Topologie algébrique

Chapitre 1 : Espaces (topologiques) et applications (continues).

Le but de la topologie algébrique est :

* d'étudier des espaces topologiques raisonnables (CW-complexes, ...)
* à déformation près (on dit à homotopie près)
* en leur associant des invariants algébriques (groupes d'homotopie, ...)
* avec pour but des applications géométriques (étude des variétés topologiques).

1.1 CW-complexes.

Il s'agit d'une classe d'espaces topologiques à la fois :

* suffisament riche pour les besoins de la topologie algébrique
* sans "pathologies"
* simple à étudier par leur définition "combinatoire"

Elle est introduite par Whitehead (1949).

- On note $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$

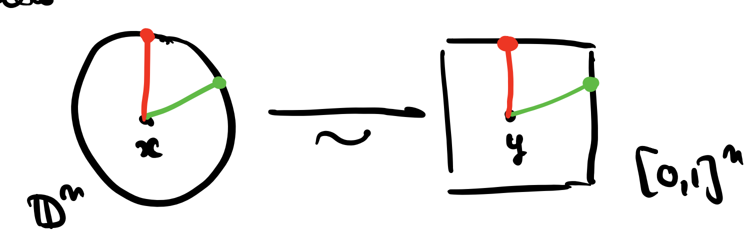
$$\underset{\text{"}\partial\mathbb{D}^n\text{"}}{\mathbb{S}^{n-1}} \ \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

$$\mathring{\mathbb{D}}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

Remarque : $(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) \underset{\text{homéomorphe}}{\simeq} ([0,1]^n, \partial[0,1]^n)$

ensemble des $(x_1, \dots, x_n)$ dont une coordonnée est égale à 0 ou 1

Par exemple, prendre $x \in \mathring{\mathbb{D}}^n$, $y \in]0,1[^n$, et envoyer le rayon partant de x dans une direction sur le rayon partant de y dans la même direction par une bijection affine.



• Si $f_i : Y_i \longrightarrow X$ applications avec Y_i espaces topologiques ($i \in I$), on peut munir X de la topologie finale :

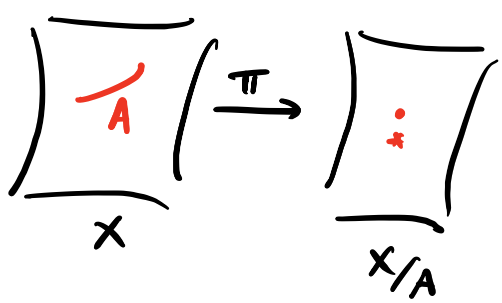
$$U \subseteq X \text{ ouvert} \Leftrightarrow f_i^{-1}(U) \text{ ouvert pour tout } i \in I$$

ex : Si $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X$, avec X_n espaces topologiques, et si $X := \bigcup_{n \geq 0} X_n$, on munit X de la topologie limite inductive (topologie finale pour les $X_n \subseteq X$).

ex : Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur un espace topologique X, on munit $X/\sim$ de la topologie quotient (topologie finale pour $X \longrightarrow X/\sim$).

ex : Si X, Y espaces topologiques, $A \subseteq X$ et $f : A \to Y$ continue, on note $\sim_f$ la relation d'équivalence sur $X \sqcup Y$ engendrée par $a \sim f(a)$ pour $a \in A$, et on note $X \cup_f Y = X \sqcup Y/\sim_f$ le recollement de X et Y le long de f.

Si $Y = \{*\}$, on note $X/A = X \cup_f \{*\}$.



Définition : Un CW-complexe X est un espace topologique muni de sous-espaces $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X$ tels que :

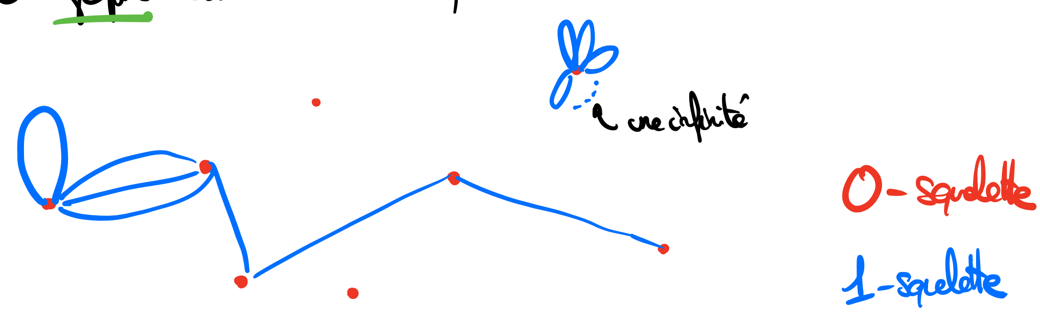
(i) X_0 est une union disjointe de points (topologie discrète).

(ii) Pour $n \geq 1$, il existe des applications $f_i : S^{n-1} \to X_{n-1}$ $(i \in I)$ telles que $X_n = \left(\coprod_{i \in I} D^n\right) \cup_{f_i} X_{n-1}$ est le recollement de X_{n-1} et de disques de dim n le long des f_i.

(iii) $X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$ est muni de la topologie limite inductive.

