3.5 Homologie cellulaire.

3.5.1 Définition

Si X est un CW-complexe, on pose

- $C_n^{CW}(X,A) := H_n(\underbrace{X_n}_{n\text{-squelette de } X}, X_{n-1}, A)$

- $d_n := i_{n-1} \circ \delta_n$ où $\begin{cases} \delta_n : H_n(X_n, X_{n-1}, A) \to H_{n-1}(X_{n-1}, A) \\ i_{n-1} : H_{n-1}(X_{n-1}, A) \to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}, A) \end{cases}$

apparaissent dans les suites exactes longues d'homologie relative des paires (X_n, X_{n-1}) et (X_{n-1}, X_{n-2}).

- On a $d_n \circ d_{n+1} = i_{n-1} \circ \underbrace{\delta_n \circ i_n}_{=0} \circ \delta_{n+1} = 0$.

Def: $C^{CW}(X,A) := (C_n^{CW}(X,A), d_n)$ est le complexe cellulaire de X.

Son homologie $H_n^{CW}(X,A) := H(C^{CW}(X,A))$ est l'homologie cellulaire de X.

3.5.2 Comparaison avec l'homologie singulière.

Lemme : X CW-complexe.

(i) $H_k(X_m, X_{m-1}, A) = \begin{cases} \bigoplus_{m\text{-cellules de } X} A & \text{si } k = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(ii) Si $m < k$, $H_k(X_m, A) = 0$

(iii) Si $m > k$, l'inclusion $X_m \longrightarrow X$ induit un isomorphisme

$$H_k(X_m, A) \xrightarrow{\sim} H_k(X, A).$$

Preuve : (i) Soient $\left(g_i : D^m \longrightarrow X_m\right)_{i \in I_m}$ les m-cellules de X.

On a :

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[dr, "\text{contraction de } X_{m-1}"] & & \coprod_{i\in I_m} D^m \arrow[dl, "\text{contraction de } \coprod_{i\in I_m} \partial D^m"'] \\ & X_m/X_{m-1} \overset{\text{Homéo}}{\simeq} \left(\coprod_{i\in I_m} D^m\right) \Big/ \coprod_{i\in I^m} \partial D^m & \end{tikzcd}$$

Le calcul de l'homologie d'une contraction (conséquence de l'excision, cf §3.4.3) montre que

$$H_k(X_m, X_{m-1}, A) \simeq H_k\left(X_m/X_{m-1}, X_{m-1}/X_{m-1}, A\right) = H_k\left(\coprod_{i\in I_m} D^m, \coprod_{i\in I_m} \partial D^m, A\right)$$

$$= \bigoplus_{i \in I_m} H_k(D^m, \partial D^m, A)$$

Or $H_k(D^n, \underbrace{\partial D^n}_{S^{n-1}}, A) = \begin{cases} A & \text{si } k=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ par la suite exacte longue d'homologie relative de $(D^n, \partial D^n)$ et calcul de l'homologie des sphères.

(ii) Les suites exactes :

$$\cdots \to H_{k+1}(X_n, X_{n-1}, A) \to H_k(X_{n-1}, A) \to H_k(X_n, A) \to H_k(X_n, X_{n-1}, A) \to \cdots$$

et (i) montrent que est un isomorphisme pour $k \notin \{n, n-1\}$.

Ainsi, pour $n < k$, $0 = H_k(X_0, A) \simeq H_k(X_1, A) \simeq \cdots \simeq H_k(X_{n-1}, A) \simeq H_k(X_n, A)$

(iii) Pour $n > k$, on a donc

(*) $H_k(X_n, A) \simeq H_k(X_{n+1}, A) \simeq \cdots \simeq H_k(X_m, A)$ pour $m > n$.

