Kohomologie affiner semialgebraischer Räume

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.) der Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg

vorgelegt von:

Hans Delfs
aus Lam

1980

Kohomologie affiner semialgebraischer Räume

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) der Fakultät für Mathematik der Universität Regensburg

vorgelegt von :

Hans Delfs aus Lam

1980

Promotionsgesuch eingereicht am : 16. 12. 80

Die Arbeit wurde angeleitet von : Prof. Dr. M. Knebusch

Prüfungsausschuß : Prof. Dr. L. Bröcker
Prof. Dr. Th. Bröcker
Prof. Dr. W. Hackenbroch
Prof. Dr. M. Knebusch

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. M. Knebusch, der mich zu dieser Arbeit angeregt hat und mir immer mit seinem Rat zur Seite gestanden ist, ebenso Herrn Prof. Dr. J. Neukirch, der mir vor allem in der Anfangsphase sehr geholfen hat.

Meiner lieben Frau und meinen lieben Eltern

gewidmet.

Inhaltsverzeichnis

§ 0 Einleitung

Wir fixieren einen reell-abgeschlossenen Grundkörper R. Unter einer R-Varietät V verstehen wir immer ein R-Schema von endlichem Typ, d.h. V ist eine endliche Vereinigung von offenen Unterschemata der Form Spec A mit einer endlich erzeugten R-Algebra A. V(R) bezeichne die Menge der R-rationalen Punkte von V, d.h. die Menge der abgeschlossenen Punkte von V mit Restklassenkörper R. Jeder abgeschlossene Punkt x von V besitzt als Restklassenkörper $\kappa(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ ja entweder R oder $R(\sqrt{-1})$. Die Punkte in V(R) heißen die reellen Punkte von V.

R kann auf genau eine Weise angeordnet werden, die positiven Elemente sind gerade die Quadrate. Diese Anordnung induziert eine Topologie auf R, eine Basis der offenen Mengen wird durch die offenen Intervalle

$$]a,b[\;=\; \{\, x \in R \mid a < x < b \,\}$$

gegeben.

Die Topologie von R induziert auf der Menge V(R) der reellen Punkte jeder R-Varietät V auf natürliche Weise eine Topologie, die wir die starke Topologie nennen wollen. Eine Subbasis wird gegeben durch die Mengen

$$f^{-1}(]a,b[) \;=\; \{\, x \in U(R) \mid f(x) \in \,]a,b[\, \}$$

wobei U die Zariski-offenen Teilmengen von V und f den Koordinatenring $\Gamma(U,\mathcal{O}_U)$ von U durchläuft. Ist V als lokal-abgeschlossenes Unterschema in einen affinen Standard-Raum $A_R^n = \operatorname{Spec} R\,[X_1,\ldots,X_n]$ eingebettet, so ist $V(R) \subseteq A_R^n(R) = R^n$ und die starke Topologie von V(R) wird durch die Produkttopologie auf R^n induziert.

Die starke Topologie von V(R) hat im allgemeinen schlechte Eigenschaften. Ist R nicht der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, so sind die topologischen Räume V(R) total unzusammenhängend, d.h., die Zusammenhangskomponenten sind einpunktig. Andererseits ist wohlbekannt ([W]), daß für jede Varietät V über den reellen Zahlen $V(\mathbb{R})$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

Um in vernünftiger Weise eine Homologie- und Kohomologietheorie der Räume V(R) erklären zu können, muß die starke Topologie ersetzt werden. Wir betrachten stattdessen die semialgebraische Topologie, eine verallgemeinerte Topologie im Sinne von Grothendieck: Die offenen Teilmengen von V(R) sind die in der starken Topologie offenen und semialgebraischen Teilmengen von V(R). Außerdem lassen wir nur endliche Überdeckungen zu. Semialgebraische Mengen lassen sich Zariski-lokal durch Systeme "polynomialer" Gleichungen und Ungleichungen beschreiben (siehe § 1, [DK II]).

Auch G.W. Brumfiel schlägt in seinem Buch ([B]) die Einführung dieser Topologie vor. M.F. Coste-Roy und M. Coste betrachten allgemeiner das reelle Spektrum eines kommutativen Rings ([CRC]). Semialgebraische Mengen über einem reell-abgeschlossenen Körper ordnen sich hier ein.
In dieser Arbeit werden nicht nur R-Varietäten V, sondern allgemeiner semialgebraische Räume betrachtet (§ 1, [DK II]). Mein Ziel ist es, die Topologie dieser Räume zu untersuchen und zu zeigen, daß es eine "vernünftige" Homologie- und Kohomologietheorie (zumindest im affinen Fall) für sie gibt. Etliche der dabei verwendeten Hilfsmittel sind in [DK II] behandelt. Einige der dort erzielten Ergebnisse, wie z.B. die Tatsache, daß semialgebraische Räume nur endlich viele Komponenten besitzen, werden auch hier, allerdings auf anderem Weg, abgeleitet. Bemerkenswert ist, daß wir nie das Tarski-Prinzip benützen, um "elementare Aussagen" vom Körper der reellen Zahlen auf beliebige reell-abgeschlossene Körper zu übertragen.
Im § 2 wird gezeigt, daß sich jede affine semialgebraische Menge triangulieren läßt. Dies wenden wir im § 3 bei der Untersuchung der Topologie affiner semialgebraischer Räume an. Diese hat ähnliche Eigenschaften wie die eines parakompakten topologischen Raums. Im § 5 folgern wir

daraus, daß sich die Kohomologie mit Werten in einer beliebigen abelschen Garbe als Čech-Kohomologie berechnen läßt und die kohomologische Dimension die topologische Dimension nicht übersteigt. Schwierigkeiten bereiten die unendlich kleinen Elemente in einem nichtarchimedischen Körper beim Beweis, daß die Kohomologie mit konstanten Koeffizienten homotopieinvariant ist. Den Schlüssel zu ihrer Überwindung liefert die Alexander-Spanier-Kohomologie, die im § 6 behandelt wird. Mit ihrer Hilfe wird im § 7, wenn auch etwas mühsam, das Homotopieaxiom bewiesen. Dieses, zusammen mit der Triangulierung, gestattet es uns, die Kohomologie mit konstanten Koeffizienten als simpliziale Kohomologie zu interpretieren und die Homologiegruppen affiner semialgebraischer Räume zu definieren (§ 8). Im § 9 wird untersucht, was beim Übergang zu einem anderen Grundkörper passiert, und gezeigt, daß sich für $R = \mathbb{R}$ die klassische Theorie ergibt. Schließlich wenden wir im § 10 unsere Kenntnisse an, um zu erläutern, daß die klassischen Dualitätssätze über einem beliebigen reell-abgeschlossenen Körper richtig bleiben, und erhalten als Anwendung den Jordanschen Kurvensatz. Offen bleibt zunächst die Frage, ob sich diese Ergebnisse auf separierte nicht-affine semialgebraische Räume ausdehnen lassen.

Unsere Kenntnisse der semialgebraischen Topologie gestatten es uns, die Garbentheorie auf der semialgebraischen Topologie von R-Varietäten vollständig zu algebraisieren, d.h., insbesondere lassen sich die Kohomologiegruppen $H^q(V(R),G)$ ohne die Verwendung von semialgebraischen Objekten erklären. Dies geschieht mit Hilfe der reell-etalen Topologie von V. Der entsprechende Vergleichssatz wurde in sehr allgemeiner Form von M.F. Coste-Roy und M. Coste ([CRC]) bewiesen, ist hier aber eine einfache Konsequenz der vorangehenden Überlegungen (§ 11). Im § 12 wird schließlich kurz die Garbe der Nashfunktionen auf V(R) behandelt, die in kanonischer Weise der "Strukturgarbe" $\mathcal{O}_{V\,\mathrm{ret}}$ auf dem reell-etalen Situs von V entspricht.

Einige Bezeichnungen :

1) R sei immer ein reell abgeschlossener Körper.

2) A_R^n ist der n-dimensonale affine Raum Spec $R[X_1,\dots,X_n]$, RP^n der n-dimensionale projektive Raum Proj $R[X_0,\dots X_n]$.

3) Für eine R-Varietät V bezeichne $\mathcal{O}_V$ die Strukturgarbe von V.

4) Für $x \in R$ sei $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$ der Betrag von x .

5) Für $x = (x_1,\dots,x_n) \in R^n$ sei $\|x\|$ die euklidische Norm von x : $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

6) Für $x \in R^n$ und $\epsilon \in R$, $\epsilon > 0$, sei

$B_\epsilon(x) = \{ y \in R^n \mid \|y - x\| < \epsilon \}$ und

$\overline{B}_\epsilon(x) = \{ y \in R^n \mid \|y - x\| \leq \epsilon \}$.

7) Ist $\mathfrak{F}$ eine abelsche Garbe, so sei $\Gamma(U,\mathfrak{F})$ die abelsche Gruppe der Schnitte von $\mathfrak{F}$ über U.

8) Für die Restriktion (von Funktionen, Schnitten einer Garbe etc.) verwenden wir das übliche Zeichen $|$.

9) Mit $\square$ kennzeichnen wir das Ende eines Beweises.

