2.4 Théorème de Van Kampen.

2.4.1 Présentation d'un groupe par générateurs et relations

- Soit Σ un ensemble. Le groupe libre $L(\Sigma)$ engendré par Σ est l'ensemble des mots $z_1^{a_1} \dots z_m^{a_m}$, où $\begin{cases} m \geq 0 \\ z_i \in \Sigma \\ a_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ z_i \neq z_{i+1} \end{cases}$,

muni de la loi donnée par la concaténation des mots et simplification des $z_i^a z_i^b$ en $\begin{cases} z_i^{a+b} & (a+b \neq 0) \\ \emptyset & (a+b=0) \end{cases}$

ex: Dans $L(\{z,t\})$, $z^3 t^{-2} z^4 \cdot z^{-4} t^3 z^{-1} = z^3 t z^{-1}$.

Si G est un groupe et $\varphi : \Sigma \to G$ une application, alors il existe un unique morphisme de groupes $\overline{\varphi} : L(\Sigma) \to G$ tel que $\overline{\varphi}(z) = \varphi(z)$. Il est donné par $\overline{\varphi}(z_1^{a_1} \dots z_m^{a_m}) = \varphi(z_1)^{a_1} \dots \varphi(z_m)^{a_m}$.

- Soit Σ un ensemble et $R \subseteq L(\Sigma)$ un sous-ensemble. Le groupe défini par les générateurs Σ et les relations R est le groupe

$$L(\Sigma, R) := L(\Sigma) / \langle\langle R \rangle\rangle$$
$$\langle \Sigma \mid R \rangle$$

où $\langle\langle R \rangle\rangle$ est le plus petit sous-groupe normal contenant R.

Si G est un groupe et $\varphi : \Sigma \to G$ une application telle que $\overline{\varphi}(R) = \{e\}$, alors $\overline{\varphi}$ passe au quotient en un morphisme $L(\Sigma, R) \to G$.

Si G est un groupe, une présentation de G est un isomorphisme $G \simeq L(\Sigma, R)$ pour Σ et R bien choisis.

On dit que G est de type fini si on peut choisir Σ fini

de présentation finie si on peut choisir Σ et R finis.

ex: $\langle \Sigma \mid \emptyset \rangle = L(\Sigma)$

$\langle a \mid a^n \rangle = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z}^2$

• Soient H, G_1, G_2 trois groupes et $i_1 : H \to G_1$, $i_2 : H \to G_2$ des morphismes de groupes. On définit dans le produit amalgamé de G_1 et G_2 au-dessus de H

$$G_1 *_H G_2 = L(\Sigma, R) \quad \text{avec} \quad \Sigma = G_1 \amalg G_2$$

et R l'ensemble des relations de la forme:

$$\begin{cases} g \cdot g' \cdot (g g')^{-1} & , g, g' \in G_1 \text{ ou } g, g' \in G_2 \\ i_1(h)\, i_2(h)^{-1} & , h \in H \end{cases}$$

Ces relations montrent que les applications naturelles $\begin{cases} a_1 : G_1 \to G_1 *_H G_2 \\ a_2 : G_2 \to G_1 *_H G_2 \end{cases}$ sont des morphismes de groupes et $a_1 \circ i_1 = a_2 \circ i_2$.

ex: Si $H = \{e\}$, on note $G_1 * G_2 = G_1 *_{\{e\}} G_2$ le produit libre de G_1 et G_2.

<u>Prop</u> (propriété universelle) :

(i) Soit G est un groupe, $b_1 : G_1 \to G$, $b_2 : G_2 \to G$ des morphismes de groupes tels que $b_1 \circ i_1 = b_2 \circ i_2$, alors il existe un unique morphisme de groupe $\psi : G_1 *_H G_2 \longrightarrow G$ tel que

$$b_i(g) = \psi(a_i(g)) \quad (\text{pour } i \in \{1,2\} \text{ et } g \in G_i).$$

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & G_1 \arrow[d, "a_1"] \arrow[rdd, bend left, "b_1"] & \\
G_2 \arrow[r, "a_2"] \arrow[rrd, bend right, "b_2"'] & G_1 *_H G_2 \arrow[rd, dashed, "\psi"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

(ii) : la propriété (i) caractérise $(G_1 *_H G_2, a_1, a_2)$ au sens où si (Γ, a_1', a_2') est un groupe muni de morphismes $a_1' : G_1 \to \Gamma$, $a_2' : G_2 \to \Gamma$ avec $a_1' \circ i_1 = a_2' \circ i_2$ tel que (i) soit vérifié

(en remplaçant $(G_1 *_H G_2, a_1, a_2)$ par (Γ, a_1', a_2'))

alors il existe un unique isomorphisme $G_1 *_H G_2 \xrightarrow[u]{\sim} \Gamma$ avec $u \circ a_i = a_i'$, $i \in \{1,2\}$.

