2.3 Classification des revêtements

2.3.1 Groupe associé à un revêtement.

Prop : Soit $p : X \to B$ revêtement et soit $x \in X$.

Alors $p_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(B, p(x))$ est injective.

Preuve : Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un lacet basé en x. Soit

$H : [0,1] \times [0,1] \to B$ une homotopie rel. $\{0,1\}$ entre $p \circ \gamma$ et le

le lacet constant $c_{p(x)}$.

Par relèvement des homotopies, il existe une homotopie $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to X$ relevant H telle que $\tilde{H}(0,t) = \gamma(t)$ pour $t \in [0,1]$.

$\tilde{H}$ est une homotopie rel $\{0,1\}$ (par unicité des relevements de $s \mapsto H(s,0)$ et $s \mapsto H(s,1)$)

entre l'unique relèvement de $p \circ \gamma$ valant x en 0 : γ

et l'unique relèvement de $c_{p(x)}$ valant x en 0 : c_x

Ainsi $[\gamma] = [c_x] = 0$ dans $\pi_1(X, x)$.

Def : Si $p : X \to B$ est un revêtement, le groupe du revêtement p associé à un point $x \in X$ est le sous-groupe $p_*(\pi_1(X, x))$ de $\pi_1(B, p(x))$.

But : Classifier les revêtements par les groupes associés.

2.3.2 Action du groupe fondamental de la base sur la fibre.

Soit $p : X \to B$ revêtement et $b \in B$. Si $\alpha : [0,1] \to B$ lacet basé en b et si $x \in p^{-1}(b)$, on considère l'unique chemin $\tilde{\alpha} : [0,1] \to X$ relevant α avec $\tilde{\alpha}(0) = x$. Notons $x.\alpha = \tilde{\alpha}(1)$.

Par relèvement des homotopies, $\tilde{\alpha}(1)$ ne dépend que de la classe de α dans $\pi_1(B,b)$. On obtient ainsi une action à droite

$$\rho : \pi_1(B,b) \times p^{-1}(b) \longrightarrow p^{-1}(b)$$
$$([\alpha], x) \longmapsto x.\alpha = \tilde{\alpha}(1).$$

du groupe fondamental de la base sur la fibre.

Cette action est transitive si X est connexe par arcs.

Lemme : Le groupe de p associé à $x \in p^{-1}(b)$ est le stabilisateur de x par ρ.

Preuve : • Si $\alpha : [0,1] \to B$ lacet basé en b tel que $x.[\alpha] = x$, le relevé $\tilde{\alpha} : [0,1] \to X$ de α avec $\tilde{\alpha}(0) = x$ satisfait $\tilde{\alpha}(1) = x$. C'est un lacet basé en x tel que $\alpha = p_* \tilde{\alpha}$.

• Si $\alpha : [0,1] \to B$ lacet basé en b est homotope à $p_* \beta$ pour $\beta : [0,1] \to X$ lacet basé en x, on a

$$x.[\alpha] = x.[p_* \beta] = \beta(1) = x.$$

2.3.3 Unicité du revêtement de groupe donné.

Prop : Soient $p : \underset{\overset{\cup}{x}}{X} \longrightarrow B$ et $p' : \underset{\overset{\cup}{x'}}{X'} \longrightarrow B$ deux revêtements pointés avec X, X' connexes et B localement connexe par arcs. Si p et p' ont même groupes de revêtement associés à x et x', alors il existe un isomorphisme de revêtements $f : X \xrightarrow{\sim} X'$ tel que $f(x) = x'$.

Preuve : Par relèvement des applications, il existe un relèvement $f : X \to X'$ de p dans le revêtement p' tel que $f(x) = x'$, et un relèvement $g : X' \to X$ de p' dans le revêtement p tel que $g(x') = x$.

On a $g \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ g = \mathrm{Id}$ par unicité des relèvements.

2.3.4. Revêtement universel. (cas du groupe trivial)

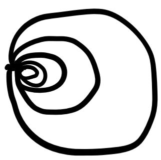
Def : Un espace topologique X est simplement connexe s'il est connexe par arcs et si il existe $x \in X$ avec $\pi_1(X, x) = 0$.

Remarque : On a alors $\pi_1(X, x') = 0$ pour tous $x' \in X$ (car on a construit une bijection $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x')$).

Déf : Un revêtement d'un espace connexe et localement connexe par arcs est **universel** s'il est simplement connexe.

Déf : Un espace topologique est **semi-localement simplement connexe** si tout $x \in X$ a un voisinage $x \in U \subseteq X$ tel que l'inclusion induit le morphisme nul $\pi_1(U,x) \longrightarrow \pi_1(X,x)$.

ex : Un espace topologique localement contractile est semi-localement simplement connexe. C'est le cas des variétés topologiques et des CW-complexes.

