4– On considère alors un système de coordonnées locales $(y_1, \cdots, y_{2n})$ au voisinage de p telles que $X_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$ pour $i = 1, 2$. Montrer que $(x_1, \cdots, x_{2n}) := (-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ est un système de coordonnées sur un voisinage V de p et qu'on a
$$\omega_{|V} = dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{3 \leqslant i<j \leqslant 2n} a_{ij}(x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dx_j.$$

5– Conclure.

Solution :

1– Cherchons h. On a $dy_1 \wedge dh = dy_1 \wedge \frac{\partial h}{\partial y_2} dy_2$ et $\omega = f dy_1 \wedge dy_2$ au voisinage de p (pour une certaine fonction f). Il s'agit donc de trouver h $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\frac{\partial h}{\partial y_2} = f$, ce qui se résout en prenant par exemple (en coordonnées locales) : $h(y_1, y_2) = \int_0^{y_2} f(y_1, t) dt$. Le couple (y_1, h) définit bien une carte au voisinage de p car les formes linéaires dy_1 et dh sur T_pM sont indépendantes, donc (y_1, h) est un difféomorphisme local en p.

2– Soit $x \in M$. Comme ω est de rang $2n$, la fonction
$$\begin{array}{ccc} TxM & \longrightarrow & TxM^* \\ v & \mapsto & \omega(v, .) \end{array}$$
est un isomorphisme. Il existe donc un unique vecteur $X_2(x)$ tel que $i_{X_2(x)}\omega_x = df_x$. Montrons que X_2 est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$. Au voisinage d'un point a, dans une carte locale, ω s'écrit $\omega_x = \sum_{i<j} 2\omega_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$, où $\Omega_x := (\omega_{ij}(x))_{1 \leqslant i,j \leqslant 2n}$ matrice antisymétrique de rang 2n représentant la forme bilinéaire ω_x.

Alors $i_{X_2(x)}\omega_x = df_x$ se réécrit :
$$\sum_{i<j} 2\omega_{ij}(x)[X_i(x) dx_j - X_j(x) dx_i] = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$
c'est à dire
$$\sum_j \left(\sum_i \omega_{ij}(x) X_i(x) \right) dx_j = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$$

ou encore $\Omega_x(X_2(x)) = \nabla_x f$, i.e. $X_2(x) = \Omega_x^{-1}\nabla_x f$, donc X_2 est $\mathcal{C}^\infty$.

3– On a, au voisinage de p, $\omega(X_1, X_2) = i_{X_2}(\omega(X_1, .)) = i_{X_2} i_{X_1}\omega = i_{X_2} dg = dg.X_2 = 1$. Pour le crochet de X_1 et X_2, on utilise la formule de l'exercice 2 appliquée à la forme ω (et la formule de Cartan) :

$$\begin{aligned}
i_{[X_1,X_2]}\omega &= \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{X_2}\mathcal{L}_{X_1}\omega \\
&= \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{X_2}(d(i_{X_1}\omega) + i_{X_1}(d\omega)) \\
&= \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{X_2}(d(i_{X_1}\omega)) && \text{car } \omega \text{ est fermée} \\
&= \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega - i_{X_2}(d(dg)) \\
&= \mathcal{L}_{X_1} i_{X_2}\omega && \text{car } d\circ d = 0 \\
&= d(i_{X_1}(i_{X_2}\omega)) + i_{X_1}(d(i_{X_2}\omega)) \\
&= d(i_{X_1}(i_{X_2}\omega)) + i_{X_1}(d(df)) \\
&= d(x \mapsto 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme ω est de rang $2n$, cela montre que $[X_1, X_2] = 0$ au voisinage de p (cf isomorphisme de la question précédente).

4– On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y_1} &= df.X_1 = i_{X_1}(df) = i_{X_1} i_{X_2}\omega = \omega(X_2, X_1) = -1 \\
\frac{\partial f}{\partial y_2} &= df.X_2 = i_{X_2}(df) = i_{X_2} i_{X_2}\omega = \omega(X_2, X_2) = 0
\end{aligned}$$

De même, $\frac{\partial g}{\partial y_1} = 0$ et $\frac{\partial g}{\partial y_2} = 1$.

La jacobienne de $(-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\
? & ? & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
? & ? & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

et est donc inversible ; l'application $\psi = (-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ définit donc un système de coordonnées locales au voisinage de p.

Nous montrons que le poussé en avant $\psi_*\omega$ a la forme annoncée. On peut écrire en coordonnées $\psi_*\omega$ sous la forme $\psi_*\omega = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2n} a_{ij}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dx_j$. On calcule alors les coefficients de la forme a_{1j}. Commençons par a_{12}.

