Chapitre 4 : Groupes d'homotopie des sphères

On note $x_0 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$. On veut étudier $\pi_k(\mathbb{S}^n, x_0)$.

4.1 $k < n$

Prop : si $0 < k < n$, $\pi_k(\mathbb{S}^n, x_0) = 0$

Preuve : On veut montrer que toute application continue $f : \begin{array}{l} \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n \\ x_0 \mapsto x_0 \end{array}$ est homotope rel. x_0 à une application constante.

L'espace $\mathbb{S}^n$ est homéomorphe au complexe simplicial union des faces de dimension $\leq n$ de Δ^{n+1}, par un homéomorphisme envoyant x_0 sur un sommet.

Par approximation simpliciale, après subdivisions barycentriques, f est homotope (rel. x_0, comme le montre la preuve) à une application cellulaire $g : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$.

Il suit que g n'est pas surjective. Soit $y \in \mathbb{S}^n \setminus g(\mathbb{S}^k)$. Alors $g : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n - \{y\} \simeq \mathbb{R}^n$ est homotope rel x_0 à une application constante car $\mathbb{R}^n$ est contractile.

4.2 $n=1$.

Prop: $\pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z}$, $\pi_k(\mathbb{S}^1, x_0) = 0$ $(k>1)$

Preuve: On a déjà démontré la première assertion à l'aide de la théorie des revêtements

Soit $k>1$, et soit $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^1$ C^0 avec $f(x_0)=x_0$.

Notons $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ le revêtement universel. Comme $\mathbb{S}^k$ est simplement connexe, le théorème de relèvement des applications montre qu'il existe $\tilde{f} : \mathbb{S}^k \to \mathbb{R}$ tel que $f = \pi \circ \tilde{f}$.

Mais $\tilde{f}$ est homotope rel. x_0 à une application constante car $\mathbb{R}$ est contractile. Donc f aussi.

4.3 Fibrations

Déf: Une fibration localement triviale de fibre F est une application continue $p: X \to B$ telle que, pour tout $b \in B$, il existe un voisinage $U \subseteq B$ de B et un homéomorphisme $\phi: p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U)}"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

commute.

Th (Puppe): Soit $p: X \to B$ une fibration localement triviale. Soit $x \in X$, $b = p(x)$, et $F = p^{-1}(b) \overset{i}{\hookrightarrow} X$ la fibre en b. Alors il existe une suite exacte longue:

$$\cdots \to \pi_{k+1}(B,b) \to \pi_k(F,x) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X,x) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B,b) \to \pi_{k-1}(F,x) \to \cdots$$

$$\cdots \to \pi_1(B,b) \to \pi_0(F,x) \to \pi_0(X,x) \to \pi_0(B,b) .$$

Remarques: (i) L'exactitude signifie que l'image d'une flèche est égale au noyau de la suivante. Ici, par définition, le noyau est l'image inverse de la classe de l'application constante (même quand les ensembles qui interviennent n'ont pas de structure de groupe abélien, ou même de groupe).

(ii) L'existence d'applications connectantes $\pi_k(B,b) \to \pi_{k-1}(F,x)$ fait partie de l'énoncé.

ex (fibration de Hopf)

Soit $X = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \simeq \mathbb{S}^3$

Soit $B = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^2$.

Soit $p : X \longrightarrow B$
$(z_1,z_2) \longmapsto [z_1 : z_2] =$ droite complexe de $\mathbb{C}^2$ engendrée par (z_1,z_2)

J'affirme que p est une fibration localement triviale de fibre $F = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \simeq \mathbb{S}^1$.

En effet, des trivialisations locales au-dessus de $U = \{[1 : z_2], z_2 \in \mathbb{C}\}$ et $V = \{[z_1 : 1], z_1 \in \mathbb{C}\}$ sont données par

$$\phi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{S}^1$$
$$(z_1,z_2) \longmapsto \left([z_1:z_2], \frac{z_1}{|z_1|}\right)$$

et

$$\phi_V : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times \mathbb{S}^1$$
$$(z_1,z_2) \longmapsto \left([z_1:z_2], \frac{z_2}{|z_2|}\right).$$

Remarque : les fibres de p sont exactement les orbites de l'action

$$\mathbb{S}^1 \times X \longrightarrow X$$
$$(z,(z_1,z_2)) \longmapsto (zz_1, zz_2).$$

La suite exacte longue de fibration s'écrit :

$$\cdots \to \pi_k(\mathbb{S}^1, x_0) \to \pi_k(\mathbb{S}^3, x_0) \to \pi_k(\mathbb{S}^2, x_0) \to \pi_{k-1}(\mathbb{S}^1, x_0) \to \cdots$$

