3.4.2 Mayer-Vietoris

Th (Mayer-Vietoris) Soit X un espace topologique et $Y, Z \subseteq X$ tels que $\mathring{Y} \cup \mathring{Z} = X$.

Notons $a : Y \cap Z \hookrightarrow Y$, $b : Y \cap Z \hookrightarrow Z$, $c : Y \hookrightarrow X$, $d : Z \hookrightarrow X$ les inclusions.

Alors il existe une suite exacte longue :

$$\dots \to H_{k+1}(X,A) \to H_k(Y \cap Z, A) \xrightarrow[(a_*, -b_*)]{} H_k(Y,A) \oplus H_k(Z,A) \xrightarrow[c_* + d_*]{} H_k(X,A) \to H_{k-1}(Y \cap Z, A) \to \dots$$

Preuve : Posons $\mathcal{U} = \{Y, Z\}$. On a une suite exacte courte de complexes de chaînes :

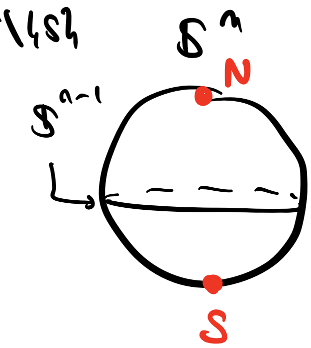
$$0 \to C(Y \cap Z, A) \xrightarrow[(a_*, -b_*)]{} C(Y,A) \oplus C(Z,A) \xrightarrow[c_* + d_*]{} C^{\mathcal{U}}(X,A) \to 0$$

La suite longue associée et les isomorphismes $H_k^{\mathcal{U}}(X,A) \simeq H_k(X,A)$ donnés par les petites chaînes fournissent la suite longue voulue.

Th: $H_k(S^n, A) = \begin{cases} A \oplus A & \text{si } k = n = 0 \\ A & \text{si } n > 0 \text{ et } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Preuve: On a déjà traité $k=0$ et $n=0$. Récurrence sur n.

On applique Mayer-Vietoris à $X = S^n$, $Y = S^n \setminus \{N\}$, $Z = S^n \setminus \{S\}$
contractiles



où $X \cap Y$ se rétracte sur S^{n-1}.

On déduit les suites exactes :

$$\begin{cases} 0 \to H_n(S^n, A) \to \underset{}{\overset{A}{\overset{\parallel}{H_{n-1}(S^{n-1}, A)}}} \to 0 & \\ 0 \to H_k(S^n, A) \to \underset{\underset{0}{\parallel}}{H_{k-1}(S^{n-1}, A)} & (0 < k \neq n) \end{cases} \quad \text{si } n \geq 1$$

$$(x, y) \longmapsto (x-y, x-y)$$

$$\text{et } \begin{cases} 0 \to H_1(S^1, A) \to \overset{A \oplus A}{\overset{\parallel}{H_0(S^0, A)}} \to \overset{A \oplus A}{\overset{\parallel}{H_0(X, A) \oplus H_0(Y, A)}} & \\ 0 \to H_k(S^1, A) \to \underset{\underset{0}{\parallel}}{H_{k-1}(S^0, A)} & (k \geq 2) \end{cases} \quad \text{si } n = 1$$

Le théorème s'en déduit.

Corollaire: Pour $n \geq 0$, S^n n'est pas contractile.

3.4.3 Excision

Th (excision): Soient $Z \subseteq Y \subseteq X$ tels que $\overline{Z} \subseteq \mathring{Y}$.

Alors l'inclusion $(X-Z, Y-Z) \hookrightarrow (X,Y)$ induit des isomorphismes

$$H_n(X-Z,Y-Z,A) \xrightarrow{\sim} H_n(X,Y,A) \quad \text{pour tout } n.$$

Preuve: Posons $\mathcal{U} = \{Y, X-Z\}$.

Le morphisme de suite courte de complexes:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C(Y,A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^{\mathcal{U}}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & \overbrace{C^{\mathcal{U}}(X,A)/C(Y,A)}^{C} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C(Y,A) \arrow[r] & C(X,A) \arrow[r] & \underbrace{C(X,A)/C(Y,A)}_{D} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induit:

$$\begin{tikzcd}
H_k(Y,A) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_k^{\mathcal{U}}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "\wr\ \text{petite chaînes}"] & H_k(C) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & H_{k-1}(Y,A) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H_{k-1}^{\mathcal{U}}(X,A) \arrow[d, "\wr\ \text{petites chaînes}"] \\
H_k(Y,A) \arrow[r] & H_k(X,A) \arrow[r] & H_k(D) \arrow[r] & H_{k-1}(Y,A) \arrow[r] & H_{k-1}(X,A)
\end{tikzcd}$$

de sorte que ϕ_* isomorphisme par lemme des 5 (TD 8 Ex 1).