D'une part,

$$\omega_y(X_1, X_2) = (\psi_*\omega)_{\psi(y)}(T\psi_y(X_1), T\psi_y(X_2)) = (\psi_*\omega)_{\psi(y)}(\frac{\partial\psi}{\partial y_1}(y), \frac{\partial\psi}{\partial y_2}(y))$$

Or $\frac{\partial\psi}{\partial y_1} = (-\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_1}, 0, \ldots, 0) = e_1$, et $\frac{\partial\psi}{\partial y_2} = (-\frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial g}{\partial y_2}, 0, \ldots, 0) = e_2$

Donc $\omega_y(X_1, X_2) = a_{12}(\psi(y))$.

D'autre part, $\omega_y(X_1, X_2) = 1$, d'où on conclut que $1 = a_{12}$.
Calculons maintenant a_{1j} pour $j \geqslant 3$.
D'une part,

$$\omega_y(X_1, T\psi^{-1}_{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial x_j}) = (\psi_* \omega)_{\psi(y)}(T\psi_y(X_1), \frac{\partial}{\partial x_j}) = (\psi_*\omega)_{\psi(y)}(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = a_{1j}(\psi(y))$$

D'autre part,

$$\omega_y(X_1, T\psi^{-1}_{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial x_j}) = dg_y(T\psi^{-1}_{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial x_j}) = d(g \circ \psi^{-1}_{\psi(y)} \frac{\partial}{\partial x_j}) = dx_2(\frac{\partial}{\partial x_j}) = 0$$

Ainsi $a_{1j} = 0$ si $j \geqslant 3$.
Finalement, $\psi_*\omega$ s'écrit

$$\psi_*\omega = dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{3 \leqslant i < j \leqslant 2n} a_{ij}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dx_j$$

Enfin, en écrivant $d\psi_*\omega = 0$, on obtient que pour $j > i \geqslant 3$, $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_1} = \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_2} = 0$, et donc

$$\psi_*\omega = dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{3 \leqslant i < j \leqslant 2n} a_{ij}(x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dx_j$$

5– On considère la sous-variété M' de M au voisinage de p donnée par l'équation $x_1 = x_2 = 0$ et la forme ω' sur M' donnée par $\omega' = \sum_{3 \leqslant i < j \leqslant 2n} a_{ij}(x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dx_j$. Comme ω est fermée et que $d(dx_1 \wedge dx_2) = 0$, on obtient que ω' est fermée. De plus, ω' est bien de rang $2n-2$ en tout point : si un vecteur v est dans le noyau de ω'_x, alors $(0, 0, v)$ est dans celui de ω_x et donc v=0. Par récurrence, Il existe des coordonnées locales $(x'_3, \cdots, x'_{2n})$ sur M' telles que $\omega' = dx'_3 \wedge dx'_4 + \cdots + dx'_{2n-1} \wedge dx'_{2n}$. On obtient alors que $(x_1, x_2, x'_3, \cdots, x'_{2n})$ est un système de coordonnées locales au voisinage de p et que $\omega' = dx_1 \wedge dx_2 + dx'_3 \wedge dx'_4 + \cdots + dx'_{2n-1} \wedge dx'_{2n}$.

5. Lemme de Poincaré

Soit U un ouvert étoilé en 0 de $\mathbb{R}^n$.

1– Soit X un champ de vecteur complet sur U, de flot φ_t, et soit α une p-forme différentielle sur U.

a) Vérifier que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{du}(\varphi_u^* \alpha)_{|u=t} = \mathcal{L}_X(\varphi_t^* \alpha).$$

b) Supposons que la forme α est *fermée*. Montrer que pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ la forme $\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha$ est *exacte*, i.e. s'écrit comme la différentielle d'une $(p-1)$-forme sur U. Pour cela, on pourra remarquer que

$$\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha \right) dt$$

2– Soit X le champ de vecteurs sur U défini par $X(x) = x$. En utilisant la question précédente avec $t_1 = 0$ et $t_0 \to -\infty$, montrer que toute forme fermée sur U est exacte.

3– Soit M une variété. Montrer que toute forme fermée sur M est localement exacte.

Solution :

1– a) On remarque que

$$\frac{d}{du}(\varphi_u^*\alpha)_{|u=t} = \frac{d}{du}(\varphi_u^*(\varphi_t^*\alpha))_{|u=0} = \mathcal{L}_X(\varphi_t^*\alpha).$$

b) On écrit que

$$\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha \right) dt,$$

En appliquant la formule de Cartan, la question 1.a), et en utilisant le fait que le tiré en arrière d'une forme fermée est fermé, on obtient

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha = (d \circ i_X + i_X \circ d)(\varphi_t^*\alpha) = d(i_X(\varphi_t^*\alpha)),$$

Par conséquent,

$$\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = \int_{t_0}^{t_1} d\left(i_X(\varphi_t^*\alpha)\right) dt = d\left(\int_{t_0}^{t_1} \left(i_X(\varphi_t^*\alpha)\right) dt \right)$$