L'espace  $= \bigcup_{n \geq 1} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ n'est pas semi-localement simplement connexe.

Prop : Soit B un espace connexe localement connexe par arcs. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) B admet un revêtement universel.

(ii) B est semi-localement simplement connexe.

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $p : X \to B$ revêtement universel, $x \in X$ et $b = p(x)$. Soit $b \in U$ un ouvert de trivialisation de p, de sorte qu'il existe une section $s : U \to X$ de p au-dessus de U. La composée

$$\pi_1(U,b) \xrightarrow{s_*} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\pi_1(X,x)} \xrightarrow{p_*} \pi_1(B,b)$$

est nulle, ce qui conclut par fonctorialité.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

① Définition de $p : X \to B$.

Fixons $b \in B$. Soit X l'ensemble des classes d'homotopie rel. $\{0,1\}$ de chemins $\gamma : [0,1] \to B$ avec $\gamma(0) = b$, et posons $p([\gamma]) = \gamma(1)$.

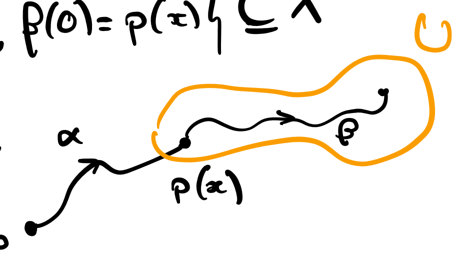
② Topologie sur X

Soit $\mathcal{U} = \left\{ U \subseteq B \text{ ouvert tels que } \middle| \begin{array}{l} U \text{ connexe par arcs} \\ \pi_1(U,a) \to \pi_1(B,a) \text{ trivial pour } a \in U \end{array} \right\}$

Comme B localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe, $\mathcal{U}$ forme une base de la topologie de B.

Si $x \in X$ et $U \in \mathcal{U}$ voisinage de $p(x)$,

on note $U_x = \{ [\alpha\beta] \mid [\alpha] = x,\ \beta : [0,1] \to U,\ \beta(0) = p(x) \} \subseteq X$



Si $U_x, V_y \subseteq X$ sont deux tels sous-ensembles, et si $z \in U_x \cap V_y$, on choisit $W \in \mathcal{U}$ voisinage de $p(z)$ inclus dans $U \cap V$. Alors $W_z \subseteq U_z \cap V_z = U_x \cap V_y$.

Ceci montre que les $(U_x)_{\substack{x \in X \\ U \in \mathcal{U},\, p(x) \in U}}$ forment la base d'une topologie sur X.

③ Continuité de p

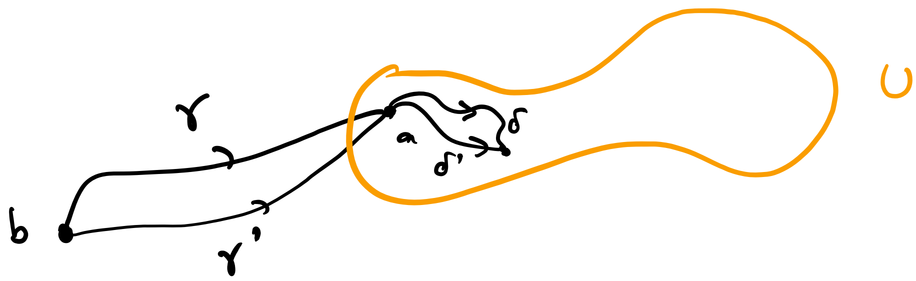
Soit $a \in B$ et soit $U \in \mathcal{U}$ avec $a \in U$. Alors $p^{-1}(U) = \bigcup_{\substack{\gamma \text{ chemin} \\ \text{de } b \text{ à } a}} U_{[\gamma]}$.

En effet, si $[\alpha] \in p^{-1}(U)$ et $\beta : [0,1] \to U$ reliant $\alpha(1)$ à a, on a $[\alpha] = [\gamma\bar{\beta}]$ avec $\gamma = \alpha\beta$. Donc $p^{-1}(U)$ ouvert.

④ Trivialisations locales.

J'affirme que $p^{-1}(U) = \bigcup U_{[\gamma]}$ est une trivialisation locale de p au-dessus de U.

