1.2 Homotopie

Déf : Deux applications continues $f, g : X \longrightarrow Y$ sont homotopes s'il existe $H : [0,1] \times X \longrightarrow Y$ continue avec

$$\begin{cases} H(0,x) = f(x) \\ H(1,x) = g(x) \end{cases} \quad \forall x \in X.$$

On dit que H est une homotopie entre f et g.

Plus généralement, si $A \subseteq X$ sous-espace, on dit que f et g sont homotopes relativement à A si on peut choisir l'homotopie H telle que $H(s,a) = f(a)$ pour tous $a \in A$, $\in [0,1]$.

Lemme : L'homotopie est une relation d'équivalence (idem relativement à $A \subseteq X$)

Preuve : • f homotope à f via l'homotopie $H(s,x) = f(x)$.

• Si f homotope à g via $H(s,x)$, alors g homotope à f via $(s,x) \longmapsto H(1-s, x)$

• Si f homotope à g via H et g homotope à h via H', alors f homotope à h via $H'' : (s,x) \longmapsto \begin{cases} H(2s,x) & \text{si } s \in [0,\frac{1}{2}] \\ H'(2s-1,x) & \text{si } s \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$

Def: On note $[X,Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues $X \longrightarrow Y$, et $[f] \in [X,Y]$ la classe de $f: X \to Y$.

Def: Une application continue $f: X \to Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe $g: Y \longrightarrow X$ un inverse à homotopie près, i.e. :

$$\begin{cases} f \circ g \text{ homotope à } Id_Y \\ g \circ f \text{ homotope à } Id_X \end{cases}.$$

Quand un tel f existe, on dit que X et Y ont le même type d'homotopie.

Un espace X est dit contractile s'il a le type d'homotopie d'un point

($\Leftrightarrow$ si Id_X est homotope à une application constante)

Slogan: En topologie algébrique, on considère

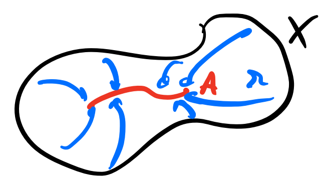
$\left|\begin{array}{l}\text{des applications homotopes} \\ \text{des espaces avec même type d'homotopie}\end{array}\right.$ comme équivalents,

et des espaces contractiles comme triviaux.

Pour détecter que deux espaces ont le même type d'homotopie, on peut utiliser :

Déf : Soit $A \overset{i}{\subseteq} X$ un sous-espace.

Une *rétraction* de X sur A est une application continue $r : X \to A$ telle que $r \circ i = \mathrm{Id}_A$.



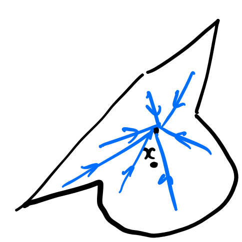
Si un tel r existe, on dit que A est un rétracte de X.

Une *rétraction par déformation forte* de X sur A est une homotopie rel. A entre Id_X et une rétraction r de X sur A.

Lemme : Si X se rétracte par déformation forte sur A, alors $i : A \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie.

Preuve : La rétraction r est un inverse d'homotopie.

ex : un ss-espace $X \subseteq \mathbb{R}^n$ étoilé en x_0 est contractile car une rétraction par déformation forte de X sur x_0 est donnée par $(s,x) \longmapsto (1-s)x + s\,x_0$.



ex : $\mathbb{S}^{n-1}$ a le type d'homotopie de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ car une rétraction par déformation forte de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{S}^n$ est donnée par $(s,x) \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|^s}$.