10) Für a, b $\in$ R sei $[a,b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b \}$ das abgeschlossene , $]a,b[= \{ x \in R \mid a < x < b \}$ das offene Intervall von a nach b .

§ 1 Semialgebraische Räume

In diesem einleitenden Abschnitt sollen semialgebraische Räume und Abbildungen definiert und einige grundlegende Tatsachen zusammengestellt werden. Alle Begriffsbildungen und Beweise der zitierten Sätze finden sich in [DK II].

Definition 1 : Sei V eine affine R-Varietät mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_V$. Eine Teilmenge M von V(R) heißt semialgebraische Teilmenge von V (oder semialgebraisch in V), wenn M eine endliche Vereinigung von Mengen

$$\{ x \in V(R) \mid f_i(x) = 0, i = 1,\dots,r;\ g_j(x) \geq 0,\ j = 1,\dots,s;\ h_k(x) > 0,\ k = 1,\dots,t \}$$

mit globalen Schnitten f_i, g_j, $h_k \in \Gamma(V,\mathcal{O}_V)$ ist.

Ist V in einen affinen Raum A^n_R eingebettet, so sind die semialgebraischen Teilmengen von V semialgebraische Mengen im klassischen Sinn, d.h. durch polynomiale Gleichungen und Ungleichungen definierte Teilmengen von R^n.
Jede semialgebraische Teilmenge M einer affinen R-Varietät V läßt sich auch als endliche Vereinigung von Mengen

$$\{ x \in V(R) \mid f(x) = 0,\ g_i(x) > 0,\ i = 1,\dots,r \}$$

mit f, $g_i \in \Gamma(V,\mathcal{O}_V)$ schreiben.
Etwas allgemeiner definieren wir :

Definition 2 : Sei V eine R-Varietät. Eine Teilmenge M von V(R) heißt semialgebraische Teilmenge von V (oder semialgebraisch in V), wenn für jeden Zariski-offenen affinen Teil U von V die Einschränkung $M \cap U(R)$ eine semialgebraische Teilmenge von U ist.

Eine Teilmenge M einer R-Varietät V ist genau dann semialgebraisch, wenn es eine Überdeckung von V durch offene affine Teilmengen V_i gibt, so daß $M \cap V_i(R)$ in V_i semialgebraisch ist.
Jede semialgebraische Teilmenge einer R-Varietät trägt die durch die Anordnung von R induzierte starke Topologie.

Definition 3 : Seien V, W R-Varietäten und M bzw. N semialgebraische Teilmengen von V bzw. W. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt semialgebraisch bezüglich V und W, wenn ihr Graph $G(f) \subseteq V \times_R W(R)$ eine semialgebraische Teilmenge von $V \times_R W$ und f stetig in der starken Topologie ist.
Die semialgebraischen Abbildungen von M nach R bezüglich V und A^1_R heißen semialgebraische Funktionen auf M (bezüglich V).

Beispiel: Sei $f : V \to W$ ein Morphismus zwischen R-Varietäten. Dann induziert f eine semialgebraische Abbildung

$f_R : V(R) \to W(R)$ (bezüglich V und W).

<u>Definition 4 :</u> Ein eingeschränkter topologischer Raum M ist eine Menge M zusammen mit einer Familie $\mathring{\mathfrak{S}}(M)$ von Teilmengen von M, genannt die offenen Teilmengen von M, so daß gilt :

i) $\emptyset \in \mathring{\mathfrak{S}}(M)$, $M \in \mathring{\mathfrak{S}}(M)$.

ii) Wenn U_1 und U_2 in $\mathring{\mathfrak{S}}(M)$ sind, so sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 \cup U_2$ in $\mathring{\mathfrak{S}}(M)$.

Wir betrachten jeden eingeschränkten topologischen Raum im folgenden Sinn als einen Situs :

Die Kategorie des Situs hat als Objekte die offenen Teilmengen von M und als Morphismen die Inklusionsabbildungen. Die Überdeckungen $\{U_i\}_{i\in I}$ einer offenen Menge U sind die <u>endlichen</u> Systeme offener Teilmengen von U mit $\bigcup_{i\in I} U_i = U$.

<u>Beispiel :</u> V sei eine R-Varietät und M eine semialgebraische Teilmenge von V. $\mathring{\mathfrak{S}}(M)$ sei die Familie der Teilmengen von M, die in V semialgebraisch und in der starken Topologie in M (relativ) offen sind. Dann ist $(M,\mathring{\mathfrak{S}}(M))$ ein eingeschränkter topologischer Raum. Diese Topologie heißt die <u>semialgebraische Topologie</u> von M. Wir bezeichnen diesen Situs mit M_{sa} .

<u>Definition 5 :</u> Ein geringter Raum über R ist ein Paar $(M, \mathfrak{G}_M)$, bestehend aus einem eingeschränkten topologischen Raum M und einer Garbe $\mathfrak{G}_M$ von R-Algebren auf M. Ein Morphismus $(f, \vartheta) : (M, \mathfrak{G}_M) \rightarrow (N, \mathfrak{G}_N)$ zwischen geringten Räumen über R besteht aus einer stetigen Abbildung $f : M \rightarrow N$ (d.h., das Urbild einer offenen Menge ist offen) und einer Familie $(\vartheta_V)_{V \in \mathring{\mathfrak{G}}(N)}$ von R-Algebrenhomomorphismen

$$\vartheta_V : \mathfrak{G}_N(V) \rightarrow \mathfrak{G}_M(f^{-1}(V)) \quad ,$$

die mit Restriktion verträglich sind.

<u>Beispiel :</u> Sei M eine semialgebraische Teilmenge der R-Varietät V, versehen mit der semialgebraischen Topologie. Für jede offene Teilmenge U von M sei $\mathfrak{G}_M(U)$ die R-Algebra der semialgebraischen Funktionen auf U bezüglich V. Dann ist $(M, \mathfrak{G}_M)$ ein geringter Raum über R. Wir nennen so einen geringten Raum einen <u>semialgebraischen Teilraum der Varietät</u> V.

<u>Definition 6 :</u>

i) Ein <u>affiner semialgebraischer Raum über</u> R ist ein geringter Raum $(M, \mathfrak{G}_M)$ über R, der isomorph zu einem semialgebraischen Teilraum einer affinen R-Varietät V ist.

ii) Ein <u>semialgebraischer Raum</u> über R ist ein geringter Raum $(M, \mathcal{O}_M)$ über R, der eine offene (endliche) Überdeckung $\{M_i\}_{i \in I}$ besitzt, so daß $(M_i, \mathcal{O}_M | M_i)$ für alle $i \in I$ ein affiner semialgebraischer Raum ist.

iii) Ein Morphismus zwischen semialgebraischen Räumen ist ein Morphismus in der Kategorie der geringten Räume.

Wie in [DK II], § 7, gezeigt wird, ist ein Morphismus $(f, \vartheta) : (M, \mathcal{O}_M) \to (N, \mathcal{O}_N)$ zwischen semialgebraischen Räumen schon durch f bestimmt. Für $V \in \mathring{\mathcal{O}}(N)$ und $g \in \mathcal{O}_N(V)$ ist $\vartheta_V(g) = g \circ f$. Wir schreiben deshalb immer kurz f statt (f, ϑ), ebenso wie M statt $(M, \mathcal{O}_M)$. Morphismen in der Kategorie der semialgebraischen Räume bezeichnen wir meist als semialgebraische Abbildungen.

<u>Beispiel :</u> Die Morphismen $f : M \to N$ zwischen semialgebraischen Teilräumen M und N der R-Varietäten V bzw. W sind gerade die semialgebraischen Abbildungen von M nach N bezüglich V und W (vgl. Definition 3).
Einzelheiten findet man in [DK II], §7 .

<u>Definition 7 :</u>

i) Sei M ein affiner semialgebraischer Raum über R und $f : M \to N$ ein Isomorphismus von M auf eine semialgebraische Teilmenge N einer R-Varietät V.

Eine Teilmenge A von M heißt semialgebraisch, wenn $f(A)$ eine semialgebraische Teilmenge von V ist.

ii) Sei M ein semialgebraischer Raum. Eine Teilmenge A von M heißt semialgebraisch, wenn für jeden affinen offenen Teilraum M' von M die Einschränkung $M' \cap A$ eine semialgebraische Teilmenge von M' ist.

Definition 7 i) hängt nicht von der Wahl des Isomorphismus f ab. Eine Teilmenge A des semialgebraischen Raums M ist genau dann semialgebraisch, wenn es eine Überdeckung $\{M_i\}$ von M durch offene affine Teilräume gibt, so daß $M_i \cap A$ semialgebraische Teilmenge von M_i ist.

Jeder semialgebraische Raum M trägt die durch die Anordnung von R induzierte starke Topologie. Eine Basis offener Mengen (im Sinne der Theorie gewöhnlicher topologischer Räume) ist die Menge $\mathring{\mathfrak{G}}(M)$ der offenen semialgebraischen Teilmengen von M.