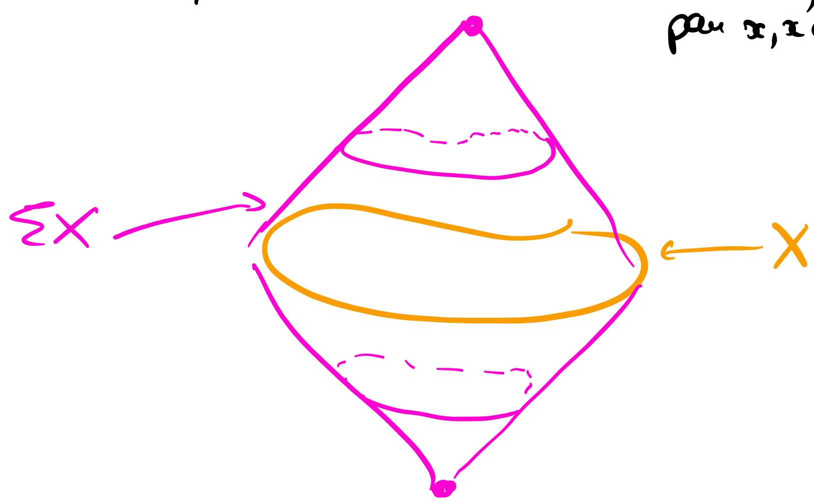
On déduit :

<u>Prop</u> : (a) $\pi_2(\mathbb{S}^2, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) \simeq \mathbb{Z}$

(b) Pour $k \geqslant 3$, $\pi_k(\mathbb{S}^3, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_k(\mathbb{S}^2, x_0)$.

4.4 Suspension

Déf : Soit X un espace topologique. La **suspension** ΣX de X est $\Sigma X := X \times [0,1] / \sim$ où $(x,0) \sim (x',0)$ et $(x,1) \sim (x',1)$ pour $x, x' \in X$



Remarques : • on a $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$.

• Soit $f : X \to Y$ C^0. L'application $f \times \mathrm{Id} : X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ passe au quotient en $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$.

Th (Freudenthal, 1937) L'application $\pi_k(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+1}(S^{n+1})$ est

$$(f : S^k \to S^n) \longmapsto (\Sigma f : S^{k+1} \to S^{n+1})$$

$$\begin{cases} \text{un isomorphisme si } k \leq 2n-2 \\ \text{une surjection si } k = 2n-1 \end{cases}$$

Preuve : admise faute de temps !

Corollaire : • $\pi_n(S^n, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ pour $n \geq 1$ (engendré par $Id : S^n \to S^n$)

• $\pi_3(S^2, x_0) \simeq \mathbb{Z}$ (engendré par la fibration de Hopf $p : S^3 \to S^2$)

Preuve : • $\pi_n(S^n) \xleftarrow{\sim} \pi_{n-1}(S^{n-1}) \xleftarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} \pi_2(S^2) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

Th de Freudenthal. cf §4.3

• Par §4.3, $\pi_3(S^3) \xrightarrow{\sim} \pi_3(S^2)$. Or $\pi_3(S^3) \simeq \mathbb{Z}$.

Il est commode d'introduire le paramètre $i = k - n$. Le théorème de Freudenthal montre que l'application $\pi_{n+i}(S^n) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{n+1+i}(S^{n+1})$ est un isomorphisme pour $n \geq i + 2$.

On note $\pi_i^S := \pi_{n+i}(S^n)$ pour $n \geq i+2$. C'est le $i^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie stable des sphères. Il est connu pour $i \lesssim 90$.

On a $\pi_0^S = \mathbb{Z}$ Hopf 1927

$\left.\begin{array}{l}\pi_1^S = \mathbb{Z}/2 \\ \pi_2^S = \mathbb{Z}/2\end{array}\right\}$ Pontryagin 1938

$\pi_3^S = \mathbb{Z}/24$ Rokhlin 1952

$\pi_4^S = 0$

$\pi_5^S = 0$

$\pi_6^S = \mathbb{Z}/2$

$\pi_7^S = \mathbb{Z}/240$ ...

4.5 Groupes d'homotopie relatifs

Déf : $x \in Y \subseteq X$, $k \geqslant 1$.

