1.3.2 Groupes d'homotopie supérieurs.

[Définition : Čech 1931, importance reconnue par Hurewicz 1935]

Soit $x_0 = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{S}^k$

Def: Si $x \in X$ espace topologique pointé, et $k \geq 0$, on pose

$$\pi_k(X,x) = [(\mathbb{S}^k,x_0),(X,x)] = \left\{ \begin{array}{l} \text{applications continues} \\ \alpha : \mathbb{S}^k \longrightarrow X \\ \qquad x_0 \longmapsto x \end{array} \right\} \Big/ \text{homotopie rel. } x_0$$

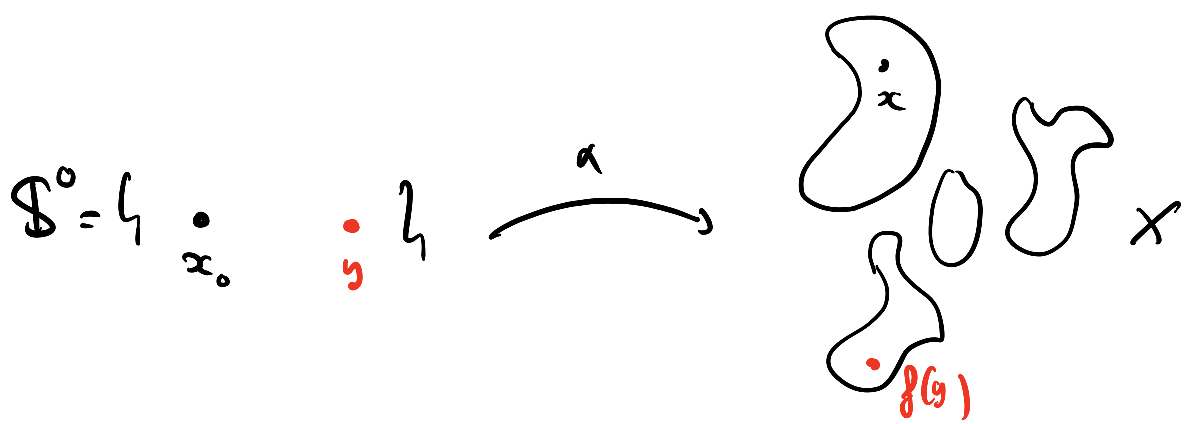
Ex: Si $k=0$, $\mathbb{S}^0 = \{\underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{1}}, \underset{y}{\overset{\shortparallel}{-1}}\}$ et $\alpha : \mathbb{S}^0 \to X$ est déterminée par $\alpha(y)$

De plus, $\alpha, \beta : \begin{array}{l} \mathbb{S}^0 \longrightarrow X \\ x_0 \longmapsto x \end{array}$ sont homotopes rel. x_0

$$\iff \exists H : [0,1] \to X, \; \begin{array}{l} H(0) = \alpha(y) \\ H(1) = \beta(y) \end{array}$$

$\iff$ $\alpha(y)$ et $\beta(y)$ sont dans la même composante connexe par arcs de X

I.e. $\boxed{\pi_0(X,x) = \{\text{composantes connexes par arcs de } X\}}$



• Si $k \geq 1$, on a aussi

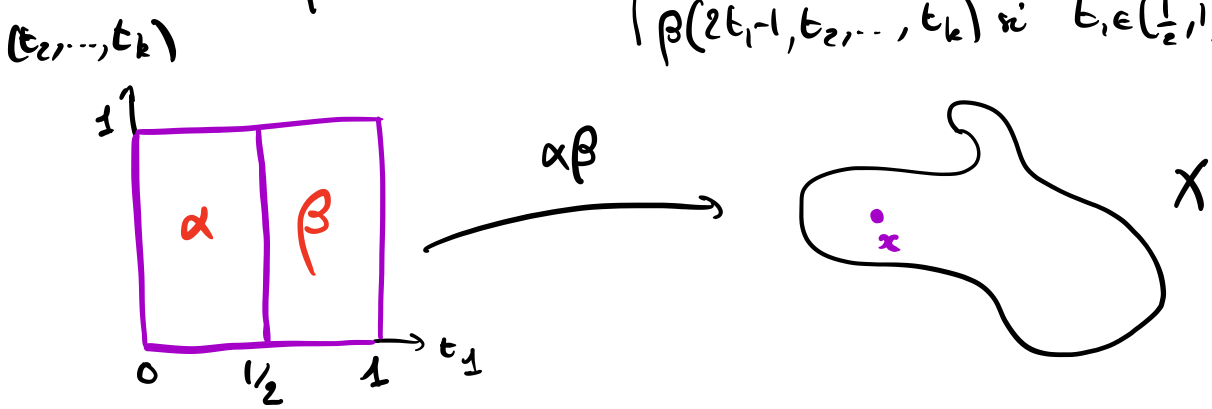
$$\pi_k(X,x) = \left[(\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1}), (X,x) \right] \quad \text{car } \mathbb{S}^k = \mathbb{D}^k / \mathbb{S}^{k-1}$$

$$= \underbrace{\left[([0,1]^k, \partial [0,1]^k), (X,x) \right]}_{\text{cette description est souvent plus facile à manipuler.}} \quad \text{car } (\mathbb{D}^k, \mathbb{S}^{k-1}) \underset{\text{homéo}}{\simeq} ([0,1]^k, \partial[0,1]^k)$$

On voit donc que $\pi_1(X,x)$ est bien le groupe fondamental défini en termes de lacets.

