3.5.5 Le théorème du point fixe de Lefschetz-Hopf.

Th. : Soit X un CW-complexe fini, ou une variété topologique compacte. Soit $f : X \to X$ une application continue. Soit K un corps.

Si $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathrm{Tr}(f_* \circlearrowleft H_k(X, K)) \neq 0$,

Trace

par §3.5.4, ces K-ev sont de dim. finie et presque tous nuls.

alors f admet un point fixe.

Corollaire (Brouwer) : Toute application continue $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ admet un point fixe.

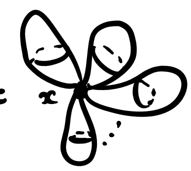
Preuve : $H_k(\mathbb{D}^n, K) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ K & \text{si } k = 0 \end{cases}$

et f_* agit sur $H_0(\mathbb{D}^n, K) = K$ par Id. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathrm{Tr}(f_* \circlearrowleft H_k(\mathbb{D}^n, K)) = 1 \neq 0.$$

Preuve du Th. Par contraposée, on suppose f sans point fixe.

Étape 1 : Cas où X est un CW-complexe fini, f est cellulaire, et toute cellule $\Gamma \subseteq X$ satisfait $f(\Gamma) \cap \Gamma = \emptyset$.

L'application induite par f sur $X_k / X_{k-1} = \bigvee_{\substack{k\text{-cellules} \\ \Delta \text{ de } X}} \overset{S^k}{\overset{\simeq}{\Delta/\partial\Delta}} =$ 

envoie la sphère $S^k = \Gamma/\partial\Gamma$ dans le bouquet $\bigvee_{\substack{k\text{-cellules} \\ \Delta \neq \Gamma}} \Delta/\partial\Delta$. Comme le K-espace-vectoriel $H_k(X_k, X_{k-1}, K) = H_k(X_k/X_{k-1}, *, K)$ est somme directe des $H_k(\Delta, \partial\Delta, K) = H_k(\Delta/\partial\Delta, x, K)$, l'application $f_* \circlearrowright H_k(X_k, X_{k-1}, K)$, vue dans une base adaptée à cette somme directe, a des zéros sur la diagonale. Ainsi, $\mathrm{Tr}(f_* \circlearrowright C_k^{CW}(X, K)) = 0$.

Donc $\sum_k (-1)^k \mathrm{Tr}(f_* \circlearrowright C_k^{CW}(X, K)) = 0$.

$$\| $$

$$\sum_k (-1)^k \mathrm{Tr}(f_* \circlearrowright H_k^{CW}(X, K)) = 0.$$ Cela conclut.

Lemme ci-dessous.

<u>Lemme</u> : Si $\phi : C \to C$ endomorphisme d'un complexe borné de K-espaces vectoriels de dim finie,

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k \mathrm{Tr}(\phi \circlearrowleft C_k) = \sum_{k\geq 0}(-1)^k \mathrm{Tr}(\phi \circlearrowleft H_k(C))$$

<u>Preuve</u> : Récurrence sur n.

- $n = 0$: évident
- Si $n \geq 1$, on pose $D_n = \mathrm{Ker}(d_n) = H_n(C)$, $E_n = C_n / D_n$

On a des suites exactes
$$\begin{cases} 0 \to D_n \to C_n \to E_n \to 0 \\ 0 \to E_n \to H_n(C') \to H_n(C) \to 0 \end{cases}$$

où $C' = [0 \to C_{n-1} \to \cdots \to C_0 \to 0]$.