On pose $\pi_k(X,Y,x) = \left\{ \alpha : \mathbb{D}^k \longrightarrow X \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(\mathbb{S}^{k-1}) \subseteq Y \\ \alpha(x_0) = x \end{array} \right\} \Big/ \sim$

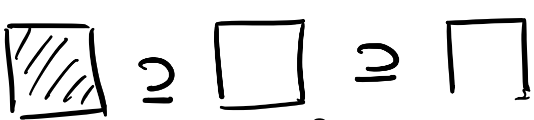
où $\alpha \sim \beta$ s'il existe une homotopie $H : [0,1] \times \mathbb{D}^k \longrightarrow X$ entre α et β telle que $\forall\, s \in [0,1]$, $\begin{cases} H(s, \mathbb{S}^{k-1}) \subseteq Y \\ H(s, x_0) = x \end{cases}$

C'est le k-ième "groupe" d'homotopie supérieur de X relatif à Y.

- Comme pour les $\pi_k(X,x)$, il est commode d'utiliser la description alternative suivante basée sur des cubes. Pour $k \geqslant 1$, considérons

$$[0,1]^k \supseteq \partial[0,1]^k \supseteq [0,1]^{k-1} = \{(t_0, \dots, t_{k-1}, 0) \in [0,1]^k\}$$

et posons Θ_k l'adhérence de $\partial[0,1]^k - [0,1]^{k-1}$ dans $\partial[0,1]^k$.



$[0,1]^2 \supseteq \partial[0,1]^2 \supseteq \Theta_2$

Comme $[0,1]^k / \Theta_k \xrightarrow[\text{homéo}]{\sim} \mathbb{D}^k$, on a

$$\pi_k(X,Y,x) = \left\{ \alpha : [0,1]^k \longrightarrow X \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha(\partial[0,1]^k) \subseteq Y \\ \alpha(\Theta_k) = \{x\} \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

• Cette description alternative permet de munir, pour $k \geq 2$, $\pi_k(X, Y, x)$ d'une opération "concaténation en la première variable" :

si $\alpha, \beta : [0,1]^k \longrightarrow X$ sont des éléments de $\pi_k(X, Y, x)$,

$$\alpha\beta : [0,1]^k \longrightarrow X$$
$$(t_1, \dots, t_k) \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_k) & \text{si } t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k) & \text{si } t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Les mêmes formules qui montrent que $\pi_k(X, x)$ est un groupe pour $k \geq 1$, qui est abélien pour $k \geq 2$, montrent ici :

<u>Prop</u> : $\pi_k(X, Y, x)$ est un groupe pour $k \geq 2$.
Ce groupe est abélien pour $k \geq 3$.

Le rôle particulier joué par la k-ième variable fait qu'elle ne peut pas intervenir dans les preuves et est responsable des bornes différentes sur k.

Th (suite exacte longue d'homotopie relative)

Soit $x \in Y \subseteq X$. La suite longue :

$$\cdots \to \pi_{k+1}(X,Y,x) \xrightarrow{\partial} \pi_k(Y,x) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X,x) \xrightarrow{\rho} \pi_k(X,Y,x) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(Y,x) \to \cdots$$

$$\cdots \to \pi_1(X,Y,x) \to \pi_0(Y,x) \to \pi_0(X,x)$$

où $\begin{cases} i_* \text{ est induit par l'inclusion } i : Y \hookrightarrow X \\ \rho \text{ est l'application d'oubli} : \rho([\alpha]) = [\alpha] \\ \partial \text{ est la restriction à } [0,1]^{k-1} : \ \partial([\alpha]) = [\alpha|_{[0,1]^{k-1}}]. \end{cases}$

est exacte.

Preuve : ① Exactitude en $\pi_k(X,x)$

- Soit $\alpha : [0,1]^k \longrightarrow Y$ tq $\alpha(\partial[0,1]^k) = \{x\}$

Alors $\rho \circ i_*([\alpha])$ est égal à $[c_x]$ dans $\pi_k(X,Y,x)$ comme le montre l'homotopie :

$$H : [0,1] \times [0,1]^k \longrightarrow X$$
$$(s, t_1, \dots, t_k) \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } t_k \geq 1-s \\ \alpha(t_1, \dots, t_{k-1}, t_k+s) & \text{si } t_k \leq 1-s \end{cases}$$

• Réciproquement, soit $\alpha : [0,1]^k \to X$ tq $\alpha(\partial[0,1]^k) = \{x\}$.