Ab jetzt bezeichnen wir mit offener Teilmenge von M die in der starken Topologie offenen Teilmengen von M. Die in der semialgebraischen Topologie offenen Mengen, d.h. die Mengen aus $\mathring{\mathfrak{G}}(M)$, nennen wir offene semialgebraische Teilmengen von M. (Man beachte, daß diese Teilmengen tatsächlich semialgebraisch im Sinne von Definition 7 sind).

Ist R nicht der Körper der reellen Zahlen, so ist jeder semialgebraische Raum M über R in der starken Topologie total unzusammenhängend. Unter Verwendung der folgenden Definitionen läßt sich aber auch im allgemeinen Fall zeigen, daß ein semialgebraischer Raum nur endlich viele Komponenten besitzt (siehe [DK II] bzw. [W] für $R = \mathbb{R}$). Wir werden dieses Resultat auf anderem Wege auch in dieser Arbeit gewinnen (§ 2).

<u>Definition 8 :</u> Sei M ein semialgebraischer Raum. Ein semialgebraischer <u>Weg</u> in M ist eine semialgebraische Abbildung $\alpha : [0,1] \to M$ vom Einheitsintervall in R nach M. Zwei Punkte P, Q in M heißen verbindbar, wenn es einen semialgebraischen Weg α in M mit $\alpha(0) = P$ und $\alpha(1) = Q$ gibt.

Wir lassen künftig den Zusatz semialgebraisch weg und reden einfach von Wegen.
Die Äquivalenzklassen, in die ein semialgebraischer Raum M unter der Äquivalenzrelation "verbindbar" zerfällt, heißen die Wegekomponenten von M. Besitzt M nur eine Wegekomponente, so heißt M wegezusammenhängend.

Definition 9 : Ein semialgebraischer Raum M heißt zusammenhängend, wenn sich M nicht als disjunkte Vereinigung zweier offener nichtleerer semialgebraischer Teilmengen darstellen läßt.

Offenbar sind die Bilder (wege-)zusammenhängender semialgebraischer Räume unter semialgebraischen Abbildungen wieder (wege-)zusammenhängend. Da das Einheitsintervall $[0,1]$ zusammenhängend ist, folgt, daß ein wegezusammenhängender semialgebraischer Raum auch zusammenhängend ist. Wir werden später noch sehen, daß auch die Umkehrung richtig ist.

Im Laufe dieser Arbeit wird häufiger die Dimension eines semialgebraischen Raums benützt. Man findet die Definition und eine ausführliche Diskussion dieses Begriffs in [DK II], § 8 . Ist M eine semialgebraische Teilmenge einer R-Varietät V, so ist dim M gerade die Dimension des Zariski-Abschlusses von M in V.

Lemma 1.1 : Sei V eine quasiprojektive R-Varietät. Dann läßt sich ein Zariski-offener Teil U von V, der alle reellen Punkte von V enthält, so in einen affinen Raum A_R^n einbetten, daß die reellen Punkte in den Einheitswürfel $[0,1]^n$ von R^n abgebildet werden. Insbesondere ist jede semialgebraische Teilmenge M von V vermöge algebraischer Morphismen isomorph zu einer beschränkten semialgebraischen Teilmenge von R^n.

Beweis : Wir können annehmen, daß V in RP^m eingebettet ist. U entstehe aus V durch Herausnahme der Hyperfläche $\{X_0^2 + \ldots + X_m^2 = 0\}$. Dann ist U(R) = V(R) und U läßt sich vermöge

$$(x_0:\ldots:x_m) \mapsto \left(\frac{x_i \cdot x_j}{x_0^2+\ldots+x_m^2}\right)_{i \leq j}$$

nach $A_R^{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}$ einbetten. Offenbar werden die reellen Punkte U(R) in den Einheitswürfel abgebildet. □

Wir benötigen die folgenden wohlbekannten Tatsachen :

Theorem 1.2 ([CO], § 1) :

Sei $f(X_1,\ldots,X_n,T) \in R[X_1,\ldots,X_n,T]$ ein Polynom. Der Grad von f in T sei $\leq d$. Dann gibt es d+1 R-wertige Funktionen $k, \eta_1, \ldots, \eta_d$ auf R^n mit den folgenden Eigenschaften :

i) k nimmt seine Werte in der Menge $\{-1,0,1,\ldots,d\}$ an.

ii) Ist $k(x) = -1$, so ist $f(x,T) = 0$.

iii) Ist $k(x) = 0$, so besitzt $f(x,T)$ keine reellen Wurzeln.

iv) Ist $k(x) \geq 0$, so ist $\eta_1(x) < \eta_2(x) < \ldots < \eta_{k(x)}(x)$ und $\eta_1(x),\ldots,\eta_{k(x)}(x)$ sind alle reellen Wurzeln von

$f(x,T)$.

v) Die Funktionen k, $\eta_1,\ldots,\eta_d$ besitzen semialgebraische Graphen.

Theorem 1.3 (Tarski, [SE]) :

Sei M eine semialgebraische Teilmenge von R^{n+1}. Dann ist die Menge $\{x \in R^n \mid \exists\, t \in R \text{ mit } (x,t) \in M\}$ semialgebraisch.

Unmittelbar aus Theorem 1.3 folgt (vgl. [DK II], § 7):

Korollar 1.4 : Seien M und N semialgebraische Räume und $f : M \to N$ eine semialgebraische Abbildung. Dann ist $f(M)$ eine semialgebraische Teilmenge von N.

Ebenfalls aus Theorem 3 läßt sich ableiten :

Theorem 1.5 (Tarski, vgl. [DK II], § 7) :

Sei L ein semialgebraischer Raum und M eine semialgebraische Teilmenge von L. Dann ist der Abschluß $\overline{M}$ von M in L und der offene Kern $\mathring{M}$ von M in L bezüglich der starken Topologie semialgebraisch in L .

Bezeichnung : Ist M eine Teilmenge des semialgebraischen Raums L, so sei $\overline{M}$ immer der Abschluß von M in L bezüglich der starken Topologie. Können Mißverständnisse, den Raum L betreffend, auftreten, so wird der Raum L, in dem der

Abschluß gebildet wird, ausdrücklich angegeben.

Theorem 1.6 (Implizites Funktionentheorem für Polynome):
Seien $f_1(X_1,\ldots,X_n,T_1,\ldots,T_r)$, ... , $f_r(X_1,\ldots,X_n,T_1,\ldots,T_r)$ $\in R[X_1,\ldots,X_n,T_1,\ldots,T_r]$ Polynome und ein Punkt (x_o,t_o) $\in R^n \times R^r$ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

i) $f_k(x_o,t_o) = 0$, $k = 1, \ldots , r$.

ii) Die Matrix $\left(\frac{\partial f_k}{\partial T_l}(x_o,t_o)\right)_{1 \leq k,l \leq r}$ hat vollen Rang r.

Dann gibt es Konstanten ϵ, $\delta > 0$ und eine semialgebraische Abbildung $g : B_\epsilon(x_o) \to B_\delta(t_o)$, so daß für alle $(x,t) \in B_\epsilon(x_o) \times B_\delta(t_o)$ gilt :

$f_k(x,t) = 0$ für $k = 1,\ldots,r$ genau dann, wenn $t = g(x)$.

Definition 10 : Ein semialgebraischer Raum M heißt vollständig, wenn für alle semialgebraischen Räume N die Abbildung $M \times N \to N$ abgeschlossen ist (d.h., abgeschlossene semialgebraische Teilmengen von $M \times N$ werden auf abgeschlossene semialgebraische Teilmengen von N abgebildet).

Theorem 1.7 : M sei eine abgeschlossene und beschränkte semialgebraische Teilmenge von R^n. Dann ist M vollständig. Insbesondere nimmt jede semialgebraische Funktion f auf M ein Maximum an.

Beweise von Theorem 1.6 und Theorem 1.7 finden sich in

[DK II]. Die Aussagen sind über dem Körper der reellen Zahlen wohlbekannt und lassen sich mit dem Tarski-Prinzip auf beliebige reell-abgeschlossene Körper übertragen. Die Beweise in [DK II] sind jedoch nicht transzendent, d.h. sie werden ohne Verwendung des Tarski-Prinzips geführt. Auch in dieser Arbeit wird das Tarski-Prinzip nie benützt, um "elementare Aussagen" vom Körper der reellen Zahlen auf beliebige reell abgeschlossene Körper zu übertragen.

§ 2 Triangulierung

Wir werden zeigen, daß sich jeder affine semialgebraische Raum triangulieren läßt.

Definition 1 :

i) Ein abgeschlossener geometrischer n-Simplex $\overline{S}$ (über R) ist die konvexe Hülle von n+1 affin unabhängigen Punkten $e_o,\dots,e_n$ in einem affinen Raum R^m :

$$\overline{S} = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot e_i \mid t_i \in R,\ t_i \geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \right\}.$$

ii) Ein offener geometrischer n-Simplex S (über R) ist das Innere der konvexen Hülle von n+1 affin unabhängigen Punkten $e_o,\dots,e_n$ in einem affinen Raum R^m :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{n} t_i \cdot e_i \mid t_i \in R,\ t_i > 0,\ \sum_{i=0}^{n} t_i = n \right\}.$$

In beiden Fällen heißt die Menge $E(\overline{S}) = \{e_o,\dots,e_n\}$ bzw. $E(S) = \{e_o,\dots,e_n\}$ die Menge der Ecken von $\overline{S}$ bzw. S .

