3.4 Petites chaînes et applications

3.4.1 Le théorème des petites chaînes.

Si $\mathcal{U} = \{U_i\}$ est une collection de sous-ensembles de X, on note

$$C_n^{\mathcal{U}}(X,A) = \Big\{ \sum a_j \sigma_j \in C_n(X,A) \;\Big|\; \underset{\text{a image incluse dans un des } U_i}{\text{chaque } \sigma_j : \Delta^n \to X} \Big\}.$$

Ces groupes forment un complexe $C^{\mathcal{U}}(X,A) = (C_n^{\mathcal{U}}(X,A), \partial_n)$, dont on note l'homologie $H_n^{\mathcal{U}}(X,A)$.

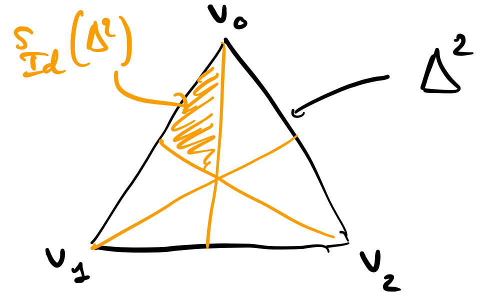
Th (petites chaînes) : Si les intérieurs des U_i recouvrent X, alors l'inclusion

$$i : C^{\mathcal{U}}(X,A) \subseteq C(X,A)$$

est une équivalence d'homotopie de complexes (au sens où il existe un morphisme de complexes $\rho : C(X,A) \to C^{\mathcal{U}}(X,A)$ tel que $i \circ \rho$ et $\rho \circ i$ sont homotopes à l'identité).

Corollaire : $i_* : H_n^{\mathcal{U}}(X,A) \xrightarrow{\sim} H_n(X,A)$.

Preuve du th : (On fait $A = \mathbb{Z}$ pour simplifier)



Etape 1 : Subdivision barycentrique

Pour $\alpha \in \mathfrak{S}_{n+1}$, on note $s_\alpha : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$

l'application affine envoyant $v_0, \dots, v_n$ sur $v_{\alpha(0)}, \frac{v_{\alpha(0)}+v_{\alpha(1)}}{2}, \dots, \frac{v_{\alpha(0)}+\dots+v_{\alpha(n)}}{n+1}$

i.e. $s_\alpha(t_0, \dots, t_{n+1}) = t_0 v_{\alpha(0)} + t_1 \frac{v_{\alpha(0)}+v_{\alpha(1)}}{2} + \dots + t_{n+1} \frac{v_{\alpha(0)}+\dots+v_{\alpha(n)}}{n+1}$.

Si $\sigma : \Delta^n \longrightarrow X$ simplexe singulier, on pose

$$S_n(\sigma) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_{n+1}} \varepsilon(\alpha)\, \sigma \circ s_\alpha$$

signature

qui s'étend par linéarité en l'opérateur de subdivision

$$S_n : C_n(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_n(X, \mathbb{Z})$$
$$\sum_j a_j \sigma_j \longmapsto \sum_j a_j S(\sigma_j)$$

Un calcul montre que $S_n \circ \partial = \partial \circ S_n$, i.e. que $S = (S_n)$ est un morphisme de complexes

Etape 2 : S est homotope à l'identité

On construit $h_n : C_n(X,\mathbb{Z}) \to C_{n+1}(X,\mathbb{Z})$ tels que $\begin{cases} \partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = \mathrm{Id} - S_n \,, \\ h_n \circ f_* = f_* \circ h_n \,,\ f : X \to Y \ C^0. \end{cases}$

- Récurrence sur $n \geq 0$. Comme $S_0 = \mathrm{Id}$, on peut prendre $h_0 = 0$.
- Soit $n \geq 1$. Appliquons l'hypothèse de récurrence à $\partial_n i_n$, $i_n : \Delta^n \to \Delta^n$: l'identité.

$$\partial_n h_{n-1} \partial_n i_n + h_{n-2} \underbrace{\partial_{n-1} \partial_n i_n}_{=0} = \partial_n i_n - \underbrace{S_{n-1} \partial_n i_n}_{\partial_n S_n i_n} .$$

Ainsi, $\partial_n \left(i_n - S_n i_n - h_{n-1} \partial_n i_n = 0 \right)$.

Comme Δ^n est contractile, $H_n(\Delta^n, \mathbb{Z}) = 0$ et il existe $c_{n+1} \in C_{n+1}(X,\mathbb{Z})$ tel que

(*) $\quad i_n - S_n i_n - h_{n-1} \partial_n i_n = \partial_{n+1} c_{n+1}$

- Pour $\sigma : \Delta^n \to X$ simplexe singulier, on pose $h_n(\sigma) = \sigma_* c_{n+1}$.

