G Approximation algébrique.

Déf: Soit X une variété projective lisse réelle, et $N \subseteq X(\mathbb{R})$ une sous-variété C^∞ fermée.
On dit que N admet une approximation algébrique si

$$\forall \mathcal{U} \subseteq C^\infty(N, X(\mathbb{R})) \text{ voisinage de l'inclusion pour la topologie } C^0, \ \exists \phi \in \mathcal{U}$$

et $Y \subseteq X$ sous-variété algébrique, fermée lisse le long de $Y(\mathbb{R})$ telle que $\phi(N) = Y(\mathbb{R})$.

Th: Soit X proj. lisse $/_{\mathbb{R}}$ et $H \subseteq X(\mathbb{R})$ hypersurface C^∞. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) H admet une approximation algébrique

(ii) $[H] \in H^1_{alg}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/_2)$.

Remarque 1. Si $H \subseteq \mathbb{R}^n$ hypersurface, le résultat est dû à Seifert (1936).

Remarque 2: Si $X = \mathbb{P}^N_{\mathbb{R}}$, alors (ii) est automatiquement satisfaite ! Toute hypersurface dans $\mathbb{P}^N(\mathbb{R})$ admet donc une approximation algébrique.

Remarque 3. On peut en fait supposer que Y est lisse partout (pas seulement le long de $Y(\mathbb{R})$).
C'est inutile pour l'application à Nash-Tognoli.

Remarque 4 : On peut remplacer C^0 par C^∞ (en améliorant le théorème de la section "perturbations").

Remarque 5. Si H contient $Z(\mathbb{R})$, $Z \subseteq X$ sous-variété algébrique lisse le long de $Z(\mathbb{R})$,

alors on peut supposer que $Z(\mathbb{R}) \subseteq Y(\mathbb{R})$.

Ce sera utile pour l'application à Nash-Tognoli. Dans la preuve, il suffit de remplacer Stone-Weierstrass par son amélioration prouvée plus haut !

D) Fibrés en droites algébriques.

Soit X une variété algébrique $/\mathbb{R}$. Un fibré vectoriel algébrique est $\begin{smallmatrix}E\\ \downarrow\\ X\end{smallmatrix}$, plus des trivialisations

$$\begin{tikzcd} E|_{U_i} \arrow[r] \arrow[dr] & U_i \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \arrow[d] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

tels que les changements de trivialisation $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \xrightarrow[\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}]{} U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$

soit des matrices $n \times n$ à coefficients $\in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Le faisceau de ses sections est localement libre de rang n.

$n = 1$: fibré en droites et faisceaux inversibles.

Prop : Soit X une variété lisse $/\mathbb{R}$. Soit $Y \subseteq X$ une sous-variété fermée de codimension 1.
Alors il existe $\begin{smallmatrix}L\\ \downarrow\\ X\end{smallmatrix}$ fibré en droites algébrique et $s : X \to L$ section telle que $Y = \{s = 0\}$.

Preuve : Pour tout $x \in X$, il existe $U \subseteq X$ voisinage Zariski de x et $f \in \mathcal{O}(U)$ tels que $Y \cap U = \{f = 0\}$.

[En effet, $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier donc factoriel.
Dans un anneau factoriel, les idéaux de hauteur 1 sont principaux.

On extrait un recouvrement fini (U_i, f_i).

On construit L en recollant $U_i \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ et $U_j \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$

via $$U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} U_i \cap U_j \times \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$$
$$(x, \lambda) \longmapsto \left(x, \frac{f_j}{f_i}(x)\lambda\right)$$

Ces recollements sont compatibles sur $U_i \cap U_j \cap U_k$ car $\frac{f_j}{f_i}\frac{f_i}{f_k} = \frac{f_j}{f_k}$.

Les f_i définissent une section s de L telle que $Y = \{s = 0\}$.

• À un fibré en droites algébrique L/X où X lisse $/\mathbb{R}$, on associe le fibré en droites complexes holomorphe $\begin{matrix} L(\mathbb{C}) \\ \downarrow \\ X(\mathbb{C}) \end{matrix}$. Ce fibré est G-équivariant, i.e. $\begin{matrix} G \curvearrowright L(\mathbb{C}) \\ \downarrow \\ G \curvearrowright X(\mathbb{C}) \end{matrix}$ et G agit $\mathbb{C}$-antilinéairement sur les fibres.

Alors $\begin{matrix} L(\mathbb{R}) = L(\mathbb{C})^G \\ \downarrow \\ X(\mathbb{R}) = X(\mathbb{C})^G \end{matrix}$ est un fibré en droites réelles C^∞ sur $X(\mathbb{R})$.

• Si $Y = \{s = 0\} \subseteq X$ pour s section algébrique de L,

alors $Y(\mathbb{C}) = \{s(\mathbb{C}) = 0\}$, $s(\mathbb{C})$ section holomorphe de $L(\mathbb{C})$

et $Y(\mathbb{R}) = \{s(\mathbb{R}) = 0\}$, $s(\mathbb{R})$ section C^∞ de $L(\mathbb{R})$.

