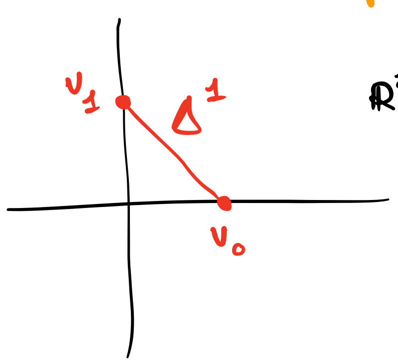
3.2 Définition de l'homologie singulière.

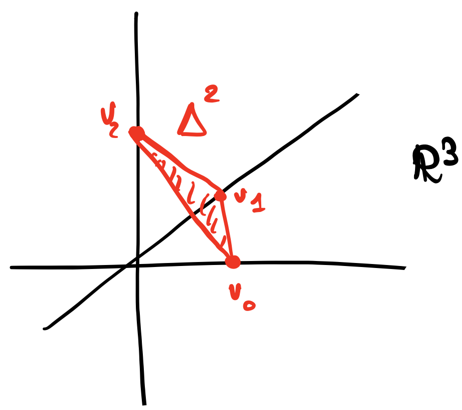
Def : Le *n-simplexe standard* est

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0 \text{ et } \sum_i t_i = 1\}.$$

C'est l'enveloppe convexe de ses $n+1$ sommets $v_0, \dots, v_n$,

où $v_i = (0, \dots, 0, \underset{i^{\text{ème}} \text{ position}}{1}, 0, \dots, 0)$





Les $n+1$ faces de Δ^n sont les images des *applications faces*

$$\phi_i : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n$$
$$(t_0, \dots, t_{n-1}) \longmapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1})$$

Déf : Soit X un espace topologique. Un n-simplexe singulier dans X est une application C^0 $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$.

Soit A un groupe abélien. On note $C_n(X,A) = \bigoplus_{\sigma : \Delta^n \to X} A$ le groupe abélien formé des sommes formelles finies $\sum_j a_j \sigma_j$, $a_j \in A$, $\sigma_j : \Delta^n \longrightarrow X$.

Ses éléments sont les n-chaînes singulières de X à coefficients dans A.

ex : $A = \mathbb{Z}$: $C_n(X,A)$ est donc le groupe abélien libre engendré par les n-simplexes singuliers.

A un corps $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \dots)$: $C_n(X,A)$ est donc un A-espace vectoriel de base les n-simplexes singuliers

$A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \dots$

Déf : le bord d'un n-simplexe singulier est $\partial_n(\sigma) = \sum_i (-1)^i \sigma \circ \phi_i$.

On obtient un morphisme de groupes abéliens

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(X,A) &\longrightarrow C_{n-1}(X,A) \\ \sum_j a_j \sigma_j &\longmapsto \sum_j a_j \partial_n(\sigma_j) \end{aligned}$$

Lemme : $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

Preuve : $\partial_{n-1} \circ \partial_n (\sigma) = \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma \circ \phi_i \right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sigma \circ \phi_i \circ \phi_j$

Pour $i \leq j$, $\phi_i \circ \phi_j = \phi_{j+1} \circ \phi_i$ comme applications $\Delta^{n-2} \to X$. Ainsi,

$\sigma \circ \phi_i \circ \phi_j = \sigma \circ \phi_{j+1} \circ \phi_i$. Comme ils sont affectés de signes opposés, la somme s'annule.

Def : Le complexe des chaînes singulières de X à coefficients dans A est

$$C(X,A) = (C_n(X,A), \partial_n).$$

Les groupes d'homologie singulière de X à coefficients dans A sont

$$H_n(X,A) := H_n(C(X,A)).$$

ex : $H_0(X,A) = C_0(X,A) / \partial_1 C_1(X,A)$

$$= \mathrm{Coker}\left[\bigoplus_{\sigma : \Delta^1 \to X} A \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} A \right]$$

$$\sigma \longmapsto \sigma(v_1) - \sigma(v_0)$$

$$= \bigoplus_{\substack{\text{composantes connexes} \\ \text{par arcs de } X}} A.$$

<u>Remarque</u> : • Poincaré (1895) : première version de l'homologie singulière (Ne considère que des espaces "triangulés". Leur associe des invariants qui sont des nombres.)

• Noether (1925) : il s'agit de groupes ! Ouvre la voie à l'algébrisation de la théorie.

• Eilenberg (1944) : définition moderne.