Def :
- On dit que X_n est le n-squelette de X.
- La dimension de X est le plus petit n tel que $X_n = X$, ou $+\infty$ si un tel n n'existe pas.
- Un graphe est un CW-complexe de dimension ≤ 1.

ex :



- Une **n-cellule** de X est l'image dans X d'un des D^n.
  Une **n-cellule ouverte** de X est ——————— $\mathring{D}^n$

(X est union disjointe de ses cellules ouvertes).

- On dit que X est **fini** s'il a seulement un nombre fini de cellules.

- Un **sous-CW-complexe** est un sous-espace fermé $Y \subseteq X$

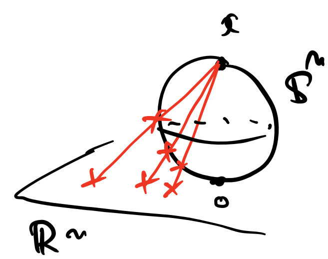
qui est union de cellules ouvertes de X.

Il admet une structure induite de CW-complexe, posant $Y_n = Y \cap X_n$.

Remarque : Un espace topologique peut avoir plusieurs structures de CW-complexe :

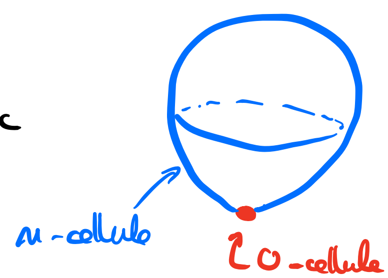
ex : La sphère S^n est homéomorphe à D^n/S^{n-1}.

En effet, par projection stéréographique depuis $x \in S^n$, on a $S^n \setminus \{x\} \xrightarrow[\text{homéo}]{\sim} \mathbb{R}^n$.



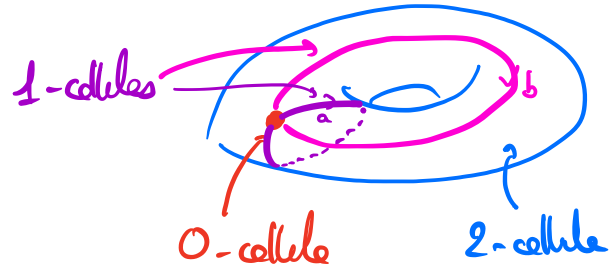
Ainsi, S^n est le compactifié d'Alexandrov (i.e. compactification par un unique point) de $\mathbb{R}^n$.

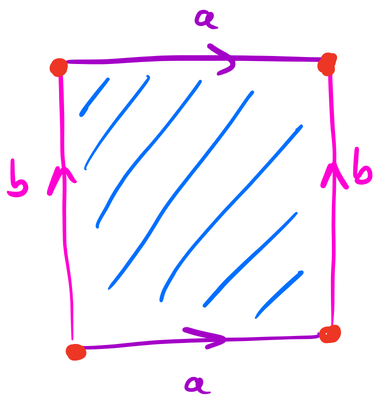
S^n a donc une structure de CW-complexe avec une 0-cellule et une n-cellule.



ex : Le tore $S^1 \times S^1$

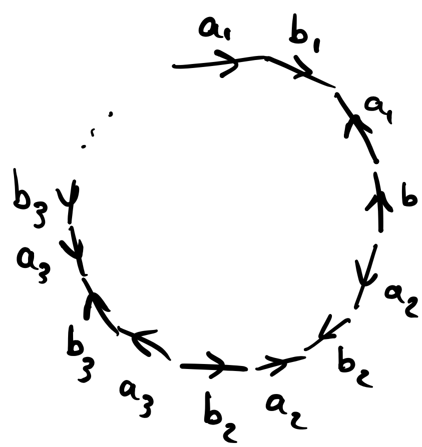
est obtenu en recollant les côtés opposés d'un carré.





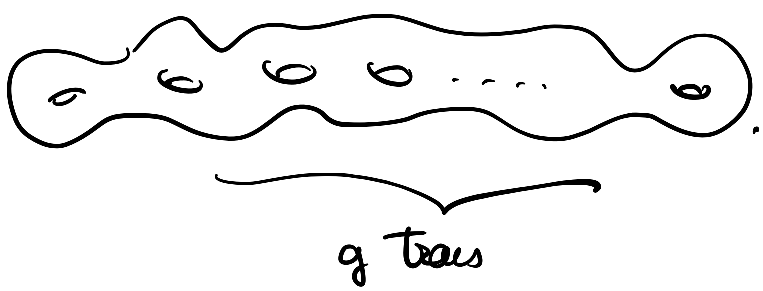
C'est donc un CW-complexe avec
une 0-cellule
deux 1-cellules
une 2-cellule.

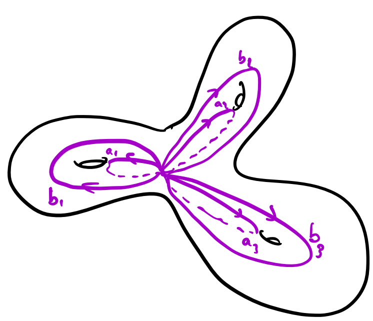
ex : Plus généralement, si l'on recolle le bord d'un $4g$-gone de la manière indiquée ci-contre, on obtient un CW-complexe Σ_g



avec une 0-cellule
$2g$ 1-cellules
une 2-cellule

qui est homéomorphe à





(voir lien vidéos sur la page web du cours)