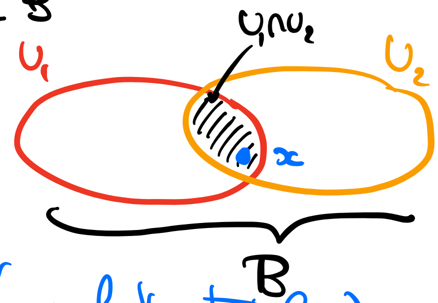
<u>Preuve</u> : (i) Cela suit du choix des générateurs et des relations.

(ii) Construire u en appliquant la propriété universelle de $G_1 *_H G_2$ à $G = \Gamma$, et l'inverse de u en appliquant la propriété universelle de Γ à $G = G_1 *_H G_2$.

2.4.2 Le théorème de Van Kampen

Th (Van Kampen) : Soit B connexe et localement connexe par arcs.

Soient $U_1, U_2 \subseteq B$ des ouverts tels que $\left|\begin{array}{l} U_1, U_2 \text{ et } U_1\cap U_2 \text{ sont connexes} \\ U_1 \cup U_2 = B \end{array}\right.$. Soit $x \in U_1 \cap U_2$.



Alors $\pi_1(B,x) = \pi_1(U_1,x) \underset{\pi_1(U_1\cap U_2,x)}{*} \pi_1(U_2,x)$.

Preuve (seulement dans le cas où U_1, U_2 et $U_1\cap U_2$ sont semi-localement simplement connexes, par ex loc^t contractiles.)

Montrons que $\pi_1(B,x)$ vérifie la propriété universelle du produit amalgamé. Soit G un groupe et $\left|\begin{array}{l} f_1 : \pi_1(U_1,x) \longrightarrow G \\ f_2 : \pi_1(U_2,x) \longrightarrow G \end{array}\right.$ des morphismes coïncidant sur $\pi_1(U_1\cap U_2, x)$.

On veut montrer l'existence d'un unique $\varphi : \pi_1(B,x) \longrightarrow G$ compatible.

Unicité : Il suffit de montrer que $\pi_1(U_1,x)$ et $\pi_1(U_2,x)$ engendrent $\pi_1(B,x)$.

Pour cela, soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow B$ lacet basé en x.

Par compacité de $[0,1]$, il existe n tel que $\gamma\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right)$ est inclus dans $U_{f(k)}$ pour tout une fonction $f : \{0, \dots, n-1\} \to \{1,2\}$.

Posons $\beta_k : [0,1] \longrightarrow U_{f(k)}$, $t \longmapsto \gamma\left(\frac{k+t}{n}\right)$ et soit $\alpha_k : [0,1] \longrightarrow U_{f(k)} \cap U_{f(k+1)}$ un chemin de x à $\gamma\left(\frac{k}{n}\right)$. Alors $\gamma = \beta_0 \cdots \beta_{n-1}$ est homotope à

$$(\beta_0 \bar{\alpha}_1)\cdot(\alpha_1 \beta_1 \bar{\alpha}_2) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{n-2}\beta_{n-2}\bar{\alpha}_{n-1})\cdot(\alpha_{n-1}\beta_{n-1}),$$

et chaque facteur a une classe dans $\pi_1(U_1,x)$ ou $\pi_1(U_2,x)$.

Existence :

Pour $i \in \{1,2\}$, faisons agir $\pi_1(U_i,x)$ à droite sur G via $\gamma \cdot g = g \cdot b_i(\gamma)$.

Soit $p_i : V_i \longrightarrow U_i$ le revêtement associé à ce $\pi_1(U_i,x)$-ensemble.

Comme b_1 et b_2 coïncident sur $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$, les $\pi_1(U_1 \cap U_2, x)$-ensembles obtenus par restriction sont isomorphes, donc les revêtements $p_1|_{p_1^{-1}(U_1 \cap U_2)}$ et $p_2|_{p_2^{-1}(U_1 \cap U_2)}$ de $U_1 \cap U_2$ sont isomorphes.

Recollant p_1 et p_2 à l'aide d'un tel isomorphisme, on obtient un revêtement $p : V \longrightarrow B$. Ce revêtement correspond à un $\pi_1(B,x)$-ensemble, i.e à une action de $\pi_1(B,x)$ à droite sur $G = p^{-1}(x)$, qui se restreint en les actions de $\pi_1(U_i,x)$ définies ci-dessus.

