1.4 Variétés topologiques

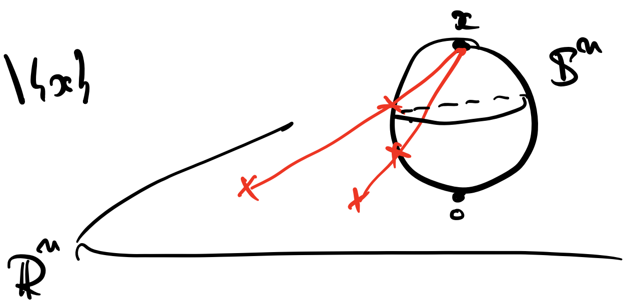
Def : Une variété topologique de dimension n est un espace topologique

- localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (tout point admet un voisinage qui est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$).
- séparé
- à base dénombrable

il est traditionnel d'imposer ces conditions.

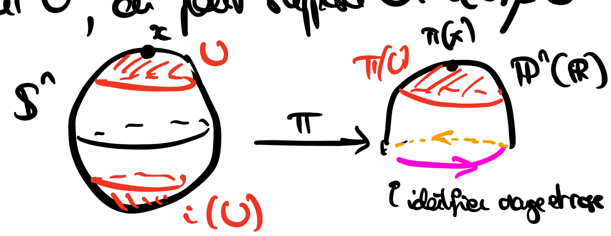
exemples :

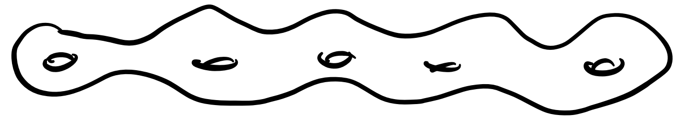
- La sphère S^n. En effet, $S^n \setminus \{x\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ par projection stéréographique depuis le point x :



- L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: le quotient de S^n par l'involution sans point fixe "antipodie" $i : (x_0, \dots, x_n) \longmapsto (-x_0, \dots, -x_n)$.

En effet, si $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est l'application quotient, et si $x \in S^n$, on peut choisir un ouvert $x \in U \subseteq S^n$ homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Quitte à rétrécir U, on peut supposer $U \cap i(U) = \emptyset$. Alors $\pi|_U : U \xrightarrow{\sim} \pi(U)$ homéomorphisme de U sur le voisinage $\pi(U)$ de $\pi(x)$.



• Les surfaces Σ_g = 

(voir TD pour une preuve)

Pour justifier que la classe des CW-complexes peut être utile à l'étude des variétés topologiques, on va montrer :

Th : Toute variété topologique compacte de dim n est rétracte d'un CW-complexe fini.

Remarque : Cet énoncé sera suffisant pour nos applications, mais on aurait bien sûr voulu mieux : "homéomorphe à" ou "du type d'homotopie de" à la place de "rétracte de". De tels énoncés sont beaucoup plus durs (ou inconnus).

Une variété topologique compacte de dim n

- a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dim n [Kirby-Siebenmann 1969]
- est homéomorphe à un CW-complexe de dim n
  - si $n = 2$ [Radó 1926]
  - si $n = 3$ [Moise 1952]
  - si $n \geq 6$ [Kirby-Siebenmann 1977]
  - si $n = 5$ [Quinn 1982]
  - si $n = 4$ OUVERT !

La preuve du théorème combine trois propositions :

<u>Prop. 1</u> : Toute variété topologique compacte de dimension n est homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ (pour un $N \gg 0$).

<u>Prop. 2</u> : Soit $K \subseteq \mathbb{R}^N$ compact. Alors K admet une base de voisinages homéomorphes à des CW-complexes finis.

<u>Prop. 3</u> : Un compact $K \subseteq \mathbb{R}^N$ qui est localement contractile (i.e. qui admet une base de voisinages contractiles) est rétracte d'un de ses voisinages.

<u>Preuve du Th.</u> : • Par Prop. 1, qpsq $X \subseteq \mathbb{R}^N$.

• Par Prop. 3, comme une variété topologique de dimension n admet une base de voisinages homéomorphes à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$ et est donc localement contractile, on voit que X est rétracte d'un de ses voisinages.

• Par Prop. 2, on peut supposer, quitte à le rétrécir, que ce voisinage a une structure de CW-complexe.

<u>Preuve de Prop. 1 :</u> X variété topologique compacte de dim. n

Tout $x \in X$ admet un voisinage homéo à un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc, quitte à le rétrécir, homéo à $\mathbb{R}^n$. Choisissons-en un : $x \in \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\wr\wr}}{U_x} \subseteq X$.

Comme les $(U_x)_{x \in X}$ recouvrent X, on peut, par compacité de X, choisir $x_1, \dots, x_k \in X$ tels que $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}$.