2– Le flot du champ de vecteurs X est $\varphi_t(x) = e^t x$. Les calculs de la question précédente donnent, pour $t_0 < 0$:

$$\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = d\omega$$

où

$$\omega_x(v_1, \cdots, v_{p-1}) = \int_{t_0}^{0} \alpha_{e^t x}(e^t x, e^t v_1, \cdots, e^t v_{p-1}) dt.$$

En posant $h_\lambda(x) = \lambda x$ et en effectuant le changement de variable $u = e^t$, on voit que $\alpha - h_\lambda^*\alpha = d\beta_\lambda$, où

$$(\beta_\lambda)_x(v_1, \cdots, v_{p-1}) = \int_{\lambda}^{1} u^{p-1}\alpha_{ux}(x, v_1, \cdots, v_{p-1}) du.$$

En faisant tendre λ vers 0, on voit que $\alpha = d\beta$, avec

$$\beta_x(v_1, \cdots, v_{p-1}) = \int_0^1 u^{p-1}\alpha_{ux}(x, v_1, \cdots, v_{p-1})du.$$

3– Soit α forme fermée sur M et $x \in M$. Il existe un voisinage V de x difféomorphe à la boule unité de $\mathbb{R}^n$ (étoilée en x) par un difféomorphisme ψ. Alors $d\psi_*\alpha = \psi_* d\alpha = 0$, donc $\psi_*\alpha$ est fermée sur la boule unité. D'après la question précédente, il existe β telle que $\psi_*\alpha = d\beta$. Alors $\alpha = \psi^* d\beta = d(\psi^*\beta)$ sur V : α est localement exacte.

2. Indications

Exercice 1 :

1 : Soit $\alpha \in \Lambda^p E^*$ une forme p-linéaire alternée sur E s'écrivant $\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_p$ où $l_i \in E^*$. Soit $v_1, \ldots, v_p \in E$. Montrer que en développant un déterminant que :

$$i_{v_1}(\alpha)(v_2, \ldots, v_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} l_i(v_1)(l_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{l_i} \wedge \cdots \wedge l_p)(v_2, \ldots, v_p)$$

2 : Il n'y a pas de miracle, c'est un calcul direct.

Exercice 2 :

2.1 : Remarquer que $i_{[X,Y]}df = \mathcal{L}_{[X,Y]}f = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f)$

2.3 : Remarquer que $i([X,Y])$ et $\mathcal{L}_X \circ i(Y) - i(Y) \circ \mathcal{L}_X$ sont des opérateurs locaux. On peut donc se ramener au cas où $M = \mathbb{R}^n$ en se plaçant dans une carte.

Exercice 3 :

3.1 : Formule de Cartan.

3.2 : En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on a que pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$i_x dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \, \mathrm{d}x_n.$$

Exercice 4 :

4.1 : Au voisinage de p, on peut écrire $\omega = f dy_1 \wedge dy_2$ où f est C^∞. Il s'agit donc de résoudre l'équation $f dy_1 \wedge dy_2 = dy_1 \wedge dh$.

4.2 : Pour construire X_2 se rappeler du fait suivant : si une forme bilinéaire B sur un espace vectoriel E de dimension finie est non dégénérée, alors toute forme linéaire sur E s'écrit de façon unique sous la forme $B(v, .)$ pour un certain $v \in E$.

Pour construire g : redresser localement X_2 en un champ constant.

4.3 : Vérifier la nullité du crochet en montrant que $i_{[X_1,X_2]}\omega = 0$ au voisinage de p. Pour cela utiliser le résultat démontré dans l'exercice 2 ainsi que la formule de Cartan pour développer les dérivées de Lie.

4.4 : On peut supposer que $M = \mathbb{R}^{2n}$, $p = 0$ et $y_1, \ldots, y_{2n}$ est le système de coordonées standard. Montrer que la différentielle en 0 de l'application $(-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ ? & ? & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrire ensuite ω sous la forme

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n} a_{ij}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dx_j$$

est évaluer en de bons champs de vecteurs pour montrer que certains coefficients sont nuls. Vérifier enfin l'indépendance en x_1, x_2 en utilisant que ω est fermée.

4.5 : Récurrence.

Exercice 5 :

5.2 b) : Montrer que

$$\varphi_{t_1}^* \alpha - \varphi_{t_0}^* \alpha = d \left(\int_{t_0}^{t_1} (i_X(\varphi_t^* \alpha)) \, dt \right)$$

5.3. D'après la question précédente,

$$\alpha - \varphi_{t_0}^* \alpha = d\omega_{t_0}$$

où la forme ω_{t_0} peut être explicitée (ici, $\varphi_t(x) = e^t x$). Montrer que $\varphi_{t_0} \alpha \to 0$ et $d\omega_{t_0} \to d\omega$ pour une certaine forme $d\omega$ quand t_0 tend vers $-\infty$.