Géométrie Différentielle, TD 9 du 2 Avril 2020

1. Exercices

1. Questions diverses

1– Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $v \in E$ et $\Lambda E^\star$ l'agèbre extérieure de $E^\star$ identifiée avec l'algèbre des formes multilinéaires alternées sur E. Montrer que le produit intérieur par v est une dérivation de degré -1 de $\Lambda E^\star$.

2– Montrer que si D_1, D_2 sont des dérivations de $\Lambda E^\star$ de degrés respectifs $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ alors $[D_1, D_2] := D_1 D_2 - (-1)^{r_1 r_2} D_2 D_1$ est une dérivation de degré $r_1 + r_2$.

2. Produit intérieur et dérivée de Lie

Soient X, Y des champs de vecteurs sur une variété M. On va s'inspirer de la preuve de la formule de Cartan pour montrer que $i([X,Y]) = \mathcal{L}_X \circ i(Y) - i(Y) \circ \mathcal{L}_X$.

1– Montrer que $i([X,Y])$ et $\mathcal{L}_X \circ i(Y) - i(Y) \circ \mathcal{L}_X$ coïncident sur les 0-formes et les différentielles de 0-formes.

2– Montrer que $i([X,Y])$ et $\mathcal{L}_X \circ i(Y) - i(Y) \circ \mathcal{L}_X$ sont des dérivations de degré -1.

3– Conclure.

3. Divergence d'un champ de vecteurs

Soit M une variété différentielle, ω une forme volume sur M, X un champ de vecteurs sur M. On apelle divergence du champ X par rapport à la forme ω la fonction $\mathrm{div}(X) \in C^\infty(M)$ définie par $\mathrm{d}(i(X)\omega) = \mathrm{div}(X)\omega$.

1– Montrer que le flot du champ X préserve la forme ω si et seulement si la divergence de X est nulle.

2– Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$, calculer la divergence d'un champ X par rapport à la forme volume canonique $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$.

4. Théorème de Darboux

Soit M une variété de dimension $2n$ munie d'une 2-forme ω fermée (i.e. $d\omega = 0$) et de rang en tout point égal à $2n$. On dit que ω est une forme symplectique. On va montrer que tout point $p \in M$ admet un voisinage U muni de coordonnées locales $(x_1, \cdots, x_{2n})$ telles que

$$\omega_{|U} = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

1– On suppose tout d'abord $n = 1$. Montrer que si (y_1, y_2) est un système de coordonnées locales arbitraire en p, on peut trouver une fonction différentiable h telle que (y_1, h) soit un système de coordonnées répondant à la question sur un voisinage de p.

2– On étudie le cas général. Soit f une fonction différentiable telle que $f(p) = 0$ et $df_p \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X_2 sur M tel que $i_{X_2}\omega = df$, et qu'il existe une fonction différentiable g telle que $X_2.g = 1$ sur un voisinage de p.

3– Soit X_1 le champ de vecteurs tel que $i_{X_1}\omega = dg$. Montrer qu'au voisinage de p on a :

$$\omega(X_1, X_2) = 1 \text{ et } [X_1, X_2] = 0$$

4– On considère alors un système de coordonnées locales $(y_1, \cdots, y_{2n})$ au voisinage de p telles que $X_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$ pour $i = 1, 2$. Montrer que $(x_1, \cdots, x_{2n}) := (-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ est un système de coordonnées sur un voisinage V de p et que quitte à bien choisir f et g, on a

$$\omega_{|V} = dx_1 \wedge dx_2 + \sum_{3 \leqslant i < j \leqslant 2n} \omega_{ij}(x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dx_j.$$

5– Conclure.

5. Lemme de Poincaré

Soit U un ouvert étoilé en 0 de $\mathbb{R}^n$.