- La surjectivité de $H_k(X_n, A) \to H_k(X, A)$ résulte du fait qu'un k-cycle singulier de X a image (par compacité) dans $H_k(X_m, A)$ pour $m \gg 0$. Sa classe d'homologie provient donc, par (*), de $H_k(X_n, A)$.
- Si un k-cycle $\alpha \in Z_k(X_n, A)$ a classe d'homologie $[\alpha] \in H_k(X_n, A)$ triviale dans $H_k(X, A)$, donc il existe $\beta \in C_{k+1}(X, A)$ tel que $\alpha = \partial\beta$. Par compacité, $\beta \in C_{k+1}(X_m, A)$ pour $m \gg 0$, donc $[\alpha] = 0$ dans $H_k(X_m, A)$ et on déduit de (*) que $[\alpha] = 0$ dans $H_k(X_n, A)$.

Th (de comparaison) : Il y a un isomorphisme naturel

$$H_n(X,A) \xrightarrow{\sim} H_n^{CW}(X,A).$$

Preuve : Les suites longues d'homologie relative de (X_{n+1},X_n), (X_n,X_{n-1}) et (X_{n-1},X_{n-2}), combinées avec le lemme, indiquent :

$$\begin{tikzcd}
 & & H_n(X,A) = H_n(X_{n+1},A) \arrow[r] & 0 & \\
0 \arrow[r] & H_n(X_n,A) \arrow[ur] \arrow[dr, "i_n"] & & & \\
H_{n+1}(X_{n+1},X_n,A) \arrow[ur, "\delta_{n+1}"] \arrow[rr, "d_{n+1}"] & & H_n(X_n,X_{n-1},A) \arrow[rr, "d_n"] \arrow[dr, "\delta_n"] & & H_{n-1}(X_{n-1},X_{n-2},A) \\
 & & & H_{n-1}(X_{n-1},A) \arrow[ur, "i_{n-1}"] & \\
 & & 0 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
H_n(X,A) &= H_n(X_n,A)/\mathrm{Im}(\delta_{n+1}) \\
&= \mathrm{Im}(i_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1}) \\
&= \mathrm{Ker}(\delta_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1}) \\
&= \mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1}) = H_n^{CW}(X,A).
\end{aligned}$$

3.5.3 Fonctorialité.

Déf: Une application continue $f : X \to Y$ entre CW-complexes est *cellulaire* si $f(X_n) \subseteq Y_n$ pour tout $n \geq 0$.

Si $f : X \to Y$ application cellulaire entre CW-complexes, les pushforwards $f_* : H_n(X_n, X_{n-1}, A) \longrightarrow H_n(Y_n, Y_{n-1}, A)$ induisent un morphisme de complexe de chaînes

$$f_* : C^{CW}(X,A) \longrightarrow C^{CW}(Y,A)$$

par fonctorialité des suites exactes longues de paires. On note

$$f_* : H_n^{CW}(X,A) \to H_n^{CW}(Y,A)$$

les applications induites en homologie.

isomorphismes du théorème de comparaison.

Lemme: Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{\sim} & H_n^{CW}(X,A) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ H_n(Y,A) & \xrightarrow{\sim} & H_n^{CW}(Y,A) \end{array}$$

Preuve: Cela résulte de la commutation de

$$\begin{array}{ccc} H_n(X,A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y,A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n(X_n,A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y_n,A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(X_n,X_{n-1},A) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y_n,Y_{n-1},A). \end{array}$$

$\boxed{\text{Remarque : Toute application } C^0 \text{ entre CW-complexes est homotope à une application cellulaire!}}$

3.5.4 Conséquences

Prop : Soit X un CW-complexe fini et K un corps.

Alors $\dim_K H_k(X, K) \leq$ nombre de k-cellules de X.

Preuve : $H_k(X, K) = H_k^{CW}(X, K)$ est un sous-quotient de $H_k(X_k, X_{k-1}, K)$ dont la dimension sur K est le nombre de k-cellules de X.

Prop : Soit X une variété topologique compacte. Alors les K-espaces vectoriels $H_k(X, K)$ sont de dimension finie, et nuls pour $k \gg 0$.

Preuve : On sait que X est un rétracte d'un CW-complexe fini Y (voir §1.4). Par fonctorialité, $H_k(X, K)$ s'identifie à un sous-K-ev de $H_k(Y, K)$ qui est de dimension finie et nul pour $k \gg 0$ par la proposition précédente.