- L'union est disjointe : si $\gamma, \gamma' : [0,1] \to B$ de b à a, et si $U_{[\gamma]} \cap U_{[\gamma']} \neq \emptyset$, alors il existe $\delta, \delta' : [0,1] \to U$ avec $\gamma\delta$ et $\gamma'\delta'$ homotopes rel. $\{0,1\}$. Mais $\delta\bar{\delta}'$ homotope rel. $\{0,1\}$ au lacet trivial car $\pi_1(U,a) \to \pi_1(X,a)$ nul. Donc $\gamma \sim \gamma\delta\bar{\delta}' \sim \gamma'\delta'\bar{\delta}' \sim \gamma'$ rel. $\{0,1\}$.



- $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ est surjective car U connexe par arcs.

Elle est injective car si $\delta, \delta' [0,1] \to U$ de a à c, $\gamma\delta \sim \gamma\delta\bar{\delta}\delta' \sim \gamma\delta'$ rel $\{0,1\}$.
car $\pi_1(U,a) \to \pi_1(X,a)$ est nul.

- $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \longrightarrow U$ ouverte car si $V_y \subseteq U_{[\gamma]}$, $p(V_y) = V$ est ouvert.

On déduit bien que $p|_{U_{[\gamma]}} : U_{[\gamma]} \xrightarrow{\sim} U$ homéomorphisme.

Il suit que p est un revêtement.

⑤ X est connexe par arcs.

Soit $x = [\gamma] \in X$. Alors $[0,1] \longrightarrow X$, $s \longmapsto [t \mapsto \gamma(st)]$ est un chemin de $[c_b]$ à $[x]$.

⑥ $\pi_1(X, [c_b]) = 0$.

Soit $\gamma : [0,1] \to X$ lacet en $[c_b]$.

Considérons $p \circ \gamma : [0,1] \to B$ lacet en b.

On dispose de deux relèvements de $p \circ \gamma$ à X d'origine $[c_b]$:

$$\begin{cases} \gamma : [0,1] \longrightarrow X \\ \gamma' : [0,1] \longrightarrow X \\ \quad t \longmapsto [s \mapsto p \circ \gamma(st)] \end{cases}$$

Par unicité des relèvements, $\gamma(t) = \gamma'(t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Ainsi, $[c_b] = \gamma(1) = \gamma'(1) = [s \mapsto p \circ \gamma(s)]$. Donc $[p \circ \gamma] = 0 \in \pi_1(B,b)$.

On a montré que $p_* \pi_1(X, [c_b]) = \{0\}$ donc que $\pi_1(X, [c_b]) = 0$.

2.3.5 Automorphismes du revêtement universel.

Prop : Soit B connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe, et soit $p : X \to B$ un revêtement universel.

(i) $\mathrm{Aut}(p)$ agit simplement transitivement sur les fibres de p.

(ii) $\mathrm{Aut}(p)$ agit totalement discontinûment sur X.

(iii) Si $x \in X$ et $b = p(x)$, il y a un unique isomorphisme $\gamma : \mathrm{Aut}(p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(B,b)$ tel que $f(x) = x . \gamma(f)$.

Preuve : (i) Si $x, x' \in p^{-1}(b)$, il existe d'uniques morphismes de revêtements $f : X \to X$ et $g : X \to X$ avec $f(x) = x'$ et $g(x') = x$.

Par unicité des relèvements, $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$.

(ii) Si $U \subseteq B$ ouvert de trivialisation connexe par arcs : $p^{-1}(U) \simeq \coprod_{i\in I} U_i$ avec $p|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\sim} U$, alors (i) montre que $\mathrm{Aut}(p)$ permute simplement transitivement les U_i.

(iii) $\pi_1(B,b)$ agit à droite sur $p^{-1}(b)$, transitivement et avec stabilisateurs triviaux. Ainsi, pour $f \in \mathrm{Aut}(p)$, il existe un unique $\gamma(f)$ tel que $f(x) = x.\gamma(f)$ pour tous $x \in p^{-1}(b)$.

γ est un morphisme car $x.\gamma(fg) = fg(x) = f(x\gamma(g)) = f(x).\gamma(g) = x.\gamma(f)\gamma(g)$.

Cette égalité est valable car les actions de $\mathrm{Aut}\, p$ et $\pi_1(B,b)$ sur $p^{-1}(b)$ commutent. Vérifions-le ! Soit $\gamma : [0,1] \to B$ lacet en b, $f \in \mathrm{Aut}(p)$ et $x \in p^{-1}(b)$. Soit $\tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ relevé de γ avec $\tilde{\gamma}(0) = x$. Alors $\tilde{\gamma}(1) = x.[\gamma]$. Comme $f \circ \tilde{\gamma} : [0,1] \to X$ relevé de γ issu de $f(x)$, on a

$$f(x.[\gamma]) = f \circ \tilde{\gamma}(1) = f(x).[\gamma].$$

Corollaire : $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$

Preuve : Considérons le revêtement $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$, $t \longmapsto e^{2i\pi t}$.