Begriffe wie Seite, iterierte Seite usw. haben ihre übliche Bedeutung.

Offenbar sind n-Simplizes semialgebraische Mengen. Ein n-Simplex hat, da wir nur nichtausgeartete Simplizes betrachten, die Dimension n.

Definition 2 : Ein geometrischer simplizialer Komplex ist ein Paar (X, $X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$), bestehend aus einer Teilmenge X eines affinen Raums R^n und einer Zerlegung $X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ von X in <u>disjunkte</u> <u>offene</u> geometrische Simplizes S_i mit folgender Eigenschaft:

Der Durchschnitt $\overline{S}_i \cap \overline{S}_j$ der Abschlüsse (in R^n) je zweier Simplizes S_i, S_j ist entweder leer oder eine iterierte Seite sowohl von $\overline{S}_i$ als auch von $\overline{S}_j$.

Ein simplizialer Komplex (X, $X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$) heißt abgeschlossen (oder vollständig), wenn X eine abgeschlossene Teilmenge von R^n ist.

Wir schreiben für einen simplizialen Komplex (X, $X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$) häufig kurz $X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ oder auch nur X.(Auch im letzteren Fall nehmen wir an, daß X mit einer festen simplizialen Struktur versehen ist.)

Geometrische simpliziale Komplexe sind offenbar affine semialgebraische Räume.

<u>Definition 3 :</u> Ein abstrakter simplizialer Komplex K (= simplizialer Komplex in [S] = simpliziales Schema in [G]) ist ein Paar (E(K),S(K)), bestehend aus einer Menge E(K), genannt die Ecken von K, und einer Menge S(K) von endlichen nichtleeren Teilmengen von E(K), genannt (abstrakte) Simplizes von K, so daß gilt :

i) Für alle $e \in E(K)$ ist $\{e\} \in S(K)$.

ii) Jede nichtleere Teilmenge eines Simplex ist wieder ein Simplex.

K heißt endlich, wenn $E(K)$ endlich ist. Abstrakte Simplizes, die genau $n+1$ Elemente enthalten, heißen n-Simplizes.

Wir werden die Zusätze "abstrakt" und "geometrisch" , wenn keine Mißverständnisse möglich sind, häufig weglassen (, was wir ja weiter oben schon getan haben).

Wir können jedem geometrischen simplizialen Komplex $X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ in der folgenden Weise einen endlichen abstrakten simplizialen Komplex $K(X)$ zuordnen :

$E(K(X)) := \bigcup_{i=1}^{r} E(S_i)$ sei die Eckenmenge von $K(X)$. Eine Teilmenge S von $E(K(X))$ sei genau dann ein abstrakter Simplex, wenn S in der Menge $E(S_i)$ der Ecken eines geometrischen Simplex S_i enthalten ist.

<u>Definition 4 :</u> Sei K ein endlicher abstrakter simplizialer Komplex. Ein <u>abgeschlossener</u> geometrischer simplizialer Komplex X über R heißt Realisierung von K über R, wenn $K(X) = K$ ist.

Je zwei Realisierungen X, X' eines endlichen abstrakten Komplexes sind in kanonischer Weise simplizial isomorph, d.h., es gibt einen semialgebraischen Isomorphismus

$\kappa : X \tilde{\to} X'$, der n-Simplizes affin auf n-Simplizes abbildet. Wir sprechen deshalb von <u>der</u> Realisierung $|K| = |K|_R$ von K und wollen dabei annehmen, daß wir eine bestimmte Realisierung ausgewählt haben. Jeder abgeschlossene simpliziale Komplex X ist eine Realisierung von K(X). Wir identifizieren deshalb meist X mit $|K(X)|$, d.h., wir schreiben abgeschlossene simpliziale Komplexe in der Form $|K|$.

<u>Lemma 2.1 :</u> Sei K ein endlicher abstrakter simplizialer Komplex. Dann gibt es eine Realisierung von K über R.

Beweis : E(K) bestehe aus m+1 Elementen. Sei $e_o = 0$ und $e_i = (0,\ldots,0,\overset{i}{1},0,\ldots,0) \in R^m$, $1 \leq i \leq m$. Identifiziert man die Ecken E(K) auf irgendeine Weise mit $e_o,\ldots,e_m$, so erhält man eine Realisierung von K als abgeschlossenen Unterkomplex des Standard-n-Simplex

$$\left\{ \sum_{i=0}^{m} t_i \cdot e_i \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{m} t_i = 1 \right\} \square$$

<u>Definition 5 :</u> M sei ein semialgebraischer Raum. Eine Triangulierung von M ist ein Paar $(X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i, \Psi)$, bestehend aus einem geometrischen simplizialen Komplex X und einem semialgebraischen Isomorphismus $\Psi : X \tilde{\to} M$. Ein semialgebraischer Raum, der eine Triangulierung besitzt, heißt triangulierbar.

Triangulierbare semialgebraische Räume sind also insbesondere affin. Wir werden nun umgekehrt zeigen, daß sich jeder affine semialgebraische Raum über R auch triangulieren läßt. Für den klassischen Fall der reellen Zahlen wurde dies z.B. von Hironaka ([H]) bewiesen.

Theorem 2.2 : Sei $\{M_j\}_{j\in J}$ eine endliche Familie semialgebraischer beschränkter Teilmengen von R^n. Dann gibt es einen konvexen abgeschlossenen simplizialen Komplex $|K| = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ in R^n und einen semialgebraischen Automorphismus κ von R^n mit folgenden Eigenschaften :

i) κ ist außerhalb von $|K|$ die Identität.

ii) Jede der Mengen M_j, $j \in J$, ist eine Vereinigung gewisser "Simplizes" $\kappa(S_i)$.

Insbesondere folgt aus diesem Resultat

Theorem 2.3 : Jeder affine semialgebraische Raum ist triangulierbar.

Beweis : Nach Lemma 1.1 ist jeder affine semialgebraische Raum isomorph zu einer beschränkten semialgebraischen Teilmenge eines R^n, die nach Theorem 2.2 triangulierbar ist □

Da Simplizes offenbar wegezusammenhängend sind und jeder semialgebraische Raum durch endlich viele affine semialgebraische Räume überdeckt werden kann, gewinnen wir eine weitere Folgerung.

Theorem 2.4 : Jeder semialgebraische Raum besitzt nur endlich viele Wegekomponenten. Diese Wegekomponenten sind semialgebraische Teilmengen von M.

Beim Beweis von Theorem 2.2 benötigen wir

Lemma 2.5 : Seien Polynome $P_1, \ldots, P_r \in R[X_1, \ldots, X_n, T]$ und eine endliche Familie $\{N_j\}_{j \in J}$ von semialgebraischen Teilmengen einer semialgebraischen Menge M in $R^n = R^n \times \{0\} \subset R^{n+1}$ sowie Konstanten C_1, C_2, $-\infty \leq C_1 \leq C_2 \leq +\infty$, gegeben.

Dann gibt es eine disjunkte Zerlegung $M = \bigcup_{i \in I} B_i$ von M in endlich viele semialgebraische Mengen und semialgebraische Funktionen ξ_k^i ($i \in I$, $k = 1, \ldots, r_i$) auf B_i mit folgenden Eigenschaften :

i) Für alle $(i,j) \in I \times J$ ist entweder $B_i \subseteq N_j$ oder $B_i \cap N_j = \emptyset$.

ii) Jede Ableitung $\dfrac{\partial^l P_k}{\partial T^l}$, als Polynom in T betrachtet, verschwindet entweder identisch auf B_i oder besitzt für alle $x \in B_i$ genau r_{ikl} verschiedene reelle Nullstellen (r_{ikl} unabhängig von x)

$$\mu_{1k}^{il}(x) < \mu_{2k}^{il}(x) < \ldots < \mu_{r_{ikl}k}^{il}(x) \quad .$$

iii) Für alle $x \in B_i$ ist

$$\xi^i_1(x) < \xi^i_2(x) < \ldots < \xi^i_{r_i}(x) \quad .$$

Ist $C_1 \leq \xi^i_k(x) \leq C_2$ für ein $x \in B_i$, so gilt dies für alle $x \in B_i$.

iv) Zu jedem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(\mu^{il}_{jk} + \mu^{i\,l'}_{j'k'})$ zweier Wurzeln μ^{il}_{jk} , $\mu^{i\,l'}_{j'k'}$ über B_i gibt es eine Funktion ξ^i_m mit $\xi^i_m(x) = \frac{1}{2}(\mu^{il}_{jk}(x) + \mu^{i\,l'}_{j'k'}(x))$ für alle $x \in B_i$. Insbesondere sind alle Wurzeln μ^{il}_{jk} semialgebraische Funktionen auf B_i, die ihrer Größe nach geordnet werden können.