Dans une base de C_n adaptée à D_n, $\mathrm{Mat}(\phi \circlearrowleft C_n) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat}(\phi \circlearrowleft D_n) & /// \\ \hline 0 & \mathrm{Mat}(\phi \circlearrowleft E_n) \end{array}\right)$

donc $\mathrm{Tr}(\phi \circlearrowleft C_n) = \mathrm{Tr}(\phi \circlearrowleft D_n) + \mathrm{Tr}(\phi \circlearrowleft E_n)$

De même $\mathrm{Tr}(\phi \circlearrowleft H_n(C')) = \mathrm{Tr}(\phi \circlearrowleft E_n) + \mathrm{Tr}(\phi \circlearrowleft H_n(C))$

Combinant ces égalités avec l'hypothèse de récurrence appliquée à C' montre le lemme

<u>Etape 2</u> : Si X est rétracte d'un CW-complexe fini V, $(i : X \to V,\ r : Y \to X)$, il suffit de démontrer le théorème pour l'espace Y et l'application $i \circ f \circ r$.

$$H_k(Y,K) = \underset{\substack{\uparrow\wr \\ H_k(X,K)}}{\mathrm{Im}(i_*)} \oplus \mathrm{Ker}(r_*) \quad \text{et } (i\circ f\circ r)_* \text{ agit sur}$$

$\mathrm{Im}(i_*)$ comme f_*, et sur $\mathrm{Ker}(r_*)$ par 0.

$$\text{Ainsi } \mathrm{Tr}\left((i\circ f\circ r)_* \circlearrowleft H_k(Y,K)\right) = \mathrm{Tr}\left(f_* \circlearrowleft H_k(X,K)\right)$$

L'hypothèse sur X implique donc $\sum_{k\geq 0} (-1)^k \mathrm{Tr}\left((i\circ f\circ r)_* \circlearrowleft H_k(Y,K)\right) \neq 0$.

Il suit que $i\circ f\circ r$ admet un point fixe $y \in Y : i\circ f\circ r(y) = y$

$$\text{On a } \underbrace{r\circ i\circ f\circ r(y)}_{\overset{\shortparallel}{f(r(y))}} = r(y)$$

de sorte que $x = r(y) \in X$ est un point fixe de f.

Comme on sait (§1.4) que toute variété compacte est rétracte d'un CW-complexe fini, il suffit donc de traiter le cas de CW-complexes finis.

Etape 3 : Réduction aux complexes simpliciaux.

Def : Un n-simplexe affine de $\mathbb{R}^N$ est l'image d'une application affine injective $f : \Delta^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$.

De manière équivalente, c'est l'enveloppe convexe de $n+1$ points affinement indépendants de $\mathbb{R}^N$ (ses sommets).

Une face de dim k d'un n-simplexe affine est un k-simplexe affine obtenu comme enveloppe convexe de $k+1$ de ses sommets.

Un complexe simplicial X (dans $\mathbb{R}^N$) est une collection $\mathcal{S}(X)$ de simplexes affines de $\mathbb{R}^N$ tels que :

- toute face d'un simplexe de $\mathcal{S}(X)$ est dans $\mathcal{S}(X)$
- deux simplexes de $\mathcal{S}(X)$ qui s'intersectent le font le long d'une face commune.
- Tout $x \in \mathbb{R}^N$ admet un voisinage intersectant seulement un nombre fini de simplexes de $\mathcal{S}(X)$

On note aussi X l'union des simplexes affines de $\mathcal{S}(X)$. C'est un espace topologique qui a une structure naturelle de CW-complexe : son n-squelette est l'union des simplexes de $\mathcal{S}(X)$ de dim $\leq n$.

Un complexe simplicial est fini si $\mathcal{S}(X)$ est fini.

La subdivision barycentrique d'un complexe simplicial est obtenue en effectuant la subdivision barycentrique de tous ses simplexes.

Prop : Tout CW-complexe fini X est rétracte d'un complexe simplicial fini.

Lemme : Tout CW-complexe fini X se plonge dans $\mathbb{R}^N$ (pour $N \gg 0$).

Preuve : Récurrence sur le nombre de cellules.

Supposons $X = Y \cup_f \mathbb{D}^k$ pour $f : \mathbb{S}^{k-1} \to Y$, et $Y \hookrightarrow \mathbb{R}^M$ plongement.