De plus, si Y est lisse, la différentielle de s en tout point de Y (lue dans des trivialisations locales) est non nulle. Il en va donc de même pour la différentielle de $s(\mathbb{R})$ en tout point de $Y(\mathbb{R})$.
Ainsi, $s(\mathbb{R})$ est transverse à la section nulle.

<u>Def</u> : Un fibré en droites réel sur $X(\mathbb{R})$ est <u>algébrique</u> s'il est de la forme $L(\mathbb{R})$.
pour L fibré en droites algébrique sur X.

On note $\boxed{H^1_{alg}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)} \subseteq H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$ les 1e classes de Stiefel-Whitney de fibrés en droites algébriques.

La remarque ci-dessus montre que si une hypersurface $M \subseteq X(\mathbb{R})$ est égale à $Y(\mathbb{R})$, $Y \subseteq X$ lisse [ou même de l'adhérence de $Y(\mathbb{R})$], alors $[M] \in H^1_{alg}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

<u>exemple</u> : $X = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Alors $H^1(\mathbb{P}^N(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et la classe non triviale est induite par le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N(\mathbb{R})}(1)$. Ce fibré réel étant induit par le fibré algébrique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}}(1)$, on a $H^1_{alg}(\mathbb{P}^N(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2) = H^1(\mathbb{P}^N(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$.

II Perturbations

Def : M, N variétés C^∞. La topologie C^k sur $C^\infty(M,N)$ est celle dont une base d'ouverts de $f: M \to N$ est donnée par les ensembles de la forme $\left\{ g : M \to N \mid g(K) \subseteq V \text{ et } \left\| \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right\|_{\infty, K} < \varepsilon \right\}$

où $K \subseteq U \subseteq M$, $V \subseteq N$, $f(K) \subseteq V$, $\varepsilon > 0$, $|\alpha| \leq k$.

compact — cartes locales

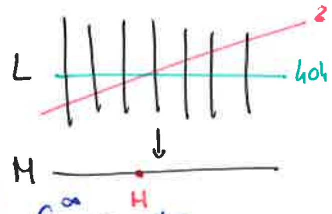
Prop : Soient $M, L, H = \{s = 0\} \subseteq M$ comme ci-dessus.

Si $s' : M \to L$ section C^∞ qui est C^1-proche de s, alors $H' = \{s' = 0\}$ est une ss-variété C^∞ de M et il existe $\phi : H \to M$ C^0-proche de l'inclusion telle que $\phi : H \xrightarrow{\sim} H'$.

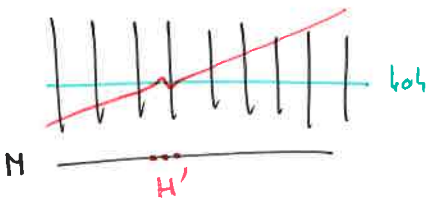
[Plus précisément, $\forall$ C^0-voisinage $\mathcal{U}$ de l'inclusion $H \hookrightarrow M$, il existe un C^1-voisinage $\mathcal{V}$ de s tel que $\forall s' \in \mathcal{V}$ $\exists \phi \in \mathcal{U}$ ...

Remarque : La proposition est fausse si s' est seulement C^0-proche de s.

En effet, on peut prendre



et



Remarque : on peut renforcer C^0 et C^1 par C^∞, par contre.

Preuve : • Soient $M \supseteq U_i \supseteq K_i$ tels que $M = \bigcup_i K_i$ (union finie), $L|_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{R}$, $s|_{U_i} : U_i \xrightarrow{f_i} \mathbb{R}$.

(U_i : ouverts de cartes trivialisant L ; K_i : compacts)

Soit $M \supseteq U \xrightarrow{\sim} V \subseteq N_{H/M} = L$ voisinage tubulaire de H, $p : U \to H$.

• Si s' est C^0-proche de s, $H' \subseteq$ n'importe quel voisinage fixé à l'avance $W \subseteq M$ de H. En particulier, $H' \subseteq U$.

En particulier aussi, $H' \subseteq$ un voisinage compact de H | où les équations locales f_i définissant H sont submersives et où la différentielle $d_x p$ de p envoie $\operatorname{Ker} d_x f_i$ isomorphiquement sur $T_{p(x)} H$.

Cela montre que H' est une sous-variété C^∞ de M et que $p|_{H'} : H' \to H$ est un difféo local, donc un revêtement (car $p|_{H'}$ propre car H' est compact).

• Pour voir que $p|_{H'} : H' \to H$ est bijectif, il suffit de voir qu'il a une fibre réduite à un point par composante connexe de H. Soit $x \in H$ un point dans cette composante connexe. On a $\underset{x}{p^{-1}(x)} \underset{\text{difféo}}{\simeq}]-\varepsilon, \varepsilon[$ ($x \mapsto 0$), et $H \cap p^{-1}(x)$ qui est $\{f = 0\}$, pour une submersion $f :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$. On a $df \geq \delta > 0$ (quitte à changer f en $-f$) au voisinage de 0. Si s' est C^1-proche de s et correspond à $f' :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, on a $df' \geq \frac{\delta}{2} > 0$ donc f' s'annule au plus une fois sur $]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$.

De plus, f' s'annule au moins une fois par théorème des valeurs intermédiaires.

Remarque : La preuve fonctionne aussi pour des sections de fibrés vectoriels.