Théorie de Hodge pour les matroïdes

I Deux conjectures

- G graphe fini, S les sommets de G, A les arêtes.

  Pour $q \geq 1$, un coloriage à q couleurs de G est $\kappa : S \to \{1, \dots, q\}$ telle que $\kappa(s) \neq \kappa(t)$ si s et t adjacents.

  $P_G(q) :=$ nombre de coloriages de G à q couleurs.

  C'est un polynôme ! le polynôme chromatique.

$$\left[P_G(q) = \sum_{B \subseteq A} (-1)^{|B|} q^{c(B)} \right.$$

$c(B)$ ↷ nombre de composantes connexes de (S, B)

↷ preuve : inclusion-exclusion.

Écrivons $P_G(q) = \sum_{k=0}^{|S|} (-1)^k a_k q^{|S|-k}$

Conj (Read 1968, Hoggar 1974)

↳ $a_k \geq 0$

↳ la suite (a_k) est unimodale [elle croît, puis elle décroît]

↳ la suite (a_k) est logconcave [$a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1}$].

- V espace vectoriel sur un corps K,

  $v_1, \dots, v_m \in V$ famille de vecteurs de rang r.

$$f_k := \#\{I \subseteq \{1,\dots,m\} \mid |I| = k,\ (v_i)_{i\in I} \text{ libre}\}.$$

Conj (Mason - Welsh 1971-72).

↳ $f_k \geq 0$

↳ $(f_k)_{0\leq k\leq r}$ est unimodale

↳ $(f_k)_{0\leq k\leq r}$ est logconcave

[en fait $\frac{f_k}{\binom{m}{k}}$ logconcave prouvée en 2018]

- Ces deux conjectures sont désormais,

  la première par Huh (2012)

  la seconde par Huh - Katz et Lenz (2013)

II Matroïdes

Plus généralement, un **matroïde** $M = (E, \mathcal{I})$ est un ensemble fini, et une famille $\mathcal{I}$ de parties de E [ensembles indépendants] tels que

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(ii) $\forall I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$

(iii) $\forall I, J \in \mathcal{I}$ et $|I| < |J|$, il existe $e \in J \setminus I$ tel que $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ [axiome d'échange].

Polynôme caractéristique $\chi_n(q) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} q^{rk(E)-rk(F)}$

$$\chi_n(1) = (1-1)^{|E|} = 0$$

~ Polynôme caractéristique réduit :

$$\overline{\chi}_n(q) = \frac{\chi_n(q)}{q-1} \underset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \mu^k(M) q^{d-k} \qquad (d := rk(E)-1)$$

Th (Adiprasito, Huh, Katz 2018)

$\mu^k(M) \geq 0$, unimodale et log-concave.

Les deux conjectures ci-dessus s'en déduisent.

III Anneau de Chow d'une variété M

A M, on va associer $CH^*(M)$: une $\mathbb{R}$-algèbre graduée.
Le th de AHK résulte d'un th de "structure" de $CH^*(M)$

Th : (a) dualité de Poincaré

Il existe un isomorphisme $\deg_M : CH^d(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} CH^k(M) \times CH^{d-k}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\longmapsto \deg_M(ab) \end{aligned}$$

est une dualité parfaite.

(b) Lefschetz difficile

Il existe $\ell \in CH^1(M)$ tq

$$CH^k(M) \xrightarrow[\ell^{2d-2k}]{\sim} CH^{d-k}(M) \quad \text{pour tout } k \leq d.$$

(c) Hodge-Riemann

Soit $CH^k(M)_{prim} := \ker\left[\ell^{2d-2k+1} : CH^k(M) \to CH^{d-k+1}(M)\right]$,

la forme quadratique $(a,b) \mapsto (-1)^k \deg(ab\,\ell^{2d-2k})$

est définie positive. ⟵ source d'inégalités !

IV Inspiration géométrique.

Soit X une variété C^∞ compacte de dimension n.

$H^*(X, \mathbb{R})$ = cohomologie de de Rham singulière

est une algèbre pour le produit extérieur des formes différentielles cup produit.

Dualité de Poincaré : $\deg_\pi : H^n(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$

$$\omega \longmapsto \int_X \omega$$

et tel que $H^k(X, \mathbb{R}) \times H^{n-k}(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(a, b) \longmapsto \deg_X(ab)$$

non dégénéré.

Si $X \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ est une variété projective lisse de dimension complexe d (donc dimension réelle $n = 2d$), on a la structure supplémentaire (plutôt difficile) avec

$$l \in \mathrm{Im}\left[H^2(\mathbb{P}^N(\mathbb{C}), \underset{\shortparallel}{\mathbb{R}}) \longrightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})\right]$$

$\mathbb{R}$

et Hodge-Riemann (l'énoncé est plus compliqué).

Les énoncés combinatoires ci-dessus, qui s'appliquent aux matroïdes, ont été découverts par analogie avec ce cadre géométrique.

28/9 Séance introductive

5/10 1 Variétés : définitions, exemples.

12/10 2 Variétés 2 : dualité, niveaux

19/10 3 Conjectures de Hodge entière

26/10 VACANCES

2/11 4 Anneau de Chow d'une variété

9/11 5 Application degré

16/11 PARTIELS

23/11 6 Une façon pour le polynôme caractéristique

30/11 7 Théorie de Hodge pour les variétés.

7/12 8 Anneau de Chow d'une grassmannienne

14/12 9 Dualité de Poincaré

4/1

11/1 10 Lefschetz difficile et Hodge-Riemann I

18/1 11 Lefschetz difficile et Hodge-Riemann II

} moins

www.math.ens.psl.eu/~benoist/GTHodgeNotices.html.

Paul COUTANT-DENORD

Gaëtan DAUTZENBERG

Vivien SAUNIER

Emilie DENAYER

Madeleine MATHIEU

Noémie QUARTIER DIT MAÎTRE

Nathis ANDRES

Clara BRIAND

Paul MONTOBBIO

Mihaela MANDAL