On définit
$$\varphi : \begin{array}{rcl} \pi_1(B,x) & \longrightarrow & G \\ \gamma & \longmapsto & \gamma \cdot e \end{array}.$$

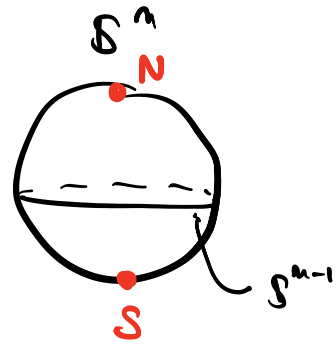
élément neutre de G.

φ se restreint bien en b_1 et b_2.

On vérifie que c'est un morphisme de groupes en se rappelant que $\pi_1(B,x)$ est engendré par les $\pi_1(U_i,x)$ et en écrivant, pour $\gamma = \gamma_1 \cdots \gamma_s$:
$(\gamma_j \in \pi_1(U_{i_j},x))$

$$\varphi(\gamma) = \gamma_1 \cdots \gamma_s \cdot e \underset{\text{récurrence sur } s}{=} b_{i_1}(\gamma_1) \cdots b_{i_s}(\gamma_s) = \varphi(\gamma_1) \cdots \varphi(\gamma_s).$$

Corollaire : Si $n \geq 2$, $\pi_1(S^n, x) = \{0\}$.



Preuve : Écrivons $S^n = U_1 \cup U_2$ avec $U_1 = S^n \setminus \{N\}$ et $U_2 = S^n \setminus \{S\}$. Alors U_1 et U_2 sont homéos à $\mathbb{R}^n$ donc contractiles, et $U_1 \cap U_2$ est homéo à $\mathbb{R} \times S^{n-1}$ et a donc le type d'homotopie de S^{n-1}.

Le théorème de Van Kampen montre alors que $\pi_1(S^n) = \{0\} *_{\pi_1(S^{n-1})} \{0\}$.
Ce groupe est engendré par l'élément neutre. C'est donc le groupe trivial !

2.4.3 Application aux variétés topologiques.

Th 1 Soit X une variété topologique compacte et $x \in X$.
Alors $\pi_1(X, x)$ est de présentation finie.

On va s'appuyer sur :

Lemme : Soient G et H des groupes. Supposons que H est un rétracte de G, au sens où il existe des morphismes de groupes $a : H \to G$ et $b : G \to H$ avec $b \circ a = Id$.
Alors, si G est de présentation finie, H aussi.

Preuve du lemme : Comme G est de présentation finie, on peut écrire $G = L(\Sigma, R)$, $\underset{\{z_i\}}{\Sigma}$, $\underset{\{r_j\}}{R}$ finis. Soit $p : L(\Sigma) \twoheadrightarrow G$ la surjection associée.

Comme $a \circ b \circ p(z_i) \in G$, il existe $w_i \in L(\Sigma)$ avec $p(w_i) = a \circ b \circ p(z_i)$.

Posons $K = L(\Sigma, R \cup \{z_i^{-1} w_i\})$. C'est un groupe de présentation finie.

La surjection naturelle $q : L(\Sigma) \twoheadrightarrow K$ factorise par $u : G \to K$ car $q(R) = \{0\}$.

$$\begin{tikzcd} L(\Sigma) \arrow[d, "p"] & \\ G \arrow[r, two heads, "u"] \arrow[dr, "b"'] & K \arrow[d, dashed, "v"] \\ & H \end{tikzcd}$$

On calcule $b \circ p(w_i) = b \circ a \circ b \circ p(z_i)$
$= b \circ p(z_i)$

donc $b \circ p(z_i^{-1} w_i) = 0$. De plus $b \circ p(R) = 0$.

On déduit l'existence d'un morphisme de groupes $v : K \to H$ tel que $b = v \circ u$.

- $v \circ u \circ a = b \circ a = \mathrm{Id}$.
- $u \circ a(b \circ p(z_i)) = u \circ p(w_i) = u \circ p(z_i)$ (par déf de K)

de sorte que $u \circ a$ est surjective.

Ces deux faits montrent que v est bijective d'inverse $u \circ a$.

Cela conclut !

Preuve du Th 1 : On a vu dans la première partie du cours que X est rétracte d'un CW-complexe fini Y : $\begin{array}{l} i : X \to Y \\ r : Y \to X \end{array}$ $r \circ i = \mathrm{Id}_X$.