Alors X est homéomorphe à l'union dans $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ de

- $Y \times \{0\} \times \{0\}$
- $\{0\} \times \mathbb{D}^k \times \{1\}$
- $\{((1-t)f(x), tx, t) \mid t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{S}^{k-1}\}$

Preuve de la Prop :

- Comme X se plonge dans $\mathbb{R}^N$ et est localement contractile (vu en TD), la Prop. 3 du §1.4. montre l'existence d'un voisinage U de X dans $\mathbb{R}^N$ qui se rétracte sur X.

• Quitte à translater et dilater X, on peut le supposer inclus dans l'intérieur du N-simplexe image de

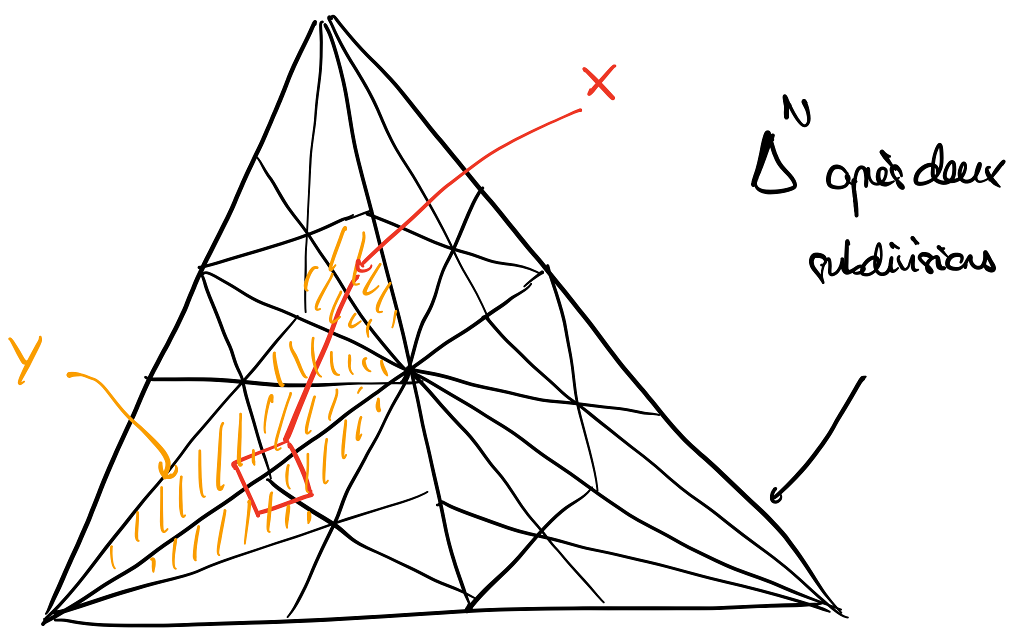
$$\Delta^N \hookrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$(t_0, \dots, t_N) \longmapsto (t_1, \dots, t_N),$$

de sommets $(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$.

• Soit $\varepsilon = \mathrm{dist}(X, \mathbb{R}^N - U) > 0$ car X compact.

Subdivisons Δ^N suffisamment de fois pour que le diamètre des simplexes obtenus soit $< \varepsilon$ (cf § 3.4.1 Etape 4).

Notons Y l'union des N-simplexes obtenus qui sont inclus dans U. Par choix de ε, $X \subseteq Y$. Comme X rétracte de U, X est aussi un rétracte de Y.



Y est bien un complexe simplicial fini dans $\mathbb{R}^N$.

Etape 4 : Approximation simpliciale.

Th. $f : Y \to Z$ application C^0 entre complexes simpliciaux.

(i) Quitte à subdiviser Y, f est homotope à une application cellulaire $g : Y \to Z$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. Si on s'autorise aussi à subdiviser Z, on peut assurer

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in Y.$$

Utilisons cela pour démontrer Lefschetz-Hopf. Par Etapes 2 et 3, il suffit de considérer $f : Y \to Y$ application C^0 sans point fixe avec Y complexe simplicial fini.

