# Examen de Topologie algébrique – 03/06/2022

9h - 12h.
Documents non autorisés.
Ne pas hésiter à admettre le résultat d'une question et à passer aux suivantes.

**Exercice 1.**

1. Donner la définition d'un revêtement.
2. Décrire le complexe des chaînes singulières du point à coefficients entiers.
3. Soit $x \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Calculer $H_i(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \setminus \{x\}, \mathbb{Z})$ pour $i \geq 0$.
4. Énoncer le théorème du point fixe de Lefschetz–Hopf.

**Exercice 2** (Dimension cohomologique des variétés topologiques)**.**

On fixe un entier $n \geq 1$. Soit $M$ une variété topologique de dimension $n$.
Si $K \subset M$ est compact, on dira que $(M, K)$ est bon si $H_i(M, M \setminus K, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n$.

1. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe non vide. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus K$ a le type d'homotopie de la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$.
2. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe non vide. Montrer que $(\mathbb{R}^n, K)$ est bon.

*(Les questions 3, 4 et 5 sont indépendantes.)*

3. Soit $K \subset M$ un compact et soit $U$ un voisinage de $K$ dans $M$. Montrer que $(M, K)$ est bon si et seulement si $(U, K)$ est bon.
4. Si $K, L \subset M$ sont compacts et si $(M, K)$, $(M, L)$ et $(M, K \cap L)$ sont bons, montrer que $(M, K \cup L)$ est bon.
5. Soit $K \subset M$ un compact. Supposons que pour tout voisinage $U$ de $K$ dans $M$, il existe un compact $K \subset L \subset U$ tel que $(M, L)$ soit bon. Montrer que $(M, K)$ est bon. *(On pourra représenter une classe d'homologie par une chaîne singulière.)*
6. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Montrer que $(\mathbb{R}^n, K)$ est bon.
7. Soit $K \subset M$ un compact. Montrer que $(M, K)$ est bon.
8. Soit $V \subset M$ un ouvert d'adhérence compacte. Montrer que $H_i(V, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n$.
9. Montrer que $H_i(M, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n$.
10. Soit $X$ un CW-complexe et soit $m > n$. On suppose que $X$ a une cellule de dimension $m$, mais pas de cellules de dimensions $m - 1$ et $m + 1$. Montrer que $X$ n'a pas le type d'homotopie d'une variété topologique de dimension $n$.

**Exercice 3 page suivante**

**Exercice 3** (Nœuds toriques)**.**

**Soient** $m, n \geq 1$ **des entiers.** Notons $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Soit $X_{m,n}$ le quotient de $[0,1] \times \mathbb{S}^1$ par la relation d'équivalence engendrée par $(0, z) \sim (0, w)$ si $z^n = w^n$ et $(1, z) \sim (1, w)$ si $z^m = w^m$. On note $p_{m,n} : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to X_{m,n}$ l'application quotient.

1. Montrer que $p_{m,n}(\{0\} \times \mathbb{S}^1)$ et $p_{m,n}(\{1\} \times \mathbb{S}^1)$ sont homéomorphes à $\mathbb{S}^1$.
2. Montrer que $p_{m,n}([0,1[\times \mathbb{S}^1)$ se rétracte par déformation forte sur $p_{m,n}(\{0\} \times \mathbb{S}^1)$ et que $p_{m,n}(]0,1] \times \mathbb{S}^1)$ se rétracte par déformation forte sur $p_{m,n}(\{1\} \times \mathbb{S}^1)$.
3. Soit $x \in p_{m,n}(]0,1[\times \mathbb{S}^1)$. Calculer les applications $\pi_1(p_{m,n}(]0,1[\times \mathbb{S}^1), x) \to \pi_1(p_{m,n}([0,1[\times \mathbb{S}^1), x)$ et $\pi_1(p_{m,n}(]0,1[\times \mathbb{S}^1), x) \to \pi_1(p_{m,n}(]0,1] \times \mathbb{S}^1), x)$ induites par les inclusions.
4. Soit $G_{m,n} := \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle$. Montrer que $\pi_1(X_{m,n}, x) \simeq G_{m,n}$.
5. Montrer que le sous-groupe $H_{m,n}$ de $G_{m,n}$ engendré par $a^m$ est normal et que
$$G_{m,n}/H_{m,n} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$
6. Montrer que le groupe $G_{m,n}$ est commutatif si et seulement si $m = 1$ ou $n = 1$.

**On suppose maintenant** $m$ **et** $n$ **premiers entre eux.** Soit $\mathbb{S}^3 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. On considère l'action $\rho_{m,n} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ de $\mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{S}^3$ donnée par la formule
$$\rho_{m,n}(z, (z_1, z_2)) = (z^m z_1, z^n z_2).$$

On note $\mathbb{CP}^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la compactification de $\mathbb{C}$ par un point $\infty$. Si $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on note $[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1$ l'élément $z_1/z_2 \in \mathbb{C}$ (si $z_2 \neq 0$) ou l'élément $\infty$ (si $z_2 = 0$). Soit $\pi_{m,n} : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{CP}^1$ défini par
$$\pi_{m,n}(z_1, z_2) = [z_1^n : z_2^m].$$

7. Montrer que les fibres de $\pi_{m,n}$ sont les orbites de l'action $\rho_{m,n}$.
8. Soit $I := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \cup \{\infty\} \subset \mathbb{CP}^1$. Montrer que $\pi_{m,n}^{-1}(I)$ est homéomorphe à $X_{m,n}$.
9. Construire une rétraction par déformation forte de $\mathbb{CP}^1 \setminus \{1\}$ sur $I$.
10. Construire une rétraction par déformation forte de $\pi_{m,n}^{-1}(\mathbb{CP}^1 \setminus \{1\})$ sur $\pi_{m,n}^{-1}(I)$.

**Supposons de plus que** $m, n > 1$. Notons $T_{m,n} := \{(\frac{z^m}{\sqrt{2}}, \frac{z^n}{\sqrt{2}}), z \in \mathbb{S}^1\} \subset \mathbb{S}^3$.

11. Montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme $\phi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ tel que $\phi(T_{1,1}) = T_{m,n}$.
12. Soient $m', n' > 1$ des entiers premiers entre eux tels que $\{m', n'\} \neq \{m, n\}$. Montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme $\phi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ tel que $\phi(T_{m',n'}) = T_{m,n}$.