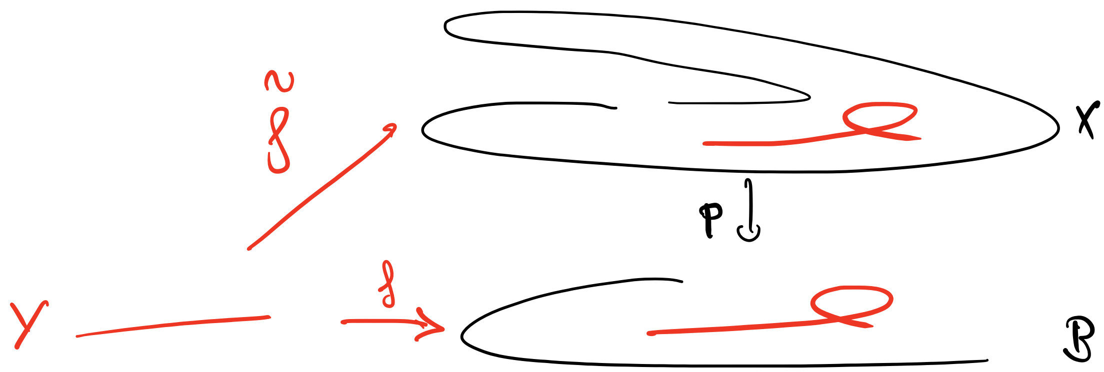
2.2 Relèvements (= principal outil technique de l'étude des revêtements).

Déf : Soit $p : X \to B$ un revêtement et $f : Y \to B$ C^0.
Un relèvement de f est une application continue $\tilde{f} : Y \to X$ telle que $f = p \circ \tilde{f}$.

Un rele de $\mathrm{Id} : B \to B$ est une section de p.



Prop : (Unicité des relèvements).
Si Y est connexe, deux relèvements coïncidant en un point sont égaux.

Preuve : Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ deux relèvements de f.

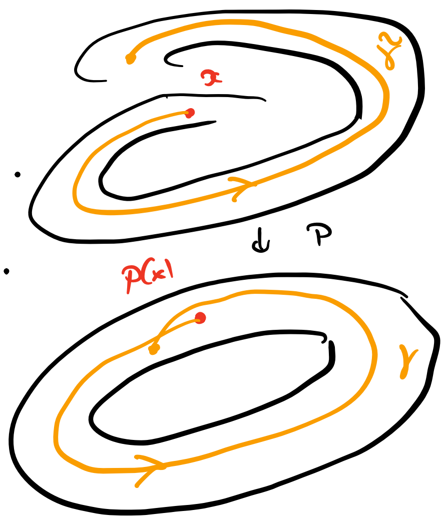
Posons $\begin{cases} A = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\} \\ B = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) \neq \tilde{f}'(y)\} \end{cases}$

Soit $y \in Y$. On choisit $f(y) \in U \subseteq Y$ et $\phi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times F$ une trivialisation locale en $f(y)$.

Soient $z, z' \in F$ tels que $\begin{cases} \Phi(\tilde{f}(y)) \in U \times \{z\} \\ \Phi(\tilde{f}'(y)) \in U \times \{z'\} \end{cases}$

Alors le voisinage ouvert $(\Phi \circ \tilde{f})^{-1}(U \times \{z\}) \cap (\Phi \circ \tilde{f}')^{-1}(U \times \{z'\})$ de y dans $f^{-1}(U)$ est $\begin{cases} \text{inclus dans } A \text{ si } y \in A \\ \text{inclus dans } B \text{ si } y \in B. \end{cases}$

Cela montre que A et B sont ouverts, donc comme $A \neq \emptyset$ et Y est connexe, que $A = Y$.



Prop (relèvement des chemins) :
Soit $p : X \to B$ un revêtement, et soit $x \in X$.
Soit $\gamma : [0,1] \to B$ C^0 tel que $\gamma(0) = p(x)$.
Alors il existe un unique $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ C^0 relevant γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$.

Prop (relèvement des homotopies)
Soit $p : X \to B$ un revêtement. Soit $H : [0,1] \times Y \to B$ C^0 et soit $\tilde{f} : Y \to X$ un relèvement de $f : \begin{array}{l} Y \longrightarrow B \\ y \longmapsto H(0,y) \end{array}$.

Alors il existe un unique relèvement $\tilde{H} : [0,1] \times Y \to X$ de H tel que $\tilde{H}(0,y) = \tilde{f}(y)$ pour tout $y \in Y$.

Preuve : • Le relèvement des chemins est un cas particulier du relèvement des homotopies pour $Y = \{*\}$. On démontre donc seulement la seconde proposition.

• Unicité : Si $y \in Y$, deux tels relèvements $\tilde{H}$ et $\tilde{H}'$ coïncident en $(0,y)$ donc sur $[0,1] \times \{y\}$ par connexité de $[0,1]$ et unicité des relèvements.

• Existence : Soit $y \in Y$. Si $s \in [0,1]$, il existe un voisinage $U_{s,y}$ de (s,y) dans $[0,1] \times Y$ tel que $H(U_{s,y})$ est inclus dans un ouvert de trivialisation de p.
Par compacité de $[0,1]$, il existe $n \geq 1$ et un voisinage U_y de $y \in Y$ tels que $H\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times U_y\right) \subseteq$ ouvert de trivialisation de p pour $0 \leq k \leq n-1$.