• Par analogie avec le cas $k=1$, on définit la concaténation de deux applications continues $\alpha, \beta : [0,1]^k \longrightarrow X$ envoyant $\partial[0,1]^k$ sur x par

$$\alpha\beta(t_1, \dots, t_k) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_k) & \text{si } t_1 \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_k) & \text{si } t_1 \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



• Comme cette opération est donnée par la concaténation des chemins "en la première variable", les mêmes preuves que dans le cas du π_1 montrent :

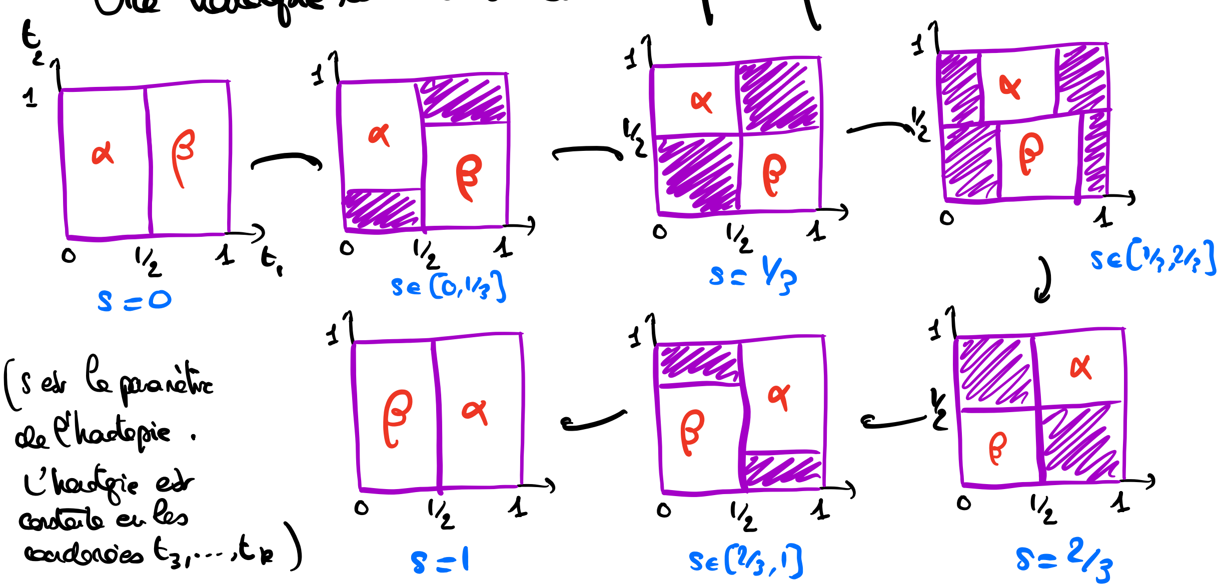
Prop : Pour $k \geq 1$, la concaténation fait de $\pi_k(X,x)$ un groupe d'élément neutre la classe de l'application constante $c_x : (t_1, \dots, t_k) \mapsto x$, l'inverse de la classe de $\alpha : [0,1]^k \to X$ étant $\bar{\alpha} : (t_1, \dots, t_k) \mapsto \alpha(1-t_1, t_2, \dots, t_k)$.

C'est le $k^{\text{ème}}$ groupe d'homotopie de X basé en x.

Prop (Čech 1931) : Si $k \geq 2$, $\pi_k(X,x)$ est abélien.

Preuve : Soient $\alpha, \beta : [0,1]^k \to X$ envoyant $\partial[0,1]^k$ sur x.

Une homotopie rel. $\partial[0,1]^k$ entre $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ est donnée par :



(s est le paramètre de l'homotopie. L'homotopie est constante en les coordonnées $t_3, \dots, t_k$)

1.3.3 Fonctorialité

Déf : Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques.
Soit $x \in X$ et $k \geqslant 0$.
Si $\alpha : S^k \to X$ est tel que $\alpha(x_0) = x$, on pose $f_*\alpha = f \circ \alpha$ le poussé en avant (pushforward) de α par f.

Prop : (i) f_* passe au quotient en $f_* : \pi_k(X, x) \to \pi_k(Y, f(x))$,

(ii) C'est un morphisme de groupes si $k \geqslant 1$.

(iii) De plus, si $g : Y \to Z$ continue, $(g \circ f)_* = g_* f_*$.

(iv) Si f et f' sont homotopes, il existe un isomorphisme de groupes $\phi : \pi_k(Y, f(x)) \xrightarrow{\sim} \pi_k(Y, f'(x))$ tel que $\phi \circ f_* = f'_*$.

