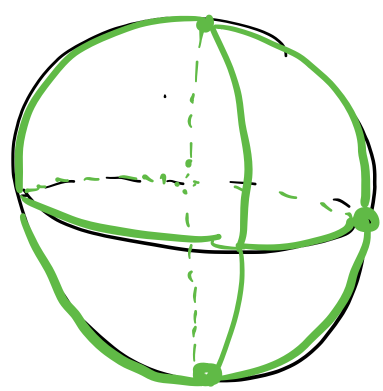
Chapitre 3 : Homologie.

On a étudié en détail $\pi_1(X,x)$ qui mesure la complexité des lacets tracés dans X.

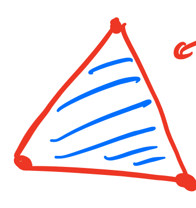
On voudrait faire de même pour $\pi_k(X,x)$ qui contrôle la complexité des k-sphères dans X ($S^k \longrightarrow X$). Ce groupe est malheureusement très compliqué à calculer.

On dispose d'un substitut, lui aussi engendré par des objets géométriques de dimension k dans X, mais qui est beaucoup plus facile à calculer : le groupe d'homologie $H_k(X, \mathbb{Z})$.



Idée naïve :

- Considérer des objets "triangulés" (union de segments / triangles / tétraèdres / k-simplexes)
- Un tel objet induit une classe en homologie s'il n'a "pas de bord".
- Il est trivial en homologie si "c'est un bord" (d'un objet triangulé de dim. $k+1$).



3.1 Un peu d'algèbre homologique.

Dans ce paragraphe, on formalise algébriquement la notion de bord.

Def : Un complexe de chaînes $C = (C_\bullet, d_\bullet)$

$$\cdots \to C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \to 0$$

est la donnée de groupes abéliens $(C_n)_{n \geq 0}$

et de morphismes de groupes $(d_n : C_n \to C_{n-1})_{n \geq 1}$ (morphismes de bord)

tels que $d_n \circ d_{n+1} = 0$ pour $n \geq 1$.

Un morphisme de complexes de chaînes $f : (C_\bullet, d_\bullet) \to (C'_\bullet, d'_\bullet)$

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & C_2 & \to & C_1 & \to & C_0 & \to & 0 \\ & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \\ \cdots \to & C'_2 & \to & C'_1 & \to & C'_0 & \to & 0 \end{array}$$

est la donnée de morphismes de groupes $f_n : C_n \to C'_n$ tels que

$$f_n \circ d_{n+1} = d'_{n+1} \circ f_{n+1} \text{ pour } n \geq 1.$$

Remarque : par convention, on posera $C_{-1} = 0$ et $d_0 = 0$.

Déf : Si $C = (C_\bullet, d_\bullet)$ est un complexe de chaîne, on note

$Z_n(C) = \mathrm{Ker}\, d_n : C_n \to C_{n-1})$ les n-cycles

$B_n(C) = \mathrm{Im}\, d_{n+1} : C_{n+1} \to C_n)$ les n-bords

$H_n(C) = Z_n(C) / B_n(C)$ le n-ième groupe d'homologie de C.

cela fait sens car $d_n \circ d_{n+1} = 0$

Un morphisme de complexes de chaînes $f : C \to C'$

satisfait $\begin{cases} f_n(Z_n(C)) \subseteq Z_n(C') \\ f_n(B_n(C)) \subseteq B_n(C') \end{cases}$

et induit donc un morphisme $H_n(f) : H_n(C) \to H_n(C')$.

Def : Deux morphismes $f, g : C \to C'$ de complexes de chaînes sont **homotopes** s'il existe des morphismes $h_n : C_n \to C'_{n+1}$ $(n \geq 0)$ tels que

$$d'_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n .$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, shift right, "f_n"'] \arrow[d, shift left, "g_n"] \arrow[dl, "h_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r] & C'_n \arrow[r, "d'_n"'] & C'_{n-1} & \cdots
\end{tikzcd}$$

On dit que $(h_n)_{n \geq 0}$ est une **homotopie** entre f et g.

Lemme : Si $f, g : C \to C'$ sont homotopes, alors

$$H_n(f) = H_n(g) : H_n(C) \longrightarrow H_n(C') .$$

Preuve : Soit $(h_n)_{n \geq 0}$ une homotopie. Soit $\alpha \in Z_n(C)$

$$f_n(\alpha) - g_n(\alpha) = d'_{n+1} \circ h_n(\alpha) + h_{n-1} \circ \underbrace{d_n(\alpha)}_{0}$$

$$= d'_{n+1} \circ h_n(\alpha) \in B_n(C') .$$

Donc $[f_n(\alpha)] = [g_n(\alpha)]$ dans $H_n(C')$.

