3.3 Propriétés de l'homologie singulière.

(On fixe toujours un groupe abélien A)

3.3.1 Homologie du point

Prop : Si X est un point, $\begin{cases} H_0(X,A) = A \\ H_n(X,A) = 0, & n>0. \end{cases}$

Preuve : X admet une unique n-chaîne singulière constante $\sigma_n : \Delta^n \to X$.

Pour $a \in A$, $\partial_n(a\sigma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a\, \sigma_n \circ \phi_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a \sigma_{n-1} = \begin{cases} a\sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Alors $C(X,A) = \left[\cdots \xrightarrow{0} A\sigma_4 \xrightarrow{\sim} A\sigma_3 \xrightarrow{0} A\sigma_2 \xrightarrow{\sim} A\sigma_1 \xrightarrow{0} A\sigma_0 \to 0 \right]$.

L'homologie de ce complexe est nulle en degré >0 et A en degré 0.

3.3.2 Fonctorialité.

Si $f : X \to X'$ application C^0, on définit $f_* : C_n(X,A) \to C_n(X',A)$

$$\sum_j a_j \sigma_j \longmapsto \sum_j a_j f\circ\sigma_j$$

Comme $f_*\partial_n(a\sigma) = \sum_i (-1)^i a\, f\circ\sigma\circ\phi_i = \partial_n(f_* a\sigma)$, on a $f_*\partial_n = \partial_n f_*$.

D'où un morphisme $f_* : C(X,A) \to C(X',A)$ de complexes de chaînes

et une application induite $H_n(f_*)$, notée $\boxed{f_* : H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X',A)}$.

3.3.3 Invariance par homotopie

Prop : Si $f, g : X \to X'$ C^0 sont homotopes, alors
$$f_* = g_* : H_n(X,A) \to H_n(X',A).$$

Corollaire : Si $f : X \to X'$ est une équivalence d'homotopie, $f_* : H_n(X,A) \simeq H_n(X',A)$.
Par conséquent, si X contractile, $H_n(X,A) \simeq H_n(pt,A) = \begin{cases} A & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n>0 \end{cases}$.

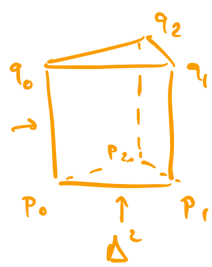
Preuve de la Prop : Soit $H : [0,1] \times X \to X'$ une homotopie entre f et g.

Soit $\sigma : \Delta^n \to X$ un n-simplexe singulier.

Considérons $H \circ (Id \times \sigma) : \underbrace{[0,1] \times \Delta^n} \to X'$.

ceci est un prisme

$[0,1] \to$



de sommets $p_i = (0, v_i)$

$q_i = (1, v_i)$

On subdivise ce prisme en $(n+1)$-simplexes en notant, pour $0 \leq i \leq n$,

$$P_{n,i} : \Delta^{n+1} \longrightarrow [0,1] \times \Delta^n$$
$$(t_0, \dots, t_{n+1}) \longmapsto t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_i p_i + t_{i+1} q_i + t_{i+2} q_{i+1} + \dots + t_{n+1} q_n$$

l'application affine envoyant $v_0, \dots, v_{n+1}$ sur $p_0, p_1, \dots, p_i, q_i, q_{i+1}, \dots, q_n$.

Notons $h_n(z) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left[H \circ (\mathrm{Id} \times z) \circ P_{n,i}\right]$

J'affirme que les $h_n : C_n(X, A) \longrightarrow C_{n+1}(X', A)$ forment une

$$\sum_j a_j z_j \longmapsto \sum a_j h_n(z_j)$$

homotopie entre f_* et $g_* : C(X,A) \longrightarrow C(X',A)$.