Si f et f' sont homotopes rel. x, on peut prendre $\phi = \mathrm{Id}$.

Preuve : (i) Si $H : [0,1] \times S^k \to X$ homotopie rel x_0 entre α et α', alors $f \circ H$ homotopie rel. x_0 entre $f_*\alpha$ et $f_*\alpha'$.

(ii) On a $f_*(\alpha\beta) = (f_*\alpha)(f_*\beta)$.

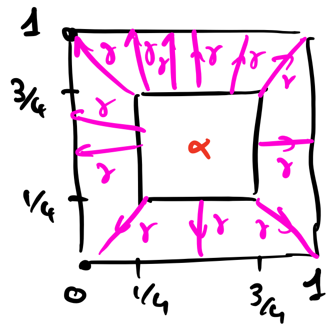
(iii) On a $g_* f_* \alpha = (g \circ f)_* \alpha$.

(iv) Soit $H : [0,1] \times X \to Y$ homotopie entre f et f'.

• Si H est rel x, alors $\begin{cases} [0,1] \times S^k \longrightarrow Y \\ (s,t) \longmapsto H(s,\alpha(t)) \end{cases}$ homotopie rel. x_0 entre $f_*\alpha$ et $f'_*\alpha$.

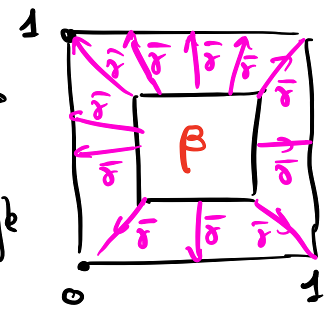
• Sans cette hypothèse, on considère le chemin $\gamma : [0,1] \to Y$, $t \mapsto H(t,x)$ entre $f(x)$ et $f'(x)$.

Alors, si $\alpha : [0,1]^k \to Y$, $\partial[0,1]^k \mapsto f(x)$, on définit $\phi(\alpha) : [0,1]^k \to Y$, $\partial[0,1]^k \mapsto f(x')$

par le dessin : 

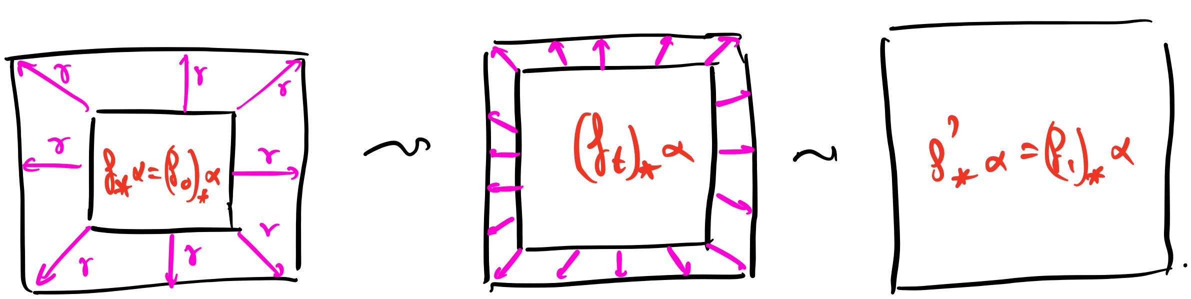
.

On montre que $\phi : \pi_k(Y, f(x)) \to \pi_k(Y, f'(x))$ est bien

défini, avec inverse induit par $\beta \longmapsto$ 

et que $\phi(f_*\alpha)$ est homotope à $f'_*\alpha$ rel. $\partial[0,1]^k$

à l'aide des dessins (où l'on note $f_t(x) = H(t,x)$) :



.

Corollaire : (i) Si $f : X \to Y$ équivalence d'homotopie, $f_* : \pi_k(X,x) \xrightarrow{\sim} \pi_k(Y,f(x))$ pour $k \geq 0$.

(ii) Si X est contractile, $\pi_k(X,x)$ est le groupe trivial pour $k \geq 1$.

Preuve : (i) Si g inverse d'homotopie de f, la proposition montre que :

$$f_* g_* = (f \circ g)_* = Id_* \circ \phi = \phi \quad \left(\text{où } \phi \text{ est un isomorphisme } \pi_k(X,x) \xrightarrow{\sim} \pi_k(X, f\circ g(x)) \right).$$

Donc f_* a un inverse à droite.

Le même argument avec $g \circ f$ montre que f_* a un inverse à gauche.

(ii) Par (i), $\pi_k(X,x) = \pi_k(x,x) = \{c_x\}$

1.3.4 Groupes d'homotopie des sphères.

Les groupes d'homotopie des sphères $\pi_k(S^n, x_0)$ sont l'un des objets les plus intéressants de la topologie algébrique.

Ils sont difficiles à calculer !

On les connaît pour
* $n = 1$ (facile)
* $k - n \lesssim 30$

On ne les connaît pas pour $k - n \gtrsim 100$

Dans le cours, on montrera peut-être (ou pas) :

Th (Pontryagin 1938) : $\pi_{n+1}(S^n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n \geq 3$.