$\eta^i_1 < \eta^i_2 < \ldots < \eta^i_{s_i}$ seien diejenigen Funktionen unter den ξ^i_k, die mit einer Wurzel μ^{il}_{jm} übereinstimmen. Weiter sei

$W_{ik} := \{(x, \xi^i_k(x)) \mid x \in B_i\}$ $\quad (1 \leq k \leq r_i)$ und

$Z_{im} := \{(x, \eta^i_m(x)) \mid x \in B_i\}$ $\quad (1 \leq m \leq s_i)$.

v) Ist $B_i \cap \overline{B}_j \neq \emptyset$, so ist $B_i \subseteq \overline{B}_j$.

vi) Ist $W_{is} \cap \overline{W}_{jt} \neq \emptyset$, so ist $W_{is} \subseteq \overline{W}_{jt}$.

vii) Ist $B_i \subseteq \overline{B}_j$, so gibt es zu jeder Menge W_{is} eine Menge W_{jt} mit $W_{is} \subseteq \overline{W}_{jt}$ und zu jeder Menge Z_{il} eine Menge Z_{jm} mit $Z_{il} \subseteq \overline{Z}_{jm}$.

Beweis : Die reellen Wurzeln eines Polynoms und ihre Anzahl sind Funktionen der Koeffizienten mit semialgebraischem Graph (Theorem 1.2). Da Bilder semialgebraischer Mengen unter Projektionen wieder semialgebraisch sind (Theorem 1.3), läßt sich offenbar eine Zerlegung $M = \bigcup B_i$ von M in endlich viele disjunkte semialgebraische Mengen mit den Eigenschaften i) und ii) finden, so daß zusätzlich gilt :

Für je zwei arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(\mu^{il}_{jk} + \mu^{i\,l'}_{j'k'})$ und $\frac{1}{2}(\mu^{iu}_{st} + \mu^{i\,u'}_{s't'})$ von Wurzeln über B_i gilt entweder $\frac{1}{2}(\mu^{il}_{jk}(x) + \mu^{i\,l'}_{j'k'}(x)) = \frac{1}{2}(\mu^{iu}_{st}(x) + \mu^{i\,u'}_{s't'}(x))$ für alle $x \in B_i$ oder $\frac{1}{2}(\mu^{il}_{jk}(x) + \mu^{i\,l'}_{j'k'}(x)) \neq \frac{1}{2}(\mu^{iu}_{st}(x) + \mu^{iu'}_{s't'}(x))$ für alle $x \in B_i$.

Wir finden dann Funktionen $\xi^i_1, \dots, \xi^i_{r_i}$ mit semialgebraischem Graph auf B_i, so daß, falls $j \neq k$ ist, $\xi^i_j(x) \neq \xi^i_k(x)$ für alle $x \in B_i$ ist und es zu jedem arithmetischen Mittel $\frac{1}{2}(\mu^{il}_{jk} + \mu^{i\,l'}_{j'k'})$ ein ξ^i_m mit $\xi^i_m(x) = \frac{1}{2}(\mu^{il}_{jk}(x) + \mu^{i\,l'}_{j'k'}(x))$ für alle $x \in B_i$ gibt.

Da B_i die disjunkte Vereinigung der Mengen

$$\{x \in B_i \mid \xi^i_{m_1}(x) < \xi^i_{m_2}(x) < \dots < \xi^i_{m_{r_i}}(x)\} ,$$

$m_k \in \{1,\dots,r_i\}$, $m_k \neq m_l$ für $k \neq l$, ist, können wir nach weiterem Unterteilen der Mengen B_i annehmen, daß $\xi^i_1 < \xi^i_2 < \dots < \xi^i_{r_i}$ ist. $\eta^i_1 < \eta^i_2 < \dots < \eta^i_{s_i}$ seien diejenigen Funktionen ξ^i_m , die mit einer Wurzel μ^{il}_{jk} übereinstimmen. Jede Funktion η^i_m ist eine einfache Nullstelle eines der Polynome $\frac{\partial^l P_k}{\partial T^l}$ und wir folgern aus dem impliziten

Funktionentheorem (Theorem 1.6), daß η^i_m stetig in der starken Topologie ist, d.h., η^i_m ist eine semialgebraische Funktion. Da sich jede Funktion ξ^i_k in der Form $\frac{1}{2}(\eta^i_m + \eta^i_{m'})$ schreiben läßt, sind alle ξ^i_k semialgebraische Funktionen auf B_i.

Nach nochmaligem Unterteilen der B_i können wir auch annehmen, daß $C_1 \leq \xi^i_k(x) \leq C_2$ entweder für alle $x \in B_i$ oder für kein $x \in B_i$ ist. Die Zerlegung $M = \bigcup B_i$ und die Funktionen ξ^i_k besitzen dann schon die Eigenschaften i) - iv). Diese Eigenschaften gehen bei weiterem Unterteilen der B_i, das wir vornehmen müssen, um v) - vii) zu erreichen, nicht verloren.

Zunächst können wir annehmen, daß entweder $Int_M(B_i) = B_i$ oder $Int_M(B_i) = \emptyset$ ist für alle i. Dabei sei $Int_M(B_i)$ der offene Kern von B_i in M (in der starken Topologie), der nach Theorem 1.5 wieder semialgebraisch ist.

Wir konstruieren jetzt induktiv nach k endlich viele semialgebraische Mengen E_{kj}, E_k . Jede Menge E_{kj} wird in einer Menge $B_{\alpha(k,j)}$ enthalten sein. (Man beachte, daß $\alpha(k,j)$ eindeutig bestimmt ist.)

<u>k = 0.</u> Wir wählen als Mengen E_{0j} die Mengen B_i mit $Int_M(B_i) = B_i$ und setzen $E_0 := M - (\bigcup_j E_{0j})$. E_0 ist abgeschlossen in M. Aus der Dimensionstheorie ([DK II], § 8) folgt, daß

$\dim E_0 < \dim M$ ist.

Sei nun $k > 0$ und seien E_{lj}, E_l für $l < k$ schon konstruiert. Man kann eine Zerlegung $E_{k-1} = \bigcup D_s$ von E_{k-1} in endlich viele disjunkte semialgebraische Teilmengen mit folgenden Eigenschaften fin den :

a) Jede Menge D_s ist in einer Menge B_i enthalten.

b) Ist $l < k$ und $D_s \cap \overline{E}_{lj} \neq \emptyset$, so ist $D_s \subseteq \overline{E}_{lj}$.

$\pi : R^{n+1} \to R^n$, $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \mapsto (x_1,\ldots,x_n)$ sei die Projektion auf die ersten n Koordinaten.

c) Ist $D_s \subseteq B_i \cap \overline{E}_{lj}$, $l < k$, und ist

$$(W_{it} \cap \pi^{-1}(D_s)) \cap \overline{(W_{\alpha(l,j)u} \cap \pi^{-1}(E_{lj}))} \neq \emptyset, \text{ so ist}$$

$$(W_{it} \cap \pi^{-1}(D_s)) \subseteq \overline{(W_{\alpha(l,j)u} \cap \pi^{-1}(E_{lj}))} .$$

d) Entweder ist $\mathrm{Int}_{E_{k-1}}(D_s) = D_s$ oder $\mathrm{Int}_{E_{k-1}}(D_s) = \emptyset$.

Wir wählen als Mengen E_{kj} die Mengen D_s mit $\mathrm{Int}_{E_{k-1}}(D_s) = D_s$ und setzen $E_k := E_{k-1} - (\bigcup_j E_{kj})$.

E_k ist abgeschlossen in E_l für $l < k$ und $\dim E_k < \dim E_{k-1}$. Deshalb muß nach endlich vielen Schritten E_k leer sein.

Wir ersetzen die ursprünglich gewählte Zerlegung $M = \bigcup B_i$ durch die Verfeinerung $M = \bigcup_{k,j} E_{kj}$ (und nennen diese wieder $M = \bigcup B_i$). Dann sind, was sich unmittelbar aus der Konstruktion der Zerlegung, d.h. aus den Eigenschaften a) - d),ergibt, v) und vi) erfüllt.

Wie bereits weiter oben bemerkt, ist jede Wurzel η_l^i eine einfache Wurzel eines Polynoms $\frac{\partial^s P_k}{\partial T^s}$, so daß wir mit dem impliziten Funktionentheorem und Eigenschaft vi) schließen können, daß es für $B_i \subseteq \overline{B}_j$ zu jeder Menge Z_{im} eine Menge Z_{jl} mit $Z_{im} \subseteq \overline{Z}_{jl}$ gibt. Da ξ_k^i das arithmetische Mittel zweier Wurzeln ist, folgt auch Eigenschaft vii). Lemma 2.5 ist damit bewiesen □

Wir merken noch an, daß wir, wenn der Triangulierungssatz und damit Theorem 2.4 erst einmal bewiesen ist, die Mengen B_i sogar wegzusammenhängend wählen können.
In seiner vollen Allgemeinheit benötigen wir Lemma 2.5 beim Beweis des Homotopieaxioms im § 7. Beim Beweis von Theorem 2.2 genügt es, nur die Wurzeln η_m^i und nicht alle arithmetischen Mittel zu betrachten.