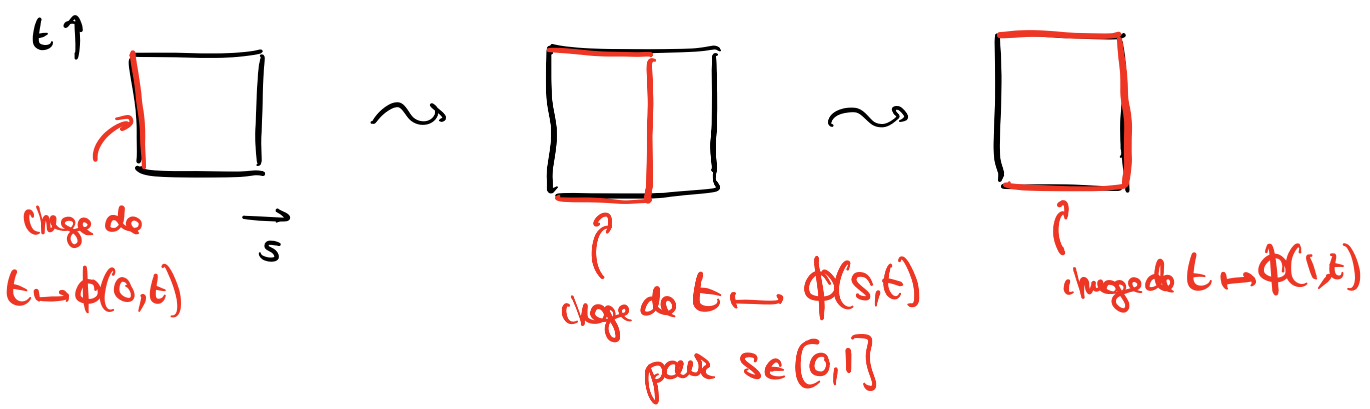
Supposons $\rho([\alpha]) = 0$: soit $H : [0,1] \times [0,1]^k \to X$ une homotopie le montrant.

On construit alors $\Phi : [0,1]\times[0,1]^k \to [0,1]\times[0,1]^k$ avec

$$\Phi(0,t_1,\dots,t_k) = (0,t_1,\dots,t_k)$$

$$\Phi(s,t) = (0,t) \quad \text{pour } t \in \partial[0,1]^k$$

$$\Phi(1,t) \in [0,1]\times\partial[0,1]^k \cup \{1\}\times[0,1]^k$$



Alors l'homotopie $G : [0,1]\times[0,1]^k \longrightarrow X$

$$(s,t) \longmapsto H(\Phi(s,t))$$

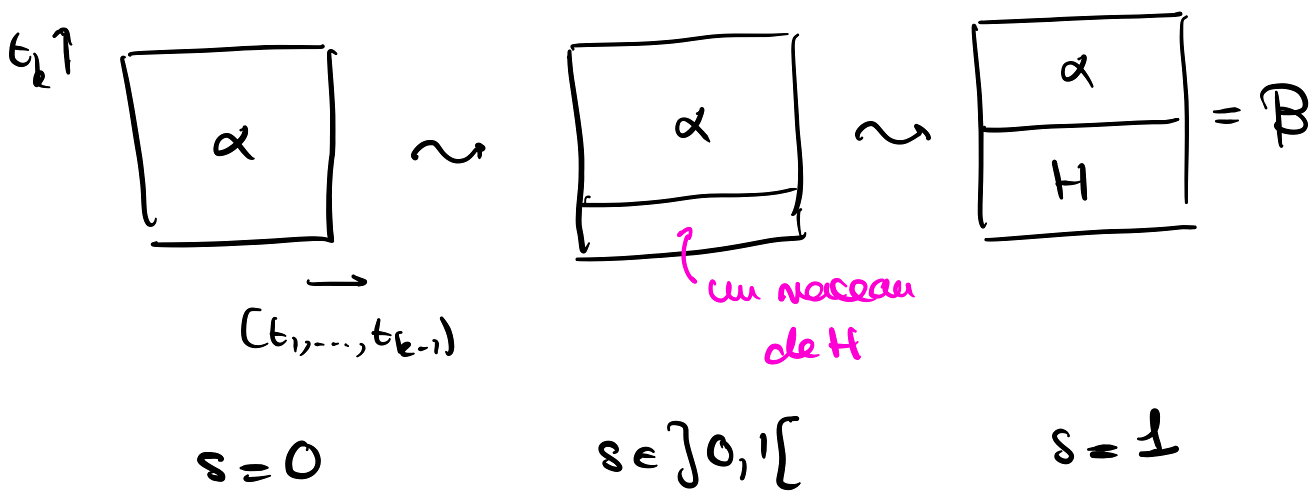
montre que α est homotope rel. $\partial[0,1]^k$ à une application à valeurs dans Y. La classe $[\alpha]$ est donc dans l'image de i_*.

② Exactitude en $\pi_k(X,Y,x)$.

- $\partial \circ p = 0$ est évident
- Réciproquement, soit $\alpha : [0,1]^k \to X$ représentant une classe $[\alpha] \in \pi_k(X,Y,x)$ avec $\partial([\alpha]) = 0$.