On étend cette définition par linéarité : $h_n : C_n(X,\mathbb{Z}) \to C_{n+1}(X,\mathbb{Z})$

$$\sum a_j \sigma_j \longmapsto \sum a_j h_n(\sigma_j)$$

- Appliquons σ_* à (*) : il vient $\sigma - S_n(\sigma) = h_{n-1} \partial_n \sigma + \partial_{n+1} h_n \sigma$

car σ_* commute à ∂, S, h.

- Si $f : X \to Y$ C^0, $f_* h_n(\sigma) = f_* \sigma_* c_{n+1} = (f \circ \sigma)_* c_{n+1} = h_n(f_* \sigma)$.

Etape 3 : Pour $k \geq 0$, S^k est homotope à Id

Posons $h^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} h S^i$

Alors $\partial h^{(k)} + h^{(k)} \partial = \sum_{i=0}^{k-1} \partial h S^i + h S^i \partial$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (\partial h + h \partial) S^i$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} (\mathrm{Id} - S) . S^i = S^k$$

Etape 4 : Pour $\sigma : \Delta^n \to X$ simplexe singulier, et $k \gg 0$
$(S_n)^k(\sigma) \in C^{\mathcal{U}}(X, \mathbb{Z})$.

Soit $V_i = \sigma^{-1}(\mathring{U}_i)$. Comme Δ^n est compact, il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule de rayon ε de Δ^n est incluse dans un des V_i.

$S_n^k(\sigma)$ est combinaison linéaire des $\sigma \circ \underbrace{S_{\alpha_1} \circ \dots \circ S_{\alpha_k}}$, $\alpha_i \in \mathfrak{S}_{n+1}$.

l'image de cette application

a diamètre $\leq \mathrm{diam}(\Delta^n) . \left(\frac{n}{n+1}\right)^k < \varepsilon$ pour $k \gg 0$ par le

Lemme : $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ Alors

$$\mathrm{diam}\, \mathrm{Conv}\left(x_0, \frac{x_0+x_1}{2}, \dots, \frac{x_0+\dots+x_n}{n+1}\right) \leq \frac{n}{n+1} \mathrm{diam}\, \mathrm{Conv}(x_0, \dots, x_n).$$

Preuve : Conséquence de l'inégalité triangulaire !

Alors chaque terme apparaissant dans $S_n^k(\sigma)$ a image incluse dans un des $\mathring{U}_i$.

Étape 5 : Conclusion

Si $\sigma : \Delta^n \to X$ simplexe singulier, on note $k(\sigma)$ le plus petit k tel que $S_n^{k(\sigma)}(\tau) \in C^{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})$ pour τ de la forme $\sigma \circ \phi_{j_1} \circ \dots \circ \phi_{j_r}$.

On pose $H(\sigma) = h^{(k(\sigma))}(\sigma)$.

Comme $\partial h^{(k(\sigma))}_{\sigma} + h^{(k(\sigma))} \partial \sigma = \sigma - S^{k(\sigma)}(\sigma)$,

$$(*) \quad \partial H(\sigma) + H\partial(\sigma) = \sigma - \underbrace{\left[S^{k(\sigma)}(\sigma) + h^{(k(\sigma))}(\partial\sigma) - H(\partial\sigma)\right]}_{:= \rho_n(\sigma)}$$

- $\rho_n(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})$. $*$ $S^{k(\sigma)}(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})$ par déf. de $k(\sigma)$

  $*$ Soit τ un simplexe intervenant dans $\partial\sigma$. Il est de la forme $\sigma \circ \phi_j$ et on a donc $k(\tau) = k(\sigma\circ\phi_j) \leq k(\sigma)$. Ainsi :

$$h^{(k(\sigma))}(\tau) - H(\tau) = \left(h^{(k(\sigma))} - h^{(k(\tau))}\right)(\tau)$$
$$= \sum_{i=k(\tau)}^{k(\sigma)-1} h\, \underbrace{S^i(\tau)}_{\in C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X,A)} \in C_n^{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z}) \text{ car } h \text{ préserve } C_n^{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z}).$$

- $\rho\partial = \partial\rho$. $\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial H \partial\sigma = \rho\partial(\sigma)$

  deux applications de $(*)$

- $\rho \circ i = \mathrm{Id}$ car si $\sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X,\mathbb{Z})$, $k(\sigma) = k(\partial\sigma) = 0$ d'où $\rho(\sigma) = \sigma$.

- $i \circ \rho$ homotope à Id par $(*)$