Posons $\delta = \inf_{x \in Y} |x - f(x)| > 0$.

Subdivisons Y suffisamment pour que le diamètre de ses simplexes soit $< \frac{\delta}{3}$.

Par la proposition, quitte à subdiviser Y à nouveau, on trouve $g : Y \to Y$ homotope à f qui est cellulaire et qui satisfait

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\delta}{3} \quad \forall x \in Y.$$

Ainsi, $\sup_{x \in Y} |x - g(x)| > \frac{2\delta}{3}$ et on déduit que $P \cap g(P) = \emptyset$ pour tout simplexe de Y.

Par l'Etape 1, $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{Tr}(g_* \circlearrowleft H_k(Y, K)) = 0$

Comme f et g sont homotopes,

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{Tr}(f_* \circlearrowleft H_k(Y, K)) = 0. \quad \text{Cela conclut.}$$

Etape 5 : Preuve du théorème d'approximation simpliciale.

Montrons d'abord (i).

"star" = "étoile"

• Si σ simplexe de Y, on note $St(\sigma)$ l'union des simplexes contenant σ. Alors $\mathring{St}(\sigma)$ est l'union des intérieurs des simplexes contenant σ.

Considérons le recouvrement ouvert fini $Y = \bigcup_{z \in Z_0} f^{-1}(\mathring{St}(z))$.

Comme Y est compact, quitte à subdiviser Y pour que ses simplexes soient petit diamètre, on peut supposer que chaque $St(\sigma)$ (σ simplexe de Y) soit inclus dans un des $f^{-1}(\mathring{St}(z))$.

• On définit alors g sur Y_0 comme suit. Pour $y \in Y_0$, il existe $z \in Z_0$ tel que $f(St(y)) \subseteq \mathring{St}(z)$. On choisit un tel z et on pose $g(y) = z$.

On étend g en une application $g : Y \to \mathbb{R}^N$ affine sur chaque simplexe de Y, et on considère l'homotopie

$$H : [0,1] \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad (t, x) \longmapsto (1-t) f(x) + t g(x)$$

J'affirme que $g(Y) \subseteq Z$ et $H([0,1] \times Y) \subseteq Z$.

• Soit $x \in Y$. Soit $x \in \sigma \subseteq Y$ un k-simplexe de sommets $y_0, \dots, y_k$ tel que $x \in \mathring{\sigma}$. Alors $x \in \bigcap_i \mathring{St}(y_i)$.

Donc $f(x) \in \bigcap_i \underbrace{\mathring{St}(g(y_i))}$

comme ceci est $\neq \emptyset$, il y a un simplexe Δ de Z contenant $f(x)$ et tous les $g(y_i)$.
Cela montre $g(x) \in \Delta \subset Z$ et $(1-t) f(x) + t g(x) \in \Delta \subseteq Z$.

Montrons (ii).

* Si on a commencé par subdiviser Z de sorte que le diamètre de ses simplexes soit $< \varepsilon/2$, on peut assurer $|g(y) - f(y)| < \varepsilon/2$ pour $y \in Y_0$

* Par uniforme continuité de f, il existe $\delta > 0$ tel que $|y - y'| < \delta$ implique $|f(y) - f(y')| < \varepsilon/2$. On suppose avoir assez subdivisé f pour que le diamètre de ses simplexes soit $< \delta$

* Soit $y \in Y$. Écrivons $y = \sum_i t_i y_i$, $\begin{cases} t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \\ y_i \in Y_0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
|f(y) - g(y)| &= \Big| f(y) - \sum_i t_i \, g(y_i) \Big| \\
&\leq \sum_i t_i \, |f(y) - f(y_i)| + \sum_i t_i \, |f(y_i) - g(y_i)| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .
\end{aligned}
$$