Comme $C = C(X-Z,A)/C(Y-Z,A)$, il vient:

$$H_k(X-Z,Y-Z,A) = H_k(C) \xrightarrow{\sim} H_k(D) = H_k(X,Y,A).$$

Voici une application :

Th (Invariance de la dimension, Brouwer 1912)

Soient M et N des variétés topologiques de dimension m et n.
Si M et N sont homéomorphes, alors $m = n$.

Preuve : $f : M \xrightarrow{\sim} N$ homéo, $x \in M$.

Alors

$$\begin{array}{ccc} f_* : H_k(M, M - \{x\}, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\sim} & H_k(N, N - \{f(x)\}, \mathbb{Z}) \\ \wr\wr \ \text{excision} & & \wr\wr \ \text{excision} \\ H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) & & H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) \end{array}$$

Or le calcul de $H_k(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) = H_k(S^{m-1}, \mathbb{Z})$
et la suite exacte longue de la paire $(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\})$
montre que

$$H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = m \\ 0 & \text{si } k \neq m \end{cases}$$

On déduit donc que $m = n$.

L'excision est souvent appliquée sous la forme suivante :

Déf : $Y \subseteq X$ fermé. On dit que (X,Y) est une bonne paire s'il existe un voisinage U de Y dans X qui se rétracte par déformation forte sur Y.

ex : (cf TD10) : Si X CW-complexe et $Y \subseteq X$ sous-CW-complexe, alors (X,Y) est une bonne paire.

Prop : Si (X,Y) bonne paire, alors l'application quotient $(X,Y) \to (X/Y, Y/Y)$ induit des isomorphismes $H_n(X,Y,A) \to H_n(X/Y, Y/Y, A)$ pour tout n.

Preuve : Soit $H : [0,1] \times U \to U$ une rétraction par déformation forte d'un voisinage U de Y sur Y. Elle passe au quotient en une rétraction par déformation forte $[0,1] \times U/Y \to U/Y$ de U/Y sur Y/Y.

On déduit de l'invariance par homotopie que

$$0 = H_n(Y,Y,A) \xrightarrow{\sim} H_n(U,Y,A)$$

et

$$0 = H_n(Y/Y, Y/Y, A) \xrightarrow{\sim} H_n(U/Y, Y/Y, A).$$

Le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H_n(X,Y,A) \arrow[r, "\sim", "\text{suite longue du triplet } (X,U,Y)"'] \arrow[d] & H_n(X,U,A) \arrow[d] & H_n(X-Y, U-Y, A) \arrow[l, "\sim"', "\text{excision}"] \arrow[d, "\wr", "\text{les paires } (X-Y,U-Y) \text{ et } (X/Y - Y/Y, U/Y - Y/Y) \text{ sont les mêmes !}"'] \\
H_n(X/Y, Y/Y, A) \arrow[r, "\sim", "\text{suite longue du triplet } (X/Y, U/Y, Y/Y)"'] & H_n(X/Y, U/Y, A) & H_n(X/Y - Y/Y, U/Y - Y/Y, A) \arrow[l, "\sim"', "\text{excision}"]
\end{tikzcd}$$

montre alors que $H_n(X,Y,A) \xrightarrow{\sim} H_n(X/Y, Y/Y, A)$.

3.4.4 Le théorème de Jordan-Brouwer

Th (Jordan-Brouwer) : Soit $0 \leq m < n$ et $f : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^n$ homéomorphisme sur son image. Alors :

$$H_k(\mathbb{S}^n - f(\mathbb{S}^m), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \text{ si } k=0 \text{ et } m = n-1 \\ \mathbb{Q} \text{ si } m < n-1 \text{ et } k \in \{0, n-m-1\} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Corollaire : Si $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$ homéomorphisme sur son image, alors $X = \mathbb{S}^n - f(\mathbb{S}^{n-1})$ a deux composantes connexes.

Preuve du corollaire : $H_k(X, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^2$ donc X a deux composantes connexes par arcs. Comme X ouvert de $\mathbb{S}^n$, X est localement connexe par arcs. Ses composantes connexes par arcs sont donc ses composantes connexes.