Il est universel car $\mathbb{R}$ est contractile. Le groupe $\mathbb{Z}$ agit sur $\mathbb{R}$ par translations. Cela induit un morphisme $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Aut}(p)$. Comme $\mathbb{Z}$ agit transitivement sur les fibres de p, la proposition précédente montre

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(p) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1).$$

Remarque : intuitivement, cet isomorphisme "compte le nombre de tours" qu'effectue un lacet dans S^1.

2.3.6 Correspondance de Galois

Th : Soit B connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe. Soit $b \in B$.
Alors il y a une bijection :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{c} \text{revêtements } p : X \to B \text{ avec } X \text{ connexe} \\ \text{et } x \in p^{-1}(b) \end{array} \right\} \Big/ \begin{array}{l}\text{isomorphismes}\\ \text{pointés de}\\ \text{revêtements}\end{array} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{sous-groupes de} \\ \pi_1(B,b) \end{array} \right\}$$

$$(X, p, x) \longmapsto p_* \pi_1(X, x)$$

Preuve : • Injectivité : si (X,p,x) et (X',p',x') induisent le même sous-groupe, par relèvement des applications, il existe des morphismes $f : X \to X'$, $x \mapsto x'$ et $g : X' \to X$, $x' \mapsto x$ de revêtement, et $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$ par unicité des relèvements.

• Surjectivité : Soit $\tilde{p} : \tilde{B} \to B$ un revêtement universel et soit $\tilde{b} \in \tilde{p}^{-1}(b)$. Considérons l'isomorphisme $\gamma : \mathrm{Aut}(\tilde{p}) \xrightarrow{\sim} \pi_1(B,b)$ associé à $\tilde{b}$. Pour $\Gamma \subseteq \pi_1(B,b)$ sous-groupe, $\gamma^{-1}(\Gamma)$ agit proprement discontinument sur $\tilde{B}$. On pose $X = \tilde{B}/\gamma^{-1}(\Gamma)$.
L'application induite $p : X \to B$ et l'image x de $\tilde{b}$ dans X sont telles que $\Phi(X,p,x) = \Gamma$.

ex : Les sous-groupes de $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ sont :

$$\{0\} \longleftrightarrow p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ t & \longmapsto & e^{2i\pi t} \end{array}$$

$$n\mathbb{Z} \longleftrightarrow p : \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^1 \\ z & \longmapsto & z^n \end{array} .$$

Déf : Un revêtement pointé $p : X \to B$, $x \in X$, est galoisien si le sous-groupe associé $\Gamma := p_* \pi_1(X, x) \subseteq \pi_1(B, p(x))$ est normal.

Si p galoisien, le groupe quotient $\pi_1(B, p(x))/\Gamma$ agit sur X, simplement transitivement sur les fibres de p.

Voici pour conclure une variante du théorème de classification, pour des revêtements non nécessairement pointés ou connexes.

Th : Soit B connexe, localement connexe par arcs, semi-localement simplement connexe. Soit $b \in B$.

Alors il y a une bijection :

$$\varphi : \{\text{revêtements } p : X \to B\}/_{\text{iso}} \xrightarrow{\sim} \left\{\begin{array}{l}\text{ensembles } E \text{ munis d'une} \\ \text{action à droite de } \pi_1(B, b)\end{array}\right\}/_{\text{bijections équivariantes}}$$

$$(X, p) \longmapsto p^{-1}(b)$$

Preuve : Le revêtement X est connexe si et seulement si l'action de $\pi_1(B,b)$ sur E est transitive. Comme un revêtement s'écrit de manière unique comme union disjointe de revêtements connexes, et par unicité de la décomposition de E en $\pi_1(B,b)$-orbites, on peut se restreindre aux revêtements connexes et aux actions transitives.

Injectivité de φ : $p : X \to B$ et $p' : X' \to B$ revêtements connexes avec

$$\underset{\substack{\cup \\ x}}{p^{-1}(b)} \underset{\pi_1(B,b)\text{-éq}}{\simeq} \underset{\substack{\cup \\ x'}}{p'^{-1}(b)} .$$

Alors les groupes associés aux revêtements pointés (X,x) et (X',x') sont $\mathrm{Stab}(x) = \mathrm{Stab}(x')$, et X et X' sont donc isomorphes.

Surjectivité de φ : Si $\pi_1(B,b) \curvearrowright E$ transitivement et $x \in E$, alors E est image par φ du revêtement de groupe $\mathrm{Stab}(x)$.