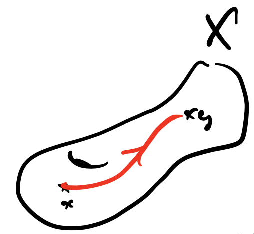
1.3 Groupes d'homotopie.

1.3.1 Groupe fondamental. [Poincaré, Analysis Situs, 1895]

Déf : X espace topologique, $x, y \in X$.

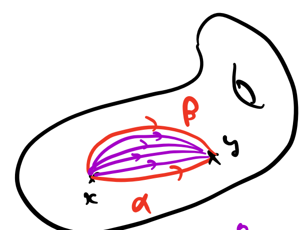


Un chemin de x à y est $\alpha : [0,1] \to X$ continue avec $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$.

Un lacet sur X basé en x est un chemin de x à x.

On note $c_x : [0,1] \longrightarrow X$, $t \longmapsto x$ le lacet constant en x.

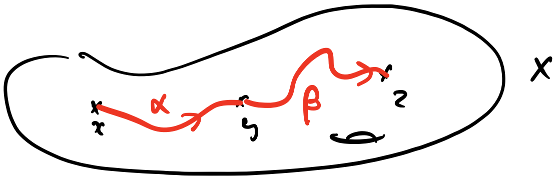
⚠ On considèrera toujours des homotopies de chemin relativement aux extrémités $\{0,1\}$



une homotopie rel. $\{0,1\}$ entre α et β

Le chemin inverse d'un chemin $\alpha : [0,1] \to X$ de x à y est le chemin $\bar{\alpha} : t \longmapsto \alpha(1-t)$ de y à x.

Si α est un chemin de x à y et β un chemin de y à z, la concaténation de α et β est le chemin $\alpha\beta : t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$ de x à z.



Def : On note $\pi_1(X,x)$ l'ensemble des classes d'homotopie (rel. $\{0,1\}$) de lacets basés en x.

Prop : La concaténation des lacets fait de $\pi_1(X,x)$ un groupe avec pour inverse le lacet inverse et pour élément neutre le lacet constant c_x.

C'est le groupe fondamental de X basé en x.

Preuve : Il faut montrer

A que la concaténation passe au quotient en une loi sur $\pi_1(X,x)$.

B que cette loi est associative.

C que le chemin inverse passe au quotient et est un inverse (avec pour élément neutre la classe du lacet constant).

Cela résulte des trois lemmes suivants.

Lemme A : Si α et α' sont des chemins de x à y qui sont homotopes rel. $\{0,1\}$
et β et β' ——— de y à z ———
alors $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ sont homotopes rel. $\{0,1\}$

Preuve : $H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ homotopie rel. $\{0,1\}$ entre α et α'

$(s\ ,\ t) \longmapsto H(s,t)$

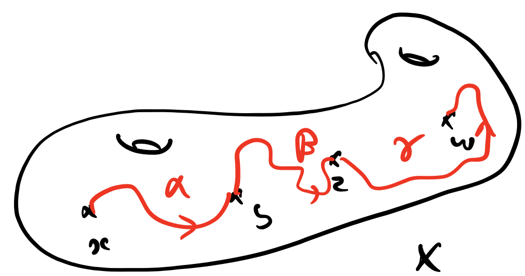
paramètre de l'homotopie — paramètre du chemin

$$\left(\begin{array}{l} \alpha(t) = H(0,t) \\ \alpha'(t) = H(1,t) \end{array} \right)$$

$K : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ homotopie rel. $\{0,1\}$ entre β et β'.

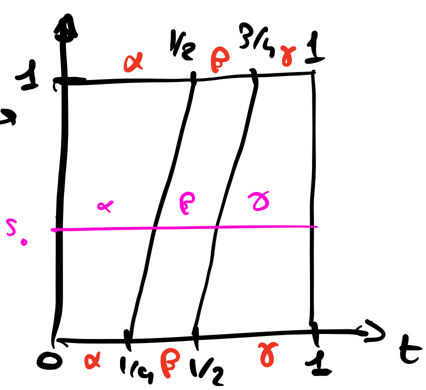
Alors $(s,t) \longmapsto \begin{cases} H(s,2t) & \text{si } t \in [0,\frac{1}{2}] \\ K(s,2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2},1] \end{cases}$ homotopie rel. $\{0,1\}$ $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$.