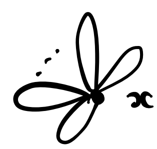
Alors $\pi_1(X,x)$ est rétracte de $\pi_1(Y, i(x))$ par fonctorialité.

Vu le lemme ci-dessus, on conclut à l'aide de :

Th2 Soit X un CW-complexe fini et $x \in X$.
Alors $\pi_1(X,x)$ est de présentation finie.

Preuve du Th2 : On peut supposer X connexe.

Etape 1 : Cas où X est un bouquet de n cercles.

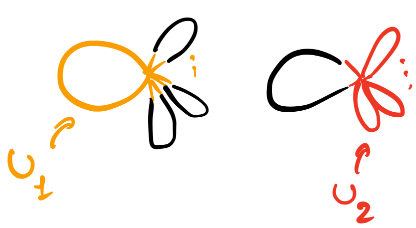


Par changement de point base, on peut prendre pour x l'unique 0-cellule.

On montre par récurrence sur n que $\pi_1(X,x)$ est le groupe libre en n générateurs.

- Pour $n=1$, c'est $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$.

- Pour $n \geq 2$, on applique van Kampen avec U_1 un petit voisinage d'un des cercles et U_2 un petit voisinage du bouquet des $n-1$ autres cercles



Alors $\pi_1(X,x) = \pi_1(U_1,x) *_{\pi_1(U_1 \cap U_2, x)} \pi_1(U_2,x)$

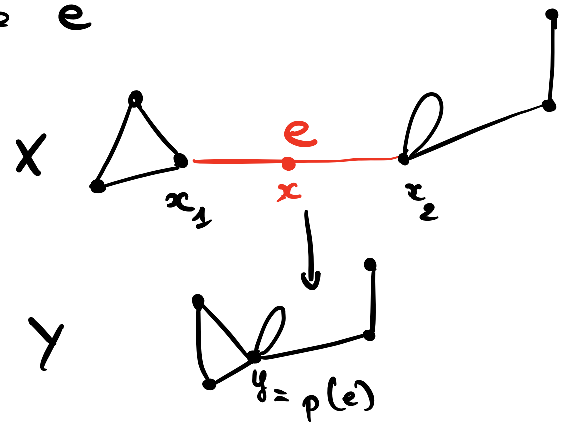
$= \mathbb{Z} * (\underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n-1 \text{ copies}})$.

Etape 2 : Cas où X est de dimension 1.

On raisonne par récurrence sur le nombre de 0-cellules de X.

S'il y en a une seule, c'est l'étape 1.

Sinon, on peut trouver deux 0-cellules = sommets de X (x_1 et x_2) reliées par une 1-cellule = arête e



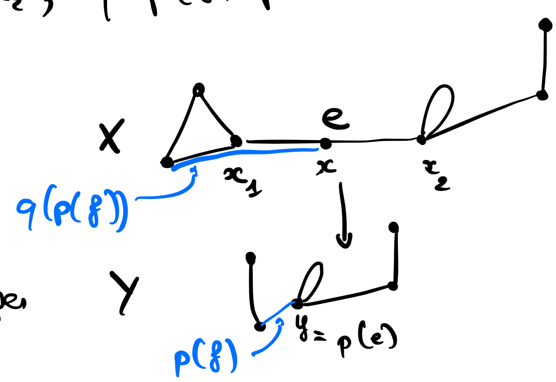
Posons $p : X \longrightarrow Y := X/e$.

Alors $\overline{X}$ est un CW-complexe de dim 1 avec un sommet et une arête en moins.

Pour conclure, il suffit de vérifier que p est une équivalence d'homotopie. On construit un inverse d'homotopie $q : Y \longrightarrow X$

- $q(p(z)) = z$ si z n'est pas sur une arête dont une extrémité est x_1 ou x_2.
- Pour $y = p(x_1) = p(x_2)$, $q(y) = x$ le milieu de l'arête e
- Si f arête joignant x_1 à $z \neq x_1, x_2$, $q \circ p(f)$ parcourt d'abord le segment $[x, x_1]$ puis l'arête f.

On fait un choix analogue si f joint x_1 à x_1, ou x_1 à x_2...



Il faut vérifier que $p \circ q$ et $q \circ p$ sont homotopes à Id.

Étape 3 : Cas général par récurrence sur le nombre de cellules, en partant du 1-squelette (cf Exo 3 du TD6).