Considérons alors la composition :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[ddrr, bend right, "f"'] & X^k \arrow[r] & \left(X/_{X-U_{x_1}}\right) \times \dots \times \left(X/_{X-U_{x_k}}\right) \arrow[d, phantom, "\wr\wr"] \\
x \mapsto (x, \dots, x) & & \mathbb{S}^n \times \dots \times \mathbb{S}^n \arrow[d, hook] \\
& & \mathbb{R}^{k(n+1)} = \mathbb{R}^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+1}
\end{tikzcd}$$

L'application f est continue injective. Comme X est compact et $\mathbb{R}^{k(n+1)}$ est séparé, $f : X \xrightarrow[f]{\sim} f(X) \subseteq \mathbb{R}^{k(n+1)}$.

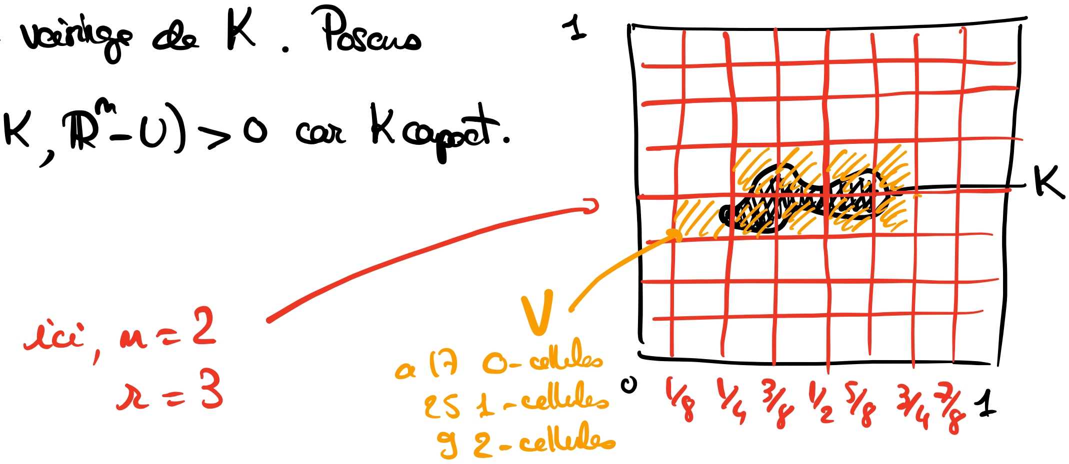
homéomorphisme.

Preuve de Prop 2 :

Après une translation affine, on peut supposer que $K \subseteq]0,1[^n$.

Soit U un voisinage de K. Posons

$\delta = \text{dist.}(K, \mathbb{R}^n - U) > 0$ car K compact.



Soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\sqrt{n}}{2^r} < \delta$. Comme deux points d'un cube de dimension n et de côté $\frac{1}{2^r}$ sont à distance $\leq \frac{\sqrt{n}}{2^r}$, ce choix assure qu'un cube de côté $\frac{1}{2^r}$ qui intersecte K est inclus dans U.

On subdivise alors le cube $[0,1]^n$ en $(2^r)^n$ cubes de côté $\frac{1}{2^r}$: $C_1, \dots, C_{(2^r)^n}$.

On pose $V = \bigcup_{\{i \mid C_i \cap K \neq \emptyset\}} C_i$.

- V inclus dans U par choix de r.
- V voisinage de K car si $x \in]0,1[^n$, l'union des C_i contenant x est un voisinage de x.

• V a une structure de CW-complexe :

On choisit pour d-cellules les cubes de dimension d de la forme
$$\left\{ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i \in \left[\frac{k_i}{2^n},\frac{k_i+1}{2^n}\right] \text{ si } i\in I \\ x_i = k_i \text{ si } i\notin I \end{array} \right\}$$
(où $I \subseteq \{1,\dots,n\}$ a cardinal d et $(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$)

qui sont inclus dans V.

Plus précisément, si X est le CW-complexe obtenu en recollant ces cellules par les applications évidentes, alors on a une application continue bijective $X \longrightarrow V$ qui est un homéomorphisme car X quasi-compact et V séparé.

Preuve de Prop. 3 : (PLUS DIFFICILE)

Étape 1 On commence par munir $X = \mathbb{R}^n \setminus K$ d'une structure de CW-complexe. par "discrétisation".

Pour cela, comme dans la preuve de Prop. 2, on l'écrit comme union de cubes, de la manière suivante :

* On écrit $\mathbb{R}^n$ comme union de cubes de rayon 1 de la forme $[k_1,k_1+1]\times\dots\times[k_n,k_n+1]$ ($k_i\in\mathbb{Z}$).

