Partiel de Topologie algébrique – 01/04/2022

10h - 12h.
Documents non autorisés.

Exercice 1.

1. L'espace $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ est-il homéomorphe à un CW-complexe ?
2. L'espace $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ est-il une variété topologique ?
3. Donner un exemple d'espace topologique pointé $x \in X$ tel que $\pi_1(X, x) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
4. Soient x et y deux points distincts de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Calculer $\pi_1((\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \setminus \{y\}, x)$.

Exercice 2 (Espaces de configurations)**.**

Soit $\mathbb{R}^\infty$ l'ensemble des suites $(x_i)_{i\geq 1}$ de nombres réels telles que $x_i = 0$ pour i assez grand. On identifie $\{(x_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{R}^\infty | x_i = 0 \text{ pour } i \geq n+1\}$ avec $\mathbb{R}^n$ et on munit $\mathbb{R}^\infty = \cup_{n\geq 1}\mathbb{R}^n$ de la topologie limite inductive.

On définit $\phi : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ par $\phi(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$.

1. Justifier que ϕ est continue.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que $F_a : [0, 1] \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ définie par $F_a(t, p) = (1 - t)\phi(p) + (ta, 0, 0, 0, \dots)$ est une homotopie entre ϕ et l'application constante de valeur $(a, 0, 0, 0, \dots)$.
3. Construire une homotopie $G : [0, 1] \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{R}^\infty$, $G(0, p) = p$ et $G(1, p) = \phi(p)$, et pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $p \mapsto G(t, p)$ est injective.

On fixe $k \geq 0$. On note $E_k = \{(p_1, \dots, p_k) \in (\mathbb{R}^\infty)^k \mid p_i \neq p_j \text{ pour } i \neq j\}$. Soit $o \in E_k$ un point base.

4. Soient $a_1, \dots a_k$ des réels distincts, et soit $q_i = (a_i, 0, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$. Utiliser G et les F_a pour construire une homotopie $H : [0, 1] \times E_k \to E_k$ telle que $H(0, e) = e$ et $H(1, e) = (q_1, \dots, q_k)$ pour tout $e \in E_k$.
5. En déduire que E_k est connexe par arcs et que $\pi_i(E_k, o) = 0$ pour $i \geq 1$.

On fait agir le groupe symétrique $\mathfrak{S}_k$ sur E_k par $\sigma \cdot (p_1, \dots, p_k) = (p_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, p_{\sigma^{-1}(k)})$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_k$. On note $B_k = E_k/\mathfrak{S}_k$ l'espace quotient et $f_k : E_k \to B_k$ l'application quotient.

6. Montrer que $f_k : E_k \to B_k$ est un revêtement.
7. Montrer que $\pi_1(B_k, f_k(o)) \simeq \mathfrak{S}_k$.
8. Montrer que $\pi_i(B_k, f_k(o)) = 0$ pour $i \geq 2$.
9. Soit G un groupe fini. Construire un espace connexe par arcs X tel que $\pi_1(X, x) \simeq G$ et $\pi_i(X, x) = 0$ pour $i \geq 2$ et $x \in X$.

Exercice 3 page suivante

Exercice 3 (Rationalisation du cercle)**.**

Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité. Pour $n \geq 1$, on note $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ l'application $f_n(z) = z^n$.

1. Quelle est l'image de $f_{n,*} : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$?

Soit $\sim_n$ la relation d'équivalence sur $[0,1] \times \mathbb{S}^1$ définie par $(t, z) \sim_n (t', z')$ si et seulement si $(t, z) = (t', z')$ ou ($t = t' = 1$ et $f_n(z) = f_n(z')$). Soit $p_n : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to C_n = ([0,1] \times \mathbb{S}^1)/\sim_n$ l'application quotient.

2. Construire des rétractions par déformation forte de $[0,1] \times \mathbb{S}^1$ sur $\{1\} \times \mathbb{S}^1$ et de C_n sur $p_n(\{1\} \times \mathbb{S}^1)$.
3. Soit $x_n = p_n(0, 1) \in C_n$. Calculer $\pi_1(C_n, x_n)$.
4. Définissons $i_n : \mathbb{S}^1 \to C_n$ par $i_n(z) = p_n(0, z)$. Calculer l'image de $i_{n,*} : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(C_n, x_n)$.

Pour $1 \leq m \leq n$, on note $T_{m,n}$ l'espace obtenu en quotientant l'union disjointe $C_m \sqcup \cdots \sqcup C_n$ par la relation d'équivalence engendrée par $p_k(1, z) \sim p_{k+1}(0, f_k(z))$ pour $m \leq k \leq n-1$ et $z \in \mathbb{S}^1$.

5. Construire une rétraction par déformation forte de $T_{m,n}$ sur $p_n(\{1\} \times \mathbb{S}^1)$.
6. Soit $i_{m,n} : \mathbb{S}^1 \to T_{m,n}$ définie par $i_{m,n}(z) = p_m(0, z)$. Calculer $\pi_1(T_{m,n}, x_m)$. Quelle est l'image de $i_{m,n,*} : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(T_{m,n}, x_m)$?

Soit T l'espace obtenu en quotientant $\sqcup_{k \geq 1} C_k$ par la relation d'équivalence engendrée par $p_k(1, z) \sim p_{k+1}(0, f_k(z))$ pour $k \geq 1$ et $z \in \mathbb{S}^1$. On note $j_n : T_{1,n} \hookrightarrow T$ l'inclusion naturelle. On a $T = \cup_{n \geq 1} j_n(T_{1,n})$.

7. Soit K un compact et soit $g : K \to T$ une application continue. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $g(K) \subset j_n(T_{1,n})$.
8. Soit $i \geq 1$. Montrer que $\pi_i(T, x_1)$ est union des images des $j_{n,*} : \pi_i(T_{1,n}, x_1) \to \pi_i(T, x_1)$.
9. Soit $i \geq 2$. Montrer que $\pi_i(T, x_1) = 0$.
10. Soit $n \geq 1$. Montrer que $j_{n,*} : \pi_1(T_{1,n}, x_1) \to \pi_1(T, x_1)$ est injective.
11. Montrer que $\pi_1(T, x_1) \simeq \mathbb{Q}$.
12. Montrer que T n'a pas le type d'homotopie d'un CW-complexe fini.