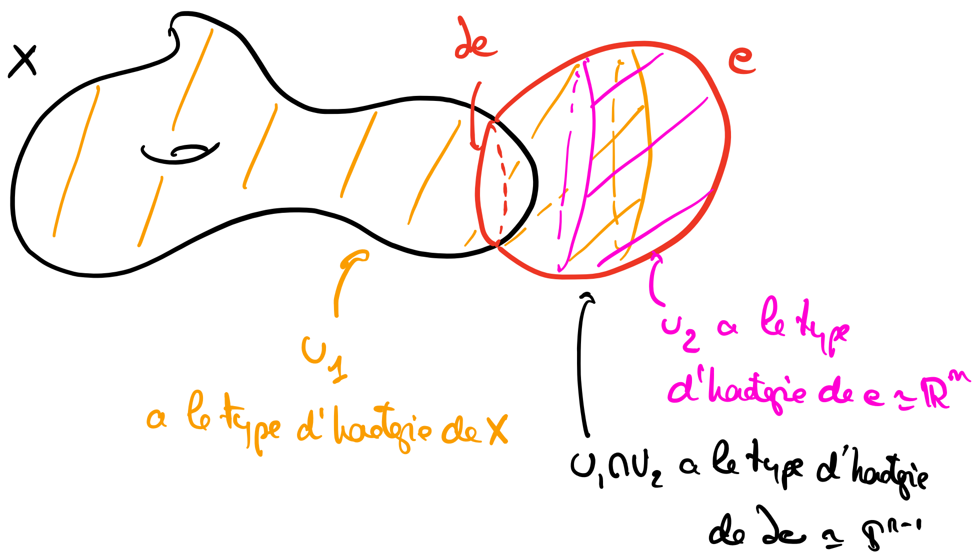
Plus précisément, le th de Van Kampen montre que :

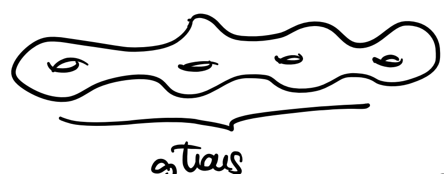
Ajouter une 2-cellule e via $f : \partial e \to X$ ajoute une relation car

$$\pi_1(X \cup_f e) = \pi_1(X) *_{\pi_1(\partial e)} \pi_1(e) = \pi_1(X) *_{\mathbb{Z}} \{0\} = \pi_1(X) / \langle\langle \mathbb{Z} \rangle\rangle .$$

De même, ajouter une n-cellule e ($n \geq 3$) ne change pas le groupe fondamental car

$$\pi_1(X \cup_f e) = \pi_1(X) *_{\pi_1(\partial e)} \pi_1(e) = \pi_1(X) *_{\{0\}} \{0\} = \pi_1(X).$$



Corollaire de la preuve : Comme $\Sigma_g =$  est homéomorphe

au CW-complexe obtenu en recollant une 2-cellule sur le bouquet de $2g$ cercles $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ via l'application d'attachement $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$,

on a $\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$

En particulier, si $g \neq g'$, Σ_g et $\Sigma_{g'}$ n'ont pas le même type d'homotopie car $\pi_1(\Sigma_g)^{ab} \simeq \mathbb{Z}^{2g} \not\simeq \mathbb{Z}^{2g'} \simeq \pi_1(\Sigma_{g'})^{ab}$. (voir Exo 4 de TD6 pour plus de détails)

Commentaires culturels :

- Tout groupe de présentation finie est π_1 d'un CW-complexe fini.

(prendre une 0-cellule
une 1-cellule par générateur — cf Exo 3 de TD6)
une 2-cellule par relation

- Tout groupe de présentation finie est π_1 d'une variété topologique compacte de dimension 4

(pour ajouter un générateur, faire une somme connexe avec $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3$
pour imposer une relation, représenter l'élément de π_1 qu'on souhaite tuer par un lacet plongé $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow X$ et remplacer un voisinage tubulaire $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^3$ de ce lacet par une copie de $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^2$ à l'aide de l'isomorphisme $\partial(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^3) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 = \partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^2)$.)

- En revanche, tous les groupes de présentation finie ne sont pas des π_1 de variétés compactes de dim. 3. $\pi_1(\mathbb{S}^3) = \{0\}$, $\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ et $\pi_1((\mathbb{S}^1)^3) = \mathbb{Z}^3$, mais on ne peut réaliser ceux-ci $\mathbb{Z}^n$ pour $n = 2$ ou $n \geq 4$!

Par ailleurs, le π_1 d'une variété compacte de dim 3 la détermine presque toujours, avec peu d'exceptions. Par exemple :

Th (Conjecture de Poincaré, Perelman 2002) :
X variété compacte connexe de dim. 3 avec $\pi_1(X) \simeq \{0\}$.
Alors X homéomorphe à $\mathbb{S}^3$.