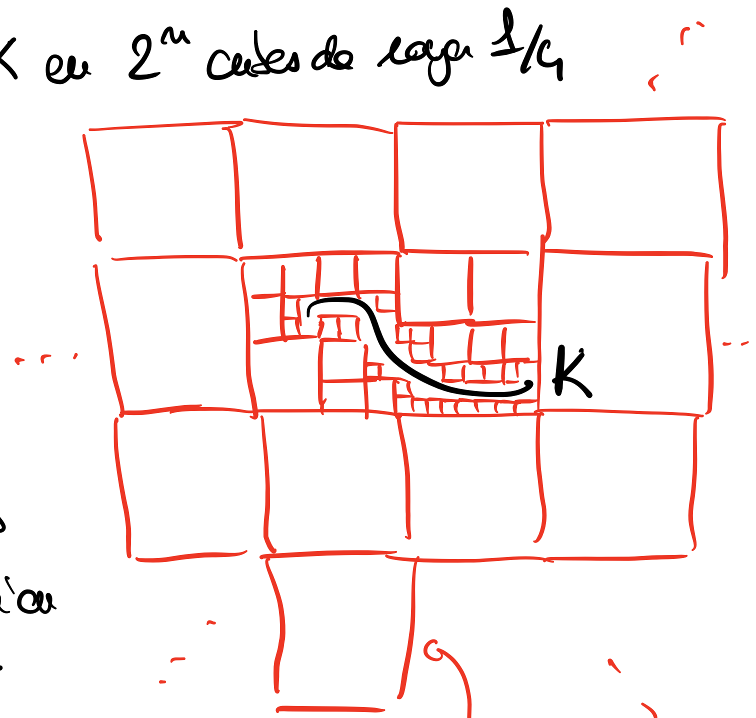
* Ceux qui sont $\subseteq X$, on les garde.

* Ceux qui sont $\not\subseteq X$, on les subdivise en 2^n cubes de longueur $\frac{1}{2}$.

* On garde ceux qui sont dans X, et on subdivise ceux qui ne sont pas $\subseteq X$ en 2^n cubes de longueur $1/4$

... on itère ...

Alors X a une structure de CW-complexe dont les d-cellules sont, parmi les faces de dimension d des cubes qu'on a gardés, celles qui sont minimales pour l'inclusion.



La structure de CW-complexe sur X.

<u>Étape 2</u> : <u>On définit un sous-CW-complexe</u>
<u>$Z \subseteq X$ et une application C^0 $r : Z \to K$</u> "par récurrence sur le squelette".

* les 0-cellules de Z sont exactement les 0-cellules de X.

On définit l'image par r d'une telle cellule comme étant l'un des points du compact K qui est le plus proche.

* Pour $k \geq 1$, les k-cellules de Z sont les k-cellules de X dont le bord est $\subseteq \underbrace{Z_{k-1}}_{(k-1)\text{-squelette de } Z}$, et telles que la restriction de r à ce bord s'étend en une application C^0 de la cellule dans K.

On choisit une telle extension de diamètre minimal (ou plutôt, comme il n'est pas clair que le minimum est atteint, dont le diamètre est <2 fois l'infimum des diamètres possibles.

Etape 3 : On vérifie que $Z \cup K$ est un voisinage de K, et que r s'étend en une rétraction continue $r : Z \cup K \longrightarrow K$

On pose $r(x) = x$ pour $x \in K$.

Fixons $x \in K$, et montrons que $Z \cup K$ est un voisinage de x, et que r est C^0 en x.

Pour cela, on utilise l'hypothèse que K est localement contractile pour trouver une collection décroissante de voisinages de x dans K de la forme :

$$K \supseteq \underset{\text{contractile arbitraire}}{U_n} \supseteq B(x, r_n) \cap K \supseteq B\left(x, \frac{r_n}{2}\right) \cap K \supseteq \underset{\text{contractile}}{U_{n-1}} \supseteq B(x, r_{n-1}) \cap K \supseteq \dots$$

$$\dots \supseteq B\left(x, \frac{r_1}{2}\right) \cap K \supseteq \underset{\text{contractile}}{U_0} \supseteq B(x, r_0) \cap K \supseteq B\left(x, \frac{r_0}{2}\right) \cap K \ni x$$

On note $Y \subseteq X$ le sous-complexe fermé des cellules qui sont $\subseteq B\left(x, \frac{r_0}{2}\right)$.

On montre par récurrence sur k que $\begin{cases} \overbrace{Y_k}^{k\text{-squelette de } Y} \subseteq Z \\ r(Y_k) \subseteq U_k \end{cases}$.

Il suit que $Z \cup K$ contient $Y \cup K$ et est donc un voisinage de x et que r est C^0 en x (car $r(Y) \subseteq U_n$ et que U_n était arbitraire).