Chapitre 2 : Revêtements et groupe fondamental.

2.1 Revêtements

Déf : Une application continue $p : X \longrightarrow B$ d'espaces topologiques est un revêtement si, pour tout $b \in B$, il existe un voisinage $b \in U \subseteq B$ de b, un espace topologique discret F et un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(U) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(U)}"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

commute.

On dit que B est la base du revêtement.
F est la fibre (en b)
X est l'espace total
ϕ est une trivialisation locale
U est un ouvert de trivialisation.

ex : $p : B \times F \longrightarrow B$ la première projection,
c'est le revêtement trivial de fibre F.

Lemme : $p : X \to B$ est un revêtement ssi tout $b \in B$ admet un voisinage $U \subseteq B$ tel que $p^{-1}(U) = \coprod_{i \in I} U_i$ avec

$$p|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\sim} U \text{ homéo.}$$

Preuve : $\Rightarrow$ Poser $I = F$ et $U_i = \phi^{-1}(U \times \{i\})$.

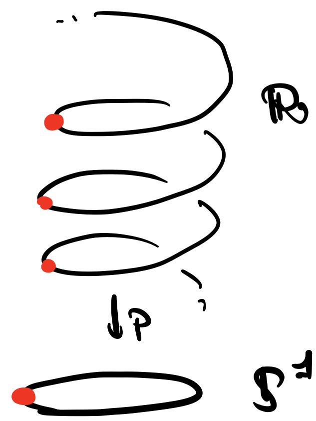
$\Leftarrow$ Poser $F = I$ et définir $\phi : \coprod_{i \in I} U_i \xrightarrow{\sim} U \times F$
$$x \in U_i \longmapsto (p(x), i)$$

ex : $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \longmapsto e^{2i\pi t}$ est un revêtement trivialisé au-dessus de $S^1 \setminus \{1\}$ et $S^1 \setminus \{-1\}$.

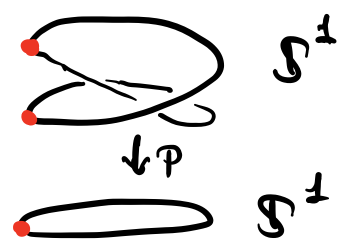
En effet $p^{-1}(S^1 \setminus \{1\}) = \mathbb{R} - \mathbb{Z} = \coprod_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[$

et $p|_{]n,n+1[} :]n, n+1[\xrightarrow{\sim} S^1 \setminus \{1\}$

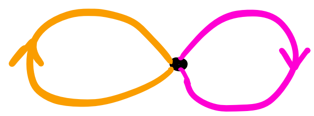
De même, $p^{-1}(S^1 \setminus \{-1\}) = \mathbb{R} - (\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}}]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$



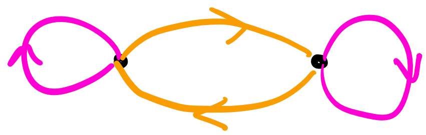
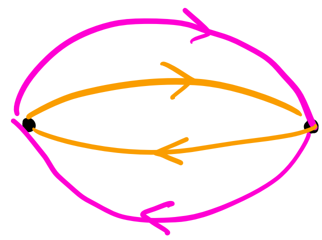
ex : $p : S^1 \longrightarrow S^1$, $z \longmapsto z^2$.

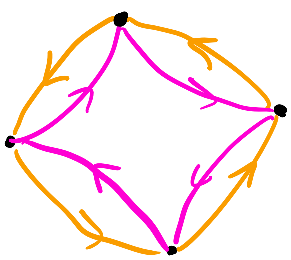
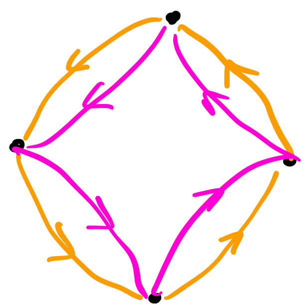


(plus généralement, $z \mapsto z^n$)