Soit $H : [0,1] \times [0,1]^{k-1} \to Y$ une homotopie rel $\partial[0,1]^{k-1}$ entre c_x et $\alpha|_{[0,1]^{k-1}}$. Soit β la concaténation selon la dernière coordonnée de $(t_1,\dots,t_k) \mapsto H(t_k, t_1, \dots, t_{k-1})$, et α.

Alors $[\alpha] = [\beta] \in \pi_k(X,Y,x)$ comme le montre l'homotopie :



Comme $\beta(\partial[0,1]^k) = \{x\}$, on a bien $[\alpha] \in \mathrm{Im}(p)$.

③ Exactitude en $\pi_k(Y,x)$

- Si $\alpha : [0,1]^{k+1} \longrightarrow X$ représente $[\alpha] \in \pi_{k+1}(X,Y,x)$, alors $\alpha|_{[0,1]^k}$ est homotope rel. $\partial[0,1]^k$ à c_x par l'homotopie $(s,(t_1,\dots,t_k)) \longmapsto \alpha(t_1,\dots,t_k,s)$

  Donc $i_* \circ \partial = 0$.

- Réciproquement, si $\beta : [0,1]^k \to Y$ représente $[\beta] \in \pi_k(Y,x)$ et si $H : [0,1] \times [0,1]^k \longrightarrow X$ homotopie rel. $\partial[0,1]^k$ entre α et c_x, alors $[\beta] = \partial[\alpha]$ où

$$\beta : [0,1]^{k+1} \longrightarrow X, \quad (t_1,\dots,t_{k+1}) \longmapsto H(t_{k+1},(t_1,\dots,t_k)).$$

4.6 Suite exacte longue d'une fibration.

Le théorème de Puppe énoncé au §4.3 résulte de la combinaison de la suite exacte longue d'homotopie relative et de l'énoncé suivant :

<u>Prop</u> : Soit $p : X \longrightarrow B$ une fibration localement triviale.
Soit $x \in X$, $b = p(x)$ et $F = p^{-1}(b)$. Alors

$$p_* : \pi_k(X, F, x) \longrightarrow \pi_k(B, b) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

La preuve repose sur la propriété de relèvement des homotopies pour les fibrations :

<u>Lemme</u> : $p : X \to B$ fibration localement triviale.
Soit $H : [0,1]^k \longrightarrow B$ et $\tilde{g} : [0,1]^{k-1} \longrightarrow X$
tels que $p \circ \tilde{g}(t) = H(0,t)$ $\forall t \in [0,1]^{k-1}$.
Alors il existe $\tilde{H} : [0,1]^k \longrightarrow X$ telle que
$p \circ \tilde{H} = H$ et $\tilde{H}(0,t) = \tilde{g}(t)$ pour $t \in [0,1]^{k-1}$.

Preuve de la Prop :

- Montrons p_* surjectif.

Soit $\alpha : [0,1]^k \longrightarrow B$ avec $\alpha(\partial[0,1]^k) = \{b\}$ représentant $[\alpha] \in \pi_k(B,b)$

Considérons le relèvement constant, de valeur x, de $\alpha|_{\Theta_k}$.

Comme $([0,1]^k, \Theta_k) \underset{\text{homéo}}{\xrightarrow{\sim}} ([0,1]^k, [0,1]^{k-1})$, le lemme de relèvement des homotopies montre qu'on peut l'étendre en un relèvement $\tilde{\alpha} : [0,1]^k \longrightarrow X$ qui satisfait donc :

$$\begin{cases} p \circ \tilde{\alpha} = \alpha \\ \tilde{\alpha}(\Theta_k) = \{x\} \\ \tilde{\alpha}([0,1]^{k-1}) \subseteq F \quad (\text{car } \alpha([0,1]^{k-1}) = \{b\}) \end{cases}$$

La classe $[\tilde{\alpha}]$ de $\tilde{\alpha}$ est telle que $p_*[\tilde{\alpha}] = [\alpha]$

- L'injectivité de p_* se prouve de manière analogue.

Preuve du lemme : Par compacité, on trouve $N \gg 0$ tel que

$$\forall i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, N-1\},\ H\left(\left[\frac{i_1}{N}, \frac{i_1+1}{N}\right] \times \dots \left[\frac{i_k}{N}, \frac{i_k+1}{N}\right]\right)$$

est inclus dans un ouvert de B au-dessus duquel la fibration est triviale.

Comme on peut construire $\tilde{H}$ successivement sur chacun de ces cubes, on est ramené au cas facile où la fibration est triviale.