On construit alors, par réc. sur k, des relèvements $x_k : \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times U_y \to X$ de H tels que $x_0|_{\{0\} \times U_y} = \tilde{f}|_{U_y}$ et $x_{k+1}|_{\{\frac{k+1}{n}\} \times U_y} = x_k|_{\{\frac{k+1}{n}\} \times U_y}$.

Ils se recollent en un relèvement $x_y : [0,1] \times U_y \longrightarrow X$ de H.

Par unicité des relèvements, les $(x_y)_{y \in Y}$ se recollent en un relèvement $\tilde{H} : [0,1] \times Y \to X$.

Prop (relèvement des applications) :
Soit $p : X \to B$ un revêtement. Soit $f : Y \to B$ C^0 avec Y connexe et localement connexe par arcs. Soient $y \in Y$ et $x \in X$ tels que $f(y) = p(x)$.
Alors il existe un relèvement $\tilde{f} : Y \to X$ de f tel que $f(y) = x$ ssi

$$f_* \pi_1(Y,y) \subseteq p_* \pi_1(X,x) \quad \text{dans } \pi_1(B,b).$$

Preuve : • Si un tel relèvement existe, alors

$$f_*\pi_1(Y,y) = p_*\tilde{f}_*\pi_1(Y,y) \subseteq p_*\pi_1(X,x)$$

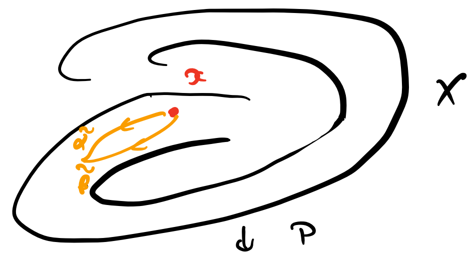
par functorialité de π_1.

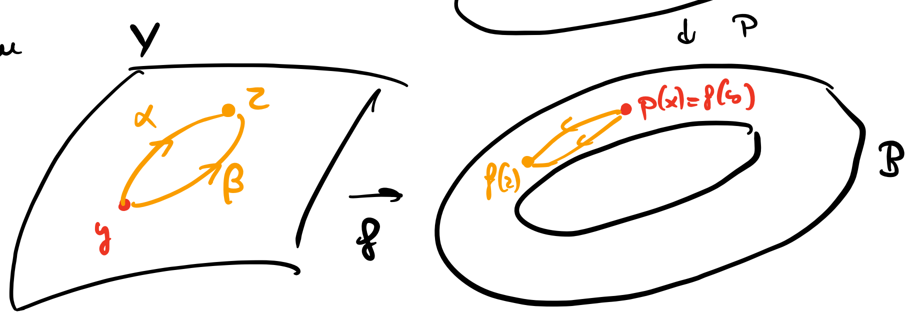
• Supposons réciproquement que $f_*\pi_1(Y,y) \subseteq p_*\pi_1(X,x)$.

Soit $z \in Y$. Soit $\alpha : [0,1] \to Y$ un chemin de y à z (α existe car Y est connexe et localement connexe par arcs, donc connexe par arcs). Par relèvement des chemins, on peut relever $f \circ \alpha$ en $\tilde{\alpha} : [0,1] \to X$ tel que $\tilde{\alpha}(0) = x$.

Si $\beta : [0,1] \to Y$ autre chemin de y à z de relevé $\begin{cases} \tilde{\beta} : [0,1] \to X, \\ \tilde{\beta}(0) = x \end{cases}$,

alors $f_*[\alpha\bar{\beta}] \in f_*\pi_1(Y,y) \subseteq p_*\pi_1(X,x)$. On peut donc choisir $\gamma : [0,1] \to X$ lacet basé en x tel que $p \circ \gamma$ homotope rel. $\{0,1\}$ à $f \circ \alpha\bar{\beta}$.





Relevant cette homotopie, on voit que $f \circ \alpha\bar{\beta}$ se relève en un lacet basé en x. Comme ce relevé est la concaténation d'un relevé de $f \circ \alpha$ (redonnant $\tilde{\alpha}$) et d'un relevé de $f \circ \bar{\beta}$ (redonnant $\overline{\tilde{\beta}}$), on voit que $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$. Cela permet de définir

$$\begin{aligned} \tilde{f} : Y &\longrightarrow X \\ z &\longmapsto \tilde{\alpha}(1) \end{aligned}$$

(bien indépendant de α !).

Pour conclure, il faut montrer que $\tilde{f}$ est continue en $z \in Y$. Soit $U \subseteq \tilde{Y}$ un voisinage ouvert de $\tilde{f}(z)$ tel que $p|_U : U \longrightarrow p(U)$ homéomorphisme. Soit $V \subset f^{-1}(p(U))$ voisinage connexe par arcs de z.

Soit $z' \in V$. Choisissons $\gamma : [0,1] \longrightarrow V$ chemin de z à z'. Alors le chemin $\alpha' = \alpha\gamma$ de y à z' se relève en $\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}$ où $\tilde{\alpha}$ chemin de x à $\tilde{f}(z)$ et $\tilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow U$. Comme $\tilde{f}(z') = \tilde{\alpha}\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(1) \in U$, on a bien montré que $\tilde{f}$ est continue.