1– Soit X un champ de vecteur complet sur U, de flot φ_t, et soit α une p-forme différentielle sur U.

a) Vérifier que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{du}(\varphi_u^*\alpha)_{|u=t} = \mathcal{L}_X(\varphi_t^*\alpha).$$

b) Supposons que la forme α est *fermée*. Montrer que pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ la forme $\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha$ est *exacte*, i.e. s'écrit comme la différentielle d'une $(p-1)$-forme sur U. Pour cela, on pourra remarquer que

$$\varphi_{t_1}^*\alpha - \varphi_{t_0}^*\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha \right) dt$$

2– Soit X le champ de vecteurs sur U défini par $X(x) = x$. En utilisant la question précédente avec $t_1 = 0$ et $t_0 \to -\infty$, montrer que toute forme fermée sur U est exacte.

3– Soit M une variété. Montrer que toute forme fermée sur M est localement exacte.

2. Indications

Exercice 1 :

1 : Soit $\alpha \in \Lambda^p E^*$ une forme p-linéaire alternée sur E s'écrivant $\alpha = l_1 \wedge \cdots \wedge l_p$ où $l_i \in E^*$. Soit $v_1, \dots, v_p \in E$. Montrer que en développant un déterminant que :

$$i_{v_1}(\alpha)(v_2, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} l_i(v_1)(l_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{l_i} \wedge \cdots \wedge l_p)(v_2, \dots, v_p)$$

2 : Il n'y a pas de miracle, c'est un calcul direct.

Exercice 2 :

2.1 : Remarquer que $i_{[X,Y]}df = \mathcal{L}_{[X,Y]}f = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f)$

2.3 : Remarquer que $i([X,Y])$ et $\mathcal{L}_X \circ i(Y) - i(Y) \circ \mathcal{L}_X$ sont des opérateurs locaux. On peut donc se ramener au cas où $M = \mathbb{R}^n$ en se plaçant dans une carte.

Exercice 3 :

3.1 : Formule de Cartan.

3.2 : En développant le déterminant par rapport à la première colonne, on a que pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$i_x dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \dots \widehat{\mathrm{d}x_i} \dots \wedge \, \mathrm{d}x_n.$$

Exercice 4 :

4.1 : Au voisinage de p, on peut écrire $\omega = f dy_1 \wedge dy_2$ où f est C^∞. Il s'agit donc de résoudre l'équation $f dy_1 \wedge dy_2 = dy_1 \wedge dh$.

4.2 : Pour construire X_2 se rappeler du fait suivant : si une forme bilinéaire B sur un espace vectoriel E de dimension finie est non dégénérée, alors toute forme linéaire sur E s'écrit de façon unique sous la forme $B(v, .)$ pour un certain $v \in E$.

Pour construire g : redresser localement X_2 en un champ constant.

4.3 : Vérifier la nullité du crochet en montrant que $i_{[X_1,X_2]}\omega = 0$ au voisinage de p. Pour cela utiliser le résultat démontré dans l'exercice 2 ainsi que la formule de Cartan pour développer les dérivées de Lie.

4.4 : On peut supposer que $M = \mathbb{R}^{2n}$, $p = 0$ et $y_1, \dots, y_{2n}$ est le système de coordonées standard. Montrer que la différentielle en 0 de l'application $(-f, g, y_3, \cdots, y_{2n})$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ ? & ? & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ ? & ? & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrire ensuite ω sous la forme

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2n} \omega_{ij}(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2n}) dx_i \wedge dx_j$$

est évaluer en de bons champs de vecteurs pour montrer que certains coefficients sont nuls (quitte à bien choisir f et g). Vérifier enfin l'indépendance en x_1, x_2 en utilisant que ω est fermée.

4.5 : Récurrence.

Exercice 5 :

5.2 b) : Montrer que

$$\varphi_{t_1}^* \alpha - \varphi_{t_0}^* \alpha = d \left(\int_{t_0}^{t_1} (i_X(\varphi_t^* \alpha))\, dt \right)$$

5.3. D'après la question précédente,

$$\alpha - \varphi_{t_0}^* \alpha = d\omega_{t_0}$$

où la forme ω_{t_0} peut être explicitée (ici, $\varphi_t(x) = e^t x$). Montrer que $\varphi_{t_0} \alpha \to 0$ et $d\omega_{t_0} \to d\omega$ pour une certaine forme $d\omega$ quand t_0 tend vers $-\infty$.