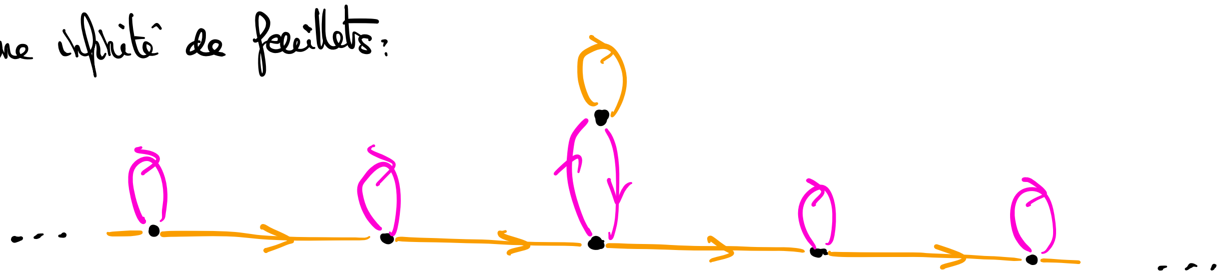
ex: Considérons l'espace:  .

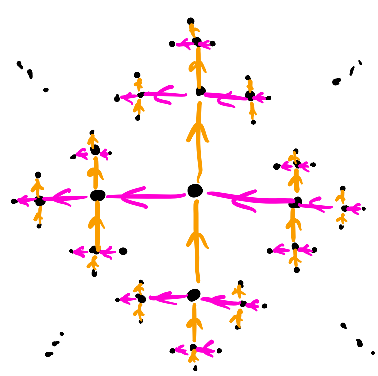
En voici plein de revêtements:

A 2 feuillets:  

A 4 feuillets:  

A une infinité de feuillets:





Lemme : Si B connexe, toutes les fibres de p sont homéomorphes.

Preuve : Soit F_0 la fibre de p en $b_0 \in B$.
L'existence d'ouverts de trivialisation montre que $\Omega := \{ b \in B \mid p^{-1}(b) \overset{\text{homéo}}{\simeq} F_0 \}$ est ouvert. Le même argument montre que $B - \Omega = \{ b \in B \mid p^{-1}(b) \overset{\text{homéo}}{\not\simeq} F_0 \}$ est ouvert. Comme B est connexe et $b_0 \in \Omega$, on a $\Omega = B$.

On parlera de revêtement à n feuillets si toutes les fibres ont n éléments. Si B est connexe, il suffit par ce lemme qu'une fibre ait n éléments.

Def : Soit $p : X \to B$ et $p' : X' \to B$ deux revêtements. Un morphisme de revêtements entre p et p' est une application continue $f : X \to X'$ telle que $p' \circ f = p$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Si f est de plus un homéomorphisme, on dit que c'est un isomorphisme de revêtements.

Prop. Soit G un groupe agissant par homéomorphismes sur un espace topologique X. On suppose l'action totalement discontinue au sens où :

$(*)$ " tout $x \in X$ admet un voisinage $x \in V \subseteq X$ tel que
$gV \cap V = \emptyset$ pour tout $g \in G \setminus \{e\}$ ".

Alors l'application quotient $\pi : X \longrightarrow X/G$ est un revêtement.

Preuve : • L'application π est ouverte car si $V \subseteq X$ ouvert, $\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{g \in G} g.V$ est ouvert donc $\pi(V)$ est ouvert.

• Soit $x \in X$. Pour construire une trivialisation locale en $\pi(x)$, on prend un voisinage $x \in V \subseteq X$ comme en $(*)$. Soit $U = \pi(V)$.

Alors $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{g \in V} g.V$ (l'union est disjointe par $(*)$)

et $\pi|_{gV} : gV \longrightarrow U$ est continue, bijective (par $(*)$) et ouverte, donc un homéomorphisme.

ex : $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{C}$, $G \times X \longrightarrow X$
$(n, z) \longmapsto z + n$

$X/G = \mathbb{C}^*$ avec $\pi : X \longrightarrow X/G$
$z \longmapsto \exp(2i\pi z)$