Lemme B : α chemin de x à y
β chemin de y à z
γ chemin de z à w



Alors $(\alpha\beta)\gamma$ est homotope rel. $\{0,1\}$ à $\alpha(\beta\gamma)$.

Preuve : Vu le dessin



Une homotopie est donnée par :

$$(s,t) \longmapsto \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{si } t \in \left[0, \frac{1+s}{4}\right] \\ \beta(4t-s-1) & \text{si } t \in \left[\frac{1+s}{4}, \frac{2+s}{4}\right] \\ \gamma\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{si } t \in \left[\frac{2+s}{4}, 1\right] \end{cases}$$

Lemme C : α et β chemins de x à y.

Alors (0) Si α et β sont homotopes rel. $\{0,1\}$, $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ aussi.

(i) $\alpha\bar{\alpha}$ homotope rel. $\{0,1\}$ à c_x

(ii) $\bar{\alpha}\alpha$ homotope rel. $\{0,1\}$ à c_y

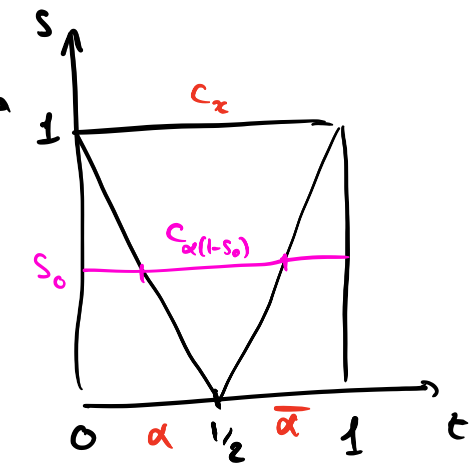
(iii) $c_x\alpha$ homotope rel. $\{0,1\}$ à α

(iv) αc_y homotope rel. $\{0,1\}$ à α

Preuve : (0) Si $H : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow X$ homotopie rel. $\{0,1\}$ entre α et β,

$(s,t) \longmapsto H(s,1-t)$ homotopie entre $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$.

(i) Vu le dessin

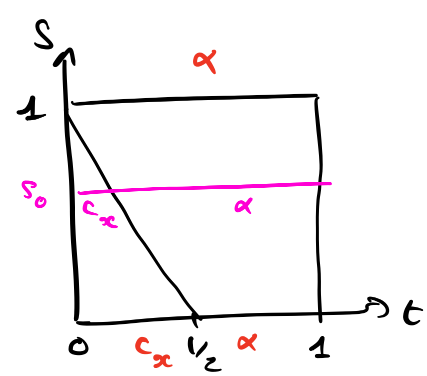


une homotopie entre $\alpha\bar{\alpha}$ et c_x est donnée par

$$(s,t) \longmapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t\in\left[0, \frac{1-s}{2}\right] \\ \alpha(1-s) & \text{si } t\in\left[\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}\right] \\ \alpha(2t-1) & \text{si } t\in\left[\frac{1+s}{2}, 1\right] \end{cases}$$

(ii) : Idem.

(iii) : Vu le dessin,



une homotopie entre $c_x\alpha$ et α est donnée par

$$(s,t) \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } t \in \left[0, \frac{1-s}{2}\right] \\ \alpha\left(\frac{2t-1+s}{1+s}\right) & \text{si } t\in\left[\frac{1-s}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

(iv) : Idem.

Dans le deuxième chapitre du cours, on apprendra à calculer le groupe fondamental (par exemple si X CW-complexe) et on en donnera une interprétation géométrique (en termes de revêtements).