Beweis von Theorem 2.2 :
Wir benützen Induktion nach n. Der Fall n = 1 ist trivial, da jedes M_j nur eine endliche Vereinigung von beschränkten Intervallen und Punkten ist.
Sei also die Behauptung für $n \geqslant 1$ schon gezeigt. Wir wollen beweisen, daß sie auch für n+1 richtig ist. Sei eine endliche Familie $\{M_j\}$ von beschränkten semialgebraischen Teilmengen von R^{n+1} gegeben. Zunächst dürfen wir annehmen,

daß für alle $j \in J$ M_j abgeschlossen ist, denn sonst ersetzen wir M_j durch die wie folgt definierte Familie : $\{M_{jk}\}$:

$M_{j1} := \overline{M}_j$, $M_{j\ k+1} := \overline{M'_{j\ k+1}}$ mit $M'_{j1} := M_j$ und $M'_{j\ k+1} := M_{jk} - M'_{jk}$.

Da $\dim M_{j\ k+1} < \dim M_{jk}$ ist, gibt es eine natürliche Zahl r_j, so daß für $k > r_j$ M_{jk} leer ist.

Darüberhinaus können wir annehmen, daß $\dim M_j \leqslant n$ ist, d.h., daß M_j keine inneren Punkte enthält. Ist dies nämlich nicht der Fall, so ersetzen wir M_j durch seinen Rand Rd M_j in R^{n+1}, der nach Theorem 1.5 semialgebraisch ist. M_j - Rd M_j ist eine Vereinigung von Wegekomponenten von R^{n+1}- Rd M_j.

Sei $|K| = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$ ein abgeschlossener konvexer simplizialer Komplex in R^{n+1} und κ ein semialgebraischer Automorphismus von R^{n+1} mit folgenden Eigenschaften : Rd M_j ist die Vereinigung gewisser $\kappa(S_i)$, und κ ist außerhalb $|K|$ die Identität. Dann ist Rd M_j und damit, da $|K|$ konvex ist, M_j in $|K| = \bigcup S_i = \bigcup \kappa(S_i)$ enthalten. Für S_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, ist entweder $\kappa(S_i) \subseteq$ Rd M_j oder $\kappa(S_i) \cap$ Rd $M_j = \emptyset$. Da $\kappa(S_i)$ wegezusammenhängend ist, muß dann auch entweder $\kappa(S_i) \subseteq M_j$ oder $\kappa(S_i) \cap M_j = \emptyset$ sein. Diese Überlegungen zeigen, daß wir tatsächlich ohne Einschränkung M_j durch Rd M_j ersetzen können.

Die Mengen M_j seien mit Hilfe der Polynome $P_1, \dots, P_r \in R[X_1,\dots,X_n,T]$ definiert, d.h., für alle j sei M_j eine endliche Vereinigung von Mengen der Form

$$\left\{ x \in R^{n+1} \mid P_i(x) = 0,\ P_{j_k}(x) > 0,\ k = 1,\dots,s \right\}.$$

Durch eine geeignete Koordinatentransformation der Form

$$X_1 = X_1' + a_1 T,\ X_2 = X_2' + a_2 T,\ \dots,\ X_n = X_n' + a_n T,$$

$T = T'$ mit Elementen $a_i \in R$ läßt sich erreichen, daß die Polynome $P_1, \dots, P_r$ in der letzten Variablen T normiert sind. Sei $\pi : R^{n+1} \to R^n$, $(x_1,\dots,x_n,t) \mapsto (x_1,\dots,x_n)$, die Projektion. Identifiziere R^n mit $R^n \times \{0\} \subseteq R^{n+1}$.

$R^n = \bigcup_{i \in I} B_i$ sei eine endliche disjunkte semialgebraische Zerlegung von R^n und ξ_m^i $(i \in I,\ m = 1,\dots,r_i)$ seien semialgebraische Funktionen, wie sie oben in Lemma 2.5 konstruiert worden sind. Dabei sei $N_j = \pi(M_j)$ und $C_1 = -\infty$, $C_2 = +\infty$ gesetzt. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Lemma 2.5.

Sei $r > 0$ so gewählt, daß alle Mengen $\pi(M_j)$, $j \in J$, in $\overline{B}_r(0) = \left\{(x_1,\dots,x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq r^2 \right\}$ enthalten sind.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen abgeschlossenen konvexen simplizialen Komplex $|K| = \bigcup_{\nu=1}^{s} A_\nu$ in R^n und einen semialgebraischen Automorphismus κ von R^n mit folgenden Eigenschaften :

i) Die Mengen $B_i \cap \overline{B}_r(0)$ und $B_i \cap \overline{B}_{2r}(0)$, $i \in I$, sind die

Vereinigung von gewissen "Simplizes" $\kappa(A_\upsilon)$.

ii) κ ist außerhalb $|K|$ die Identität.

Insbesondere ist dann $\overline{B}_{2r}(0) \subseteq |K|$. Sei $\Lambda_1 := \{ \upsilon \mid \kappa(A_\upsilon) \subseteq \overline{B}_r(0) \}$ und $\Lambda_2 := \{ \upsilon \mid \kappa(A_\upsilon) \subseteq \overline{B}_{2r}(0) \}$.

Die semialgebraischen Funktionen $\eta_1^\upsilon < \eta_2^\upsilon < \dots < \eta_{s_\upsilon}^\upsilon$ auf $\kappa(A_\upsilon)$ seien alle verschiedenen reellen Wurzeln über $\kappa(A_\upsilon)$ aller nicht verschwindenden Ableitungen $\dfrac{\partial^m P_k}{\partial T^m}$ (Lemma 2.5, iii),iv)). Sei $Z_{\upsilon i} := \{(x,\eta_i^\upsilon(x)) \mid x \in \kappa(A_\upsilon)\}$. Da alle nicht verschwindenden Polynome $\dfrac{\partial^m P_k}{\partial T^m}$ in T normiert sind, folgt aus einer wohlbekannten Abschätzung, daß es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß für alle υ, $1 \leq \upsilon \leq s$, alle i, $1 \leq i \leq s_\upsilon$, und alle $x \in \kappa(A_\upsilon)$ gilt :

$$|\eta_i^\upsilon(x)| < C .$$

Für alle $j \in J$ ist M_j die Vereinigung gewisser Mengen $Z_{\upsilon i}$, $\upsilon \in \Lambda_1$, denn einerseits muß in jedem Punkt von M_j mindestens eins der definierenden Polynome P_k verschwinden ($\dim M_j \leq n$), andererseits besitzen alle P_k auf $Z_{\upsilon i}$ konstantes Vorzeichen. Durch baryzentrische Unterteilung der Simplizes A_υ können wir erreichen, daß für alle Paare $(\upsilon,i) \neq (\upsilon,j)$ gilt : $\pi(\overline{Z}_{\upsilon i} \cap \overline{Z}_{\upsilon j})$ ist entweder leer oder im Bild $\kappa(\overline{A}_\mu)$ einer <u>echten</u> (abgeschlossenen) Seite $\overline{A}_\mu$ von $\overline{A}_\upsilon$ enthalten. (Diese Eigenschaft benützen wir weiter unten).

Hilfssatz 1 : Seien υ, μ , $1 \leqslant \upsilon, \mu \leqslant s$, mit $A_\mu \subseteq \overline{A}_\upsilon$ und $l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant s_\mu$, sowie $x \in \kappa(A_\mu)$ gegeben. Dann existiert eine offene Umgebung U von x in R^n, eine semialgebraische Funktion $f : U \to R$ und eine natürliche Zahl m, $1 \leqslant m \leqslant s_\upsilon$, mit folgenden Eigenschaften :

a) $U \cap \kappa(A_\mu)$ und $U \cap \kappa(A_\upsilon)$ sind wegezusammenhängend.

b) $f|U \cap \kappa(A_\mu) = \eta^\mu_l|U \cap \kappa(A_\mu)$, $f|U \cap \kappa(A_\upsilon) = \eta^\upsilon_m|U \cap \kappa(A_\upsilon)$.

c) $Z_{\mu l} \subseteq \overline{Z}_{\upsilon m}$.

Beweis von Hilfssatz 1 :

η^μ_l ist einfache Wurzel eines Polynoms $\dfrac{\partial^t P_k}{\partial T^t}$. Nach dem impliziten Funktionentheorem (Theorem 1.6) existiert eine offene semialgebraische Umgebung U von x in R^n und eine semialgebraische Funktion $f : U \to R$ mit $f(x) = \eta^\mu_l(x)$ und $\dfrac{\partial^t P_k}{\partial T^t}(y,f(y)) = 0$ für alle $y \in U$. Da A_μ und A_υ Simplizes sind, läßt sich U immer so wählen, daß a) erfüllt ist. Dann ist aber auch b) richtig, da η^μ_l und alle η^υ_i semialgebraische Funktionen sind. (Man beachte, daß z.B. $U \cap \kappa(A_\upsilon) = \bigcup\limits_{i=1}^{s_\upsilon} \{x \in U \cap \kappa(A_\upsilon) \mid f(x) = \eta^\upsilon_i(x)\}$ (disjunkte Vereinigung) ist). c) folgt aus Lemma 2.5 vi). $\square$

Hilfssatz 2 : Sei $1 \leqslant \upsilon \leqslant s$ und $1 \leqslant i \leqslant s_\upsilon$.