On a besoin de :

Proposition : Soit $0 \leq m \leq n$ et $f : [0,1]^m \to \mathbb{S}^n$ homéomorphisme sur son image. Alors $H_k(\mathbb{S}^n - f([0,1]^m), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} \text{ si } k=0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

Prop $\Rightarrow$ Th : Récurrence sur m.

- Pour $m = 0$, $\mathbb{S}^n - f(\mathbb{S}^m) \simeq \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-1}$.
- Pour $m \geq 1$, appliquons Mayer-Vietoris avec $\begin{cases} U = \mathbb{S}^n - f(\text{hémisphère nord}) \\ V = \mathbb{S}^n - f(\text{hémisphère sud}) \end{cases}$

$\begin{cases} H_k(U,\mathbb{Q}) \text{ et } H_k(V,\mathbb{Q}) \text{ sont connus par la proposition} \\ H_k(U\cup V,\mathbb{Q}) \text{ est connu par hypothèse de récurrence} \end{cases}$

Ces informations permettent de calculer $H_k(U\cap V,\mathbb{Q})$. Par exemple, dans le cas le plus intéressant où $k=0$ et $m=n-1$, il vient :

$$\underset{\substack{\| \\ 0}}{H_1(U,\mathbb{Q})\oplus H_1(V,\mathbb{Q})} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Q}}}{H_1(U\cup V,\mathbb{Q})} \to H_0(U\cap V,\mathbb{Q}) \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}}}{H_0(U,\mathbb{Q})\oplus H_0(V,\mathbb{Q})} \to \underset{\substack{\| \\ \mathbb{Q}}}{H_0(U\cup V,\mathbb{Q})} \to 0$$

Ce $\mathbb{Q}$-espace vectoriel a donc dimension 2

<u>Remarque</u>: On est intéressé par H_0 mais on utilise H_k pour tout k !!!

<u>Preuve de la proposition</u>: Récurrence sur m.

- Pour $m=0$, $S^n - f([0,1]^m) \simeq \mathbb{R}^n$ est contractile.
- Pour $m\geq 1$, <u>supposons déjà $k>0$.</u>

Par l'absurde, soit $\alpha\in H_k(S^n - f([0,1]^m),\mathbb{Q})$ non nul, représenté par un cycle $\beta\in Z_k(S^n - f([0,1]^m),\mathbb{Q})$

On applique Mayer-Vietoris à $\begin{cases} U = S^n - f([0,1]^{m-1}\times[0,\frac{1}{2}]) \\ V = S^n - f([0,1]^{m-1}\times[\frac{1}{2},1]) \end{cases}$

$$\underset{\substack{\| \\ 0 \text{ par} \\ \text{hypothèse de récurrence}}}{H_{k+1}(U\cup V,\mathbb{Q})} \to H_k(U\cap V,\mathbb{Q}) \to H_k(U,\mathbb{Q})\oplus H_k(V,\mathbb{Q})$$

cette application est donc injective.

Ainsi l'image de α dans $H_k(U,\mathbb{Q})$ ou dans $H_k(V,\mathbb{Q})$ est non nulle.

Itérant cet argument on construit une suite décroissante $[0,1]=I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots$ d'intervalles fermés, I_j étant de longueur $\frac{1}{2^j}$, tels que l'image de α dans

$$H_k\left(S^n - f([0,1]^{n-1}\times I_j), \mathbb{Q}\right) \text{ est non nulle.}$$

Soit $p = \bigcap_j I_j$. Alors l'image de α dans

$$H_k\left(S^n - f([0,1]^{n-1}\times\{p\}), \mathbb{Q}\right) \text{ est non nulle car,}$$

si β était le bord d'une $(k+1)$-chaîne dans $S^n - f([0,1]^{n-1}\times\{p\})$, cette $(k+1)$-chaîne aurait image dans $S^n - f([0,1]^{n-1}\times I_j)$ pour $j \gg 0$ et α serait déjà nul ici.

Nous avons contredit l'hypothèse de récurrence !

Quand $k=0$, on argumente de manière similaire : si $x,y\in S^n - f([0,1]^n)$ sont dans deux composantes connexes par arcs distinctes, on construit une suite d'intervalles (I_j) comme ci-dessus telle que x,y sont encore dans deux composantes connexes par arcs distinctes de $S^n - f([0,1]^{n-1}\times I_j)$.

On déduit que x et y sont dans deux composantes connexes par arcs distinctes de $S^n - f([0,1]^{n-1}\times\{p\})$, ce qui contredit l'hypothèse de récurrence.