Def : Une suite exacte courte $0 \to C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \to 0$ de complexes de chaînes est la donnée de deux morphismes f et g tels que $0 \to C_n \xrightarrow{f_n} D_n \xrightarrow{g_n} E_n \to 0$ soit exacte pour $n \geq 0$.

$$\left(\text{i.e. } \operatorname{Ker} f_n = 0 \ , \ \operatorname{Ker} g_n = \operatorname{Im} f_n \ , \ \operatorname{Im} g_n = E_n\right).$$

Def / Prop : A une telle suite exacte courte de complexes de chaînes, on associe une suite exacte longue de groupes abéliens :

$$\cdots \to H_{n+1}(E) \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(C) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(D) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(E) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(C) \to \cdots \quad (*)$$

où les applications connectantes δ_n sont définies dans la preuve.

Preuve : Chasse au diagramme !

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & D_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "g_n"] & D_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & E_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

• Définition des δ_n : Soit $z \in Z_n(E)$.

Comme g_n surjective, on peut choisir $y \in D_n$ tel que $g_n(y) = z$

Alors $g_{n-1} \circ d_n(y) = d_n(g_n(y)) = d_n(z) = 0$, donc il existe $x \in C_{n-1}$ (unique par injectivité de f_{n-1}) tel que $f_{n-1}(x) = d_n(y)$.

Comme $f_{n-2}(d_{n-1}(x)) = d_{n-1}(f_{n-1}(x)) = d_{n-1}d_n(y) = 0$ et f_{n-2} est injective, on a $d_{n-1}(x) = 0$.

Montrons que la classe de x dans $H_{n-1}(C)$ ne dépend pas du choix de y. Si $y' \in D_n$ est un autre choix, $y' = y + f_n(w)$ pour un $w \in C_n$. Alors

$$
\begin{aligned}
d_n(y') &= d_n(y) + d_n(f_n(w)) \\
&= f_{n-1}(x) + f_{n-1}(d_n(w)). \\
&= f_{n-1}(x + d_n(w)).
\end{aligned}
$$

On a donc $x' = x + d_n(w)$. De sorte que $[x'] = [x] \in H_{n-1}(C)$.

Si $z = d_{n+1}(v)$ est un bord, on lifte v en $u \in D_{n+1}$. On peut dans au-dessus prendre $y = d_{n+1}(u)$, et alors $d_n(y) = 0$ donc $x = 0$.

L'application $\begin{array}{rcl} \delta_n : H_n(E) & \longrightarrow & H_{n-1}(C) \\ {[z]} & \longmapsto & {[x]} \end{array}$ est donc bien définie !

• Exactitude en $H_n(E)$.

* Si $[z]$ est dans l'image de $H_n(g)$, on peut choisir, dans la construction de δ, $y \in Z_n(D)$. Alors $d_n(y)=0$ donc $x=0$, et $\delta_n([z])=0$.

* Si $\delta_n([z])=0$, alors, avec les notations de la construction de δ_n, $x=d_n(t)$ pour $t \in C_n$, et $d_n(y) = f_{n-1}(x) = f_{n-1}(d_n t) = d_n(f_n(t))$.
Comme $g_n(y-f_n(t)) = g_n(y) = z$, on a $[z] = H_n(g)\left([y-f_n(t)]\right)$.

• Exactitude en $H_n(D)$

* Si $x \in Z_n(C)$, $H_n(g) \circ H_n(f)([x]) = [g \circ f(x)] = [0] = 0$.

* Si $y \in Z_n(D)$, est tel que $g_n(y) = d_{n+1} z$, pour $z \in E_{n+1}$, alors on choisit $w \in D_{n+1}$ tel que $g_{n+1}(w) = z$ et on pose $y' = y - d_{n+1}(w)$.
Comme $g_n(y') = 0$, il existe $x \in C_n$ avec $f_n(x) = y'$.
Comme $f_{n-1} d_n(x) = d_n y' = 0$ et f_{n-1} injective, $d_n x = 0$.
On a alors $H_n(f)([x]) = [f_n(x)] = [y'] = [y]$ dans $H_n(D)$.

• Exactitude en $H_n(C)$: même genre d'arguments.

Prop : Ces suites exactes longues sont naturelles en la suite exacte courte, au sens où un morphisme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D' \arrow[r, "f'"'] & E' \arrow[r, "g'"'] & F' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de suites exactes courtes de complexes (au sens où $f' \circ \alpha = \beta \circ f$ et $g' \circ \beta = \gamma \circ g$) induit un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(D) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(\alpha)"] & H_n(E) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(\beta)"] & H_n(F) \arrow[r, "\delta_n"] \arrow[d, "H_n(\gamma)"] & H_{n-1}(D) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\alpha)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(D') \arrow[r] & H_n(E') \arrow[r] & H_n(F') \arrow[r, "\delta_n"'] & H_{n-1}(D') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(au sens où les carrés commutent).

Preuve : C'est la commutativité de qui est non triviale.

Si z, y, x ont servi à construire $\delta_n([z]) = [x]$ (notations comme au-dessus), alors $\gamma(z)$, $\beta(y)$ et $\alpha(x)$ peuvent servir à construire $\delta_n([\gamma(z)])$ qui vaut donc $[\alpha(x)]$.