Dann ist $\pi(\overline{Z}_{\upsilon i}) = \overline{\kappa(A_\upsilon)} = \kappa(\overline{A}_\upsilon)$ und für alle μ mit $A_\mu \subseteq \overline{A}_\upsilon$ gibt es ein j , $1 \leqslant j \leqslant s_\mu$, so daß $Z_{\mu j} = \overline{Z}_{\upsilon i} \cap \pi^{-1}(\kappa(A_\mu))$ ist,d.h., insbesondere liegt über jedem

Punkt von $\kappa(\overline{A}_\upsilon)$ genau ein Punkt von $\overline{Z}_{\upsilon i}$.

Beweis von Hilfssatz 2 :

$\overline{Z}_{\upsilon i}$ ist eine beschränkte und abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von R^{n+1}. Deshalb ist $\pi(\overline{Z}_{\upsilon i})$ abgeschlossen (Theorem 1.7). Da $\kappa(A_\upsilon) \subseteq \pi(\overline{Z}_{\upsilon i}) \subseteq \overline{\kappa(A_\upsilon)} = \kappa(\overline{A}_\upsilon)$ ist, ist $\pi(\overline{Z}_{\upsilon i}) = \kappa(\overline{A}_\upsilon)$. Die zweite Aussage ist klar für $\mu = \upsilon$.

Sei nun $x \in \kappa(A_\mu)$, $A_\mu \subseteq \overline{A}_\upsilon - A_\upsilon$. Da die Polynome P_k in T normiert sind, ist jeder Punkt in $\overline{Z}_{\upsilon i}$ über x von der Gestalt $(x,\eta_j^\mu(x))$. Wegen Lemma 2.5 vi) genügt es zu zeigen, daß über x höchstens ein Punkt von $\overline{Z}_{\upsilon i}$ liegt.

Angenommen, $(x,\eta_j^\mu(x))$ und $(x,\eta_k^\mu(x))$, $j < k$, liegen in $\overline{Z}_{\upsilon i}$. Ist η_i^υ Wurzel von $\frac{\partial^s P_t}{\partial T^s}$, so sind auch η_j^μ und η_k^μ Wurzeln von $\frac{\partial^s P_t}{\partial T^s}$. Es muß deshalb zwischen η_j^μ und η_k^μ eine Wurzel η_l^μ von $\frac{\partial^{s+1} P_t}{\partial T^{s+1}}$ geben : $\eta_j^\mu < \eta_l^\mu < \eta_k^\mu$. Sei U eine offene Umgebung von x, $f : U \to R$ eine semialgebraische Funktion und $m \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften aus Hilfssatz 1. Es muß in $U \cap \kappa(A_\upsilon)$ Punkte y und z geben mit $f(y) = \eta_m^\upsilon(y) < \eta_i^\upsilon(y)$ und $f(z) = \eta_m^\upsilon(z) > \eta_i^\upsilon(z)$, und wir erhalten einen Widerspruch $\square$

Wir fahren fort im Beweis von Theorem 2.2 :

$\tilde{\kappa} := \kappa \times id_R$ ist ein semialgebraischer Automorphismus von R^{n+1}. Es ist $\pi(\tilde{\kappa}^{-1}(Z_{\upsilon i})) = A_\upsilon$. Die "Ecken" von $\tilde{\kappa}^{-1}(Z_{\upsilon i})$, d.h., die nach Hilfssatz 2 eindeutig bestimmten, über den

Ecken von A_υ liegenden Punkte von $\tilde{\kappa}^{-1}(\overline{Z}_{\upsilon i})$ spannen einen offenen Simplex $S_{\upsilon i}$ auf. Ist $(\upsilon,i) \neq (\mu,j)$, so ist $S_{\upsilon i} \cap S_{\mu j} = \emptyset$. Für $\mu \neq \upsilon$ ist dies klar, ist $\mu = \upsilon$, so folgt aus $S_{\upsilon i} \cap S_{\mu j} \neq \emptyset$, daß die Bilder der gemeinsamen Ecken von $S_{\upsilon i}$ und $S_{\mu j}$ unter π nicht in einer echten abgeschlossenen Seite von $\overline{A}_\upsilon$ enthalten sind. Dies ist aber nicht möglich, da $\pi(\overline{Z}_{\upsilon i} \cap \overline{Z}_{\upsilon j})$ entweder leer oder in einer echten Seite $\kappa(\overline{A}_\rho)$ von $\kappa(\overline{A}_\upsilon)$ enthalten ist.

$T_{\upsilon i} := \tilde{\kappa}(S_{\upsilon i})$ sei das Bild von $S_{\upsilon i}$ unter $\tilde{\kappa}$.

Wir merken an, daß nach Konstruktion für $(x,x_{n+1}) \in S_{\upsilon i}$ und $(x,x'_{n+1}) \in S_{\upsilon i+1}$ bzw. für $(x,x_{n+1}) \in T_{\upsilon i}$ und $(x,x'_{n+1}) \in T_{\upsilon i+1}$ gilt: $x_{n+1} < x'_{n+1}$. Außerdem ist für alle $(x,x_{n+1}) \in T_{\upsilon i} \cup S_{\upsilon i} \cup Z_{\upsilon i}$ $|x_{n+1}| < C$.

Wir definieren nun einen semialgebraischen Automorphismus g_υ von $\kappa(A_\upsilon) \times [-C,C]$, eine semialgebraische "Verschiebung" :

Dabei setzen wir
$$Z_{\upsilon 0} = T_{\upsilon 0} = \kappa(A_\upsilon) \times \{-C\} \quad ,$$
$$Z_{\upsilon s_\upsilon+1} = T_{\upsilon s_\upsilon+1} = \kappa(A_\upsilon) \times \{+C\} \; ,$$
$$S_{\upsilon 0} = A_\upsilon \times \{-C\} \; ,$$
$$S_{\upsilon s_\upsilon+1} = A_\upsilon \times \{+C\} \quad ,$$
$$\eta_0^\upsilon(x) = -C \; , \; \eta_{s_\upsilon+1}^\upsilon(x) = +C \text{ für } x \in \kappa(A_\upsilon).$$

Sei nun $(x,t) \in \kappa(A_\upsilon) \times [-C,+C]$ und liege zwischen $T_{\upsilon i}$

und $T_{\nu i+1}$, d.h., ist (x,t_i) der eindeutig bestimmte Punkt von $T_{\nu i}$ über x und (x,t_{i+1}) der eindeutig bestimmte Punkt von $T_{\nu i+1}$ über x, so gebe es (ein dann eindeutig bestimmtes) $u \in [0,1]$ mit $t = (1-u)t_i + ut_{i+1}$.
Wir definieren $g_\nu((x,t)) := (x, (1-u)\eta_i^\nu(x) + u\eta_{i+1}^\nu(x))$.

g_ν ist offenbar ein semialgebraischer Automorphismus von $\kappa(A_\nu) \times [-C,C]$, der $T_{\nu i}$ auf $Z_{\nu i}$ abbildet.

Durch $g|\kappa(A_\nu) \times [-C,C] := g_\nu$,$\nu \in \Lambda_2$, wird eine bijektive Abbildung g mit semialgebraischem Graph von $\overline{B}_{2r}(0) \times [-C,C]$ auf sich mit $\pi \circ g = \pi$ gegeben.(Man beachte : $\overline{B}_{2r}(0) = \bigcup_{\nu\in\Lambda_2} \kappa(A_\nu)$).
Seien $\nu, \mu \in \Lambda_2$ und $A_\mu \subseteq \overline{A}_\nu$. Nach Hilfssatz 2 gibt es zu $Z_{\nu i}$ eine (eindeutig bestimmte) Menge $Z_{\mu j}$ mit $\overline{Z}_{\nu i} \cap \pi^{-1}(\kappa(A_\mu))$ $= Z_{\mu j}$. Umgekehrt folgt aus Lemma 2.5, vii), daß jedes $Z_{\mu j}$ im Abschluß $\overline{Z}_{\nu i}$ einer Menge $Z_{\nu i}$ enthalten ist . Aus diesen Überlegungen und dem folgenden Hilfssatz 3 folgert man mühelos, daß g stetig ist. Als semialgebraische bijektive Abbildung eines vollständigen semialgebraischen Raums auf sich ist g dann ein semialgebraischer Automorphismus ([DK II], § 9).

<u>Hilfssatz 3 :</u> Seien ν, μ, $1 \leq \nu, \mu \leq s$, und i, $1 \leq i \leq s_\nu$, sowie j, $1 \leq j \leq s_\mu$, gegeben mit $A_\mu \subseteq \overline{A}_\nu$ und $Z_{\mu j} \subseteq \overline{Z}_{\nu i}$.