Il faut montrer $\underbrace{\partial_{n+1} P_n(az)}_{\text{bord du prisme}} + \underbrace{P_{n-1}\partial_n(az)}_{\text{côtés du prisme}} = \underbrace{g_*(az)}_{\text{face supérieure du prisme}} - \underbrace{f_*(az)}_{\text{face inférieure du prisme}}$.

$$\text{Or } \partial_{n+1} P_n(az) = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} a \left[H \circ (\mathrm{Id} \times z) \circ \underbrace{P_{n,i} \circ \Phi_j}_{\text{" } j\text{ème face de } P_{n,i} \text{"}}\right]$$

Le terme $i=j=0$ est $g_*(az)$

Le terme $i=n$, $j=n+1$ est $f_*(az)$

Les termes $(i,j)=(k,k)$ et $(i,j)=(k-1,k)$ se compensent car $P_{n,k} \circ \Phi_k = P_{n,k-1} \circ \Phi_k$ et que les signes sont opposés

Les autres termes sont exactement ceux apparaissant dans $-P_n\partial_n(az)$

Ainsi, f_* et g_* sont homotopes, de sorte que $f_* = g_* : H_n(X,A) \longrightarrow H_n(X',A)$.

3.3.4 Homologie relative

Soit $Y \subseteq X$ un sous-espace.

On pose $C_n(X,Y,A) = C_n(X,A)/C_n(Y,A)$.

L'application bord $\partial_n : C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$ passe au quotient en $\partial_n : C_n(X,Y,A) \longrightarrow C_{n-1}(X,Y,A)$.

Déf: Le complexe de chaînes $C(X,Y,A) = (C_n(X,Y,A), \partial_n)$ est le complexe singulier de la paire (X,Y).

Ses groupes d'homologie $H_n(X,Y,A)$ sont les groupes d'homologie relative de (X,Y) à coefficients dans A.

Si $f : X \to X'$ est telle que $f(Y) \subseteq Y'$ alors $f_* : C(X,A) \to C(X',A)$ passe au quotient en $f_* : C(X,Y,A) \to C(X',Y',A)$ donnant lieu à

$$f_* : H_n(X,Y,A) \longrightarrow H_n(X',Y',A).$$

Prop: Si $H : [0,1] \times X \to X'$ avec $H([0,1] \times Y) \subseteq Y'$ homotopie entre f et g, alors $f_* = g_* : H_n(X,Y,A) \to H_n(X',Y',A)$.

Preuve: L'homotopie $h_n : C_n(X,A) \longrightarrow C_{n+1}(X',A)$ du § 3.3.3 passe au quotient en une homotopie $h_n : C_n(X,Y,A) \to C_{n+1}(X',Y',A)$ entre f_* et $g_* : C_n(X,Y,A) \to C_n(X',Y',A)$.

Si $Z \subseteq Y \subseteq X$, le noyau de la surjection $C_n(X,A)/C_n(Z,A) \to C_n(X,A)/C_n(Y,A)$ est $C_n(Y,A)/C_n(Z,A)$. On obtient une suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \to C(Y,Z,A) \to C(X,Z,A) \to C(X,Y,A) \to 0$$

qui donne lieu à la suite exacte longue d'homologie relative de (X,Y,Z) :

$$\cdots \to H_{n+1}(X,Y,A) \to H_n(Y,Z,A) \to H_n(X,Z,A) \to H_n(X,Y,A) \to H_{n-1}(Y,Z,A) \to \cdots$$

Quand $Z = \emptyset$, on obtient la suite exacte longue d'homologie relative de (X,Y) :

$$\boxed{\cdots \to H_{n+1}(X,Y,A) \to H_n(Y,A) \to H_n(Z,A) \to H_n(X,Y,A) \to H_{n-1}(Y,A) \to \cdots}$$

3.3.5 Structure de module.

Si A est un R-module (R anneau commutatif), alors tous les groupes abéliens qui apparaissent ($C_n(X,A)$, $H_n(X,A)$, variante relatives...) sont naturellement des R-modules, et toutes les applications entre eux qui interviennent ($H_n(f)$, δ_n, ...) sont R-linéaires.

ex : $R = A = k$ un corps : ce sont alors des k-espaces vectoriels et des applications k-linéaires.