Dann ist

$$f : \kappa(A_\mu) \cup \kappa(A_\nu) \to R \ , \quad f(x) = \begin{cases} \eta_j^\mu(x) & \text{für } x \in \kappa(A_\mu) \\ \eta_i^\nu(x) & \text{für } x \in \kappa(A_\nu) \end{cases}$$

eine semialgebraische Funktion.

Beweis von Hilfssatz 3 :

Es ist nur die Stetigkeit von f in den Punkten von $\kappa(A_\mu)$ zu zeigen. Sei $x \in \kappa(A_\mu)$ und $\varepsilon > 0$. Es sei $B := \{ y \in R^n \mid \|y - x\| \leq \varepsilon \}$ und $B' := \{ y \in R^{n+1} \mid \|y - (x,f(x))\| < \varepsilon \}$. $\| \ \|$ bezeichne dabei die euklidische Norm von R^n bzw. R^{n+1}.

$L := (B \times [-C,C] \setminus B') \cap (\overline{Z}_{\nu i} \cup \overline{Z}_{\mu j})$ ist eine abgeschlossene und beschränkte, d.h. vollständige, semialgebraische Teilmenge von R^{n+1}. $\pi(L)$ ist deshalb eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von R^n. Da nach Hilfssatz 2 $(x,f(x))$ der einzige Punkt von $\overline{Z}_{\nu i}$ über x ist, ist $x \notin \pi(L)$. Wähle eine offene Umgebung $V \subseteq B$ von x in R^n mit $V \cap \pi(L) = \emptyset$. Dann ist für alle $y \in V \cap (\kappa(A_\mu) \cup \kappa(A_\nu))$ $(y,f(y)) \in B'$. f ist also stetig in x $\square$

Wir ändern nun g so ab, daß wir am Rand von $\overline{B}_{2r}(0) \times [-C,C]$ die Identität erhalten und sich auf $\overline{B}_r(0) \times [-C,C]$

nichts ändert. Dazu sei g' wie folgt erklärt :

$$g'((x,t)) := \begin{cases} g((x,t)) & \text{für } x \in \overline{B}_r(0) \\ (1-s)\cdot g((x,t)) + s\cdot(x,t) & \text{für } x \in \overline{B}_{2r}(0) - B_r(0), \\ & \|x\| = r + s\cdot r, \\ & s \in [0,1] \end{cases}$$

g' ist eine semialgebraische Abbildung. Man sieht leicht, daß auch g' ein Automorphismus von $\overline{B}_{2r}(0) \times [-C,C]$ ist. Offenbar induziert g' auf dem Rand von $\overline{B}_{2r}(0) \times [-C,C]$ die Identität.

Da $\pi(M_j) \subseteq \overline{B}_r(0)$ für alle $j \in J$ ist, ist jedes M_j die Vereinigung gewisser Mengen $g'(T_{\upsilon k})$, $\upsilon \in \Lambda_1$. Nach Fortsetzen durch die Identität können wir g' als semialgebraischen Automorphismus von R^{n+1} betrachten. Den gesuchten Automorphismus von R^{n+1} gewinnen wir wie folgt :

$g' \circ \tilde{\kappa}$ bildet $|K| \times [-C,C]$ auf sich ab und ist auf $(\text{Rand } |K|) \times [-C,C]$ die Identität. Sei $t_o > C$ gewählt. Q_+ sei der Kegel von $P_+ := (0,t_o)$ nach $|K| \times \{C\}$ und Q_- der Kegel von $P_- := (0,-t_o)$ nach $|K| \times \{-C\}$, d.h.,

$$Q_+ = \bigcup_{x \in |K|} \{ (1-t)\cdot P_+ + t\cdot(x,C) \mid 0 \leq t \leq 1 \} ,$$

$$Q_- = \bigcup_{x \in |K|} \{ (1-t)\cdot P_- + t\cdot(x,-C) \mid 0 \leq t \leq 1 \} .$$

Sei $L := (|K| \times [-C,C]) \cup Q_+ \cup Q_-$. L ist offenbar eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte semialgebraische Teilmenge von R^{n+1}.

Wir setzen

$$\kappa'(y) := \begin{cases} y & \text{für } y \notin L \\ g' \circ \tilde{\kappa}(y) & \text{für } y \in |K| \times [-C,C] \\ (1-t) \cdot P_+ + t \cdot \tilde{\kappa}((x,C)) & \text{für } y = (1-t) \cdot P_+ + t \cdot (x,C) \in Q_+ \\ (1-t) \cdot P_- + t \circ \tilde{\kappa}((x,-C)) & \text{für } y = (1-t) \cdot P_- + t \cdot (x,-C) \in Q_- \end{cases}$$

κ' ist ein semialgebraischer Automorphismus von R^{n+1}, was aus der Definition unmittelbar folgt. κ' ist außerhalb von L die Identität und bildet die Simplizes $S_{\upsilon i}$, $\upsilon \in \Lambda_1$, auf $Z_{\upsilon i}$ ab. Der aus den Simplizes $S_{\upsilon i}$, $\upsilon \in \Lambda_2$, bestehende simpliziale Komplex läßt sich, wie man leicht sieht, zu einer simplizialen Zerlegung von L ergänzen.

Damit ist Theorem 2.2 gezeigt □

Aus dem Triangulierungssatz wollen wir noch einige Folgerungen ziehen.

<u>Theorem 2.5</u> (Kurvenauswahlsatz) :

Sei M eine semialgebraische Teilmenge eines semialgebraischen Raums L und P ein Punkt im Abschluß $\overline{M}$ von M in L. Dann gibt es einen Weg $\alpha : [0,1] \to L$, der von P nach M läuft, d.h. $\alpha(0) = P$, $\alpha(]0,1]) \subseteq M$.

Beweis : Da die Aussage lokaler Natur ist, können wir aufgrund von Theorem 2.2 annehmen, daß $\overline{M}$ ein abgeschlossener Simplex ist. Hier ist die Behauptung trivial □

Der Kurvenauswahlsatz impliziert

<u>Theorem 2.6 :</u> Die endlich vielen Wegekomponenten $M_1, \ldots, M_r$ eines semialgebraischen Raums M sind abgeschlossene und damit offene semialgebraische Teilmengen von M.

<u>Korollar 2.7 :</u> Ein semialgebraischer Raum M ist genau dann zusammenhängend, wenn er wegezusammenhängend ist.

Dies folgt unmittelbar aus Theorem 2.6.
Ein Beweis von Theorem 2.4 und Theorem 2.5 ohne Triangulierung findet sich in [DK II] .
Es sei noch angemerkt, daß im klassischen Fall der reellen Zahlen die hier definierten Komponenten mit den Komponenten in der starken Topologie übereinstimmen, was sich unmittelbar aus den hier dargestellten Ergebnissen ablesen läßt.

<u>Definition 6 :</u> Sei $X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow[\Psi]{\sim} M$ die Triangulierung eines semialgebraischen Raums M und Y eine Teilmenge von M. Dann heißt $St(Y) := \bigcup_{\Psi^{-1}(Y) \cap \bar{S}_i \neq \emptyset} \Psi(S_i)$ die Sternumgebung von Y in M (bezüglich Ψ).

St(Y) ist die kleinste offene Umgebung von Y in M, die eine Vereinigung von "Simplizes" $\Psi(S_i)$ ist.

<u>Theorem 2.8 :</u> Sei $M \subseteq L$ ein Paar semialgebraischer Räume über R. Dann wird die Topologie von M durch die Topologie von L induziert, d.h., eine Teilmenge U von M ist genau dann offen und semialgebraisch in M, wenn es eine offene und semialgebraische Teilmenge V von L mit $V \cap M = U$ gibt.

Beweis : Wir können annehmen, daß L und M affin sind. Sei U eine offene und semialgebraische Teilmenge von M. Nach dem Triangulierungssatz 2.2 gibt es eine Triangulierung $\Psi : X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} L$ von L, so daß sowohl M als auch U die Vereinigung gewisser "Simplizes" $\Psi(S_i)$ ist. Sei $V = St(U)$ die Sternumgebung von U in L bezüglich Ψ. Da U offen in M ist, ist $V \cap M = U$ □

§ 3 Die Topologie eines affinen semialgebraischen Raums

In diesem Abschnitt soll die semialgebraische Topologie M_{sa} eines affinen semialgebraischen Raums M etwas genauer untersucht werden. Zunächst wollen wir die offenen und abgeschlossenen Teilmengen von M beschreiben. Da sich M in einen affinen Standardraum einbetten läßt, können wir annehmen, daß M eine semialgebraische Teilmenge von R^n ist.

Lemma 3.1 : Sei $P(X,Y) \in R[X,Y]$ ein nichtverschwindendes Polynom in zwei Variablen. Dann gibt es Konstanten $C, \varepsilon \in R$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$, und eine natürliche Zahl m, so daß für alle $(x,y) \in R^2$ mit $|x| \leq \varepsilon$, $y \neq 0$ und $P(x,y) = 0$ gilt :

$$|y| > C \cdot |x|^m .$$

Beweis : Es gibt ein nichttriviales Polynom $Q(X,T) \in R[X,T]$, so daß für alle $(x,y) \in R^2$ mit $y \neq 0$, $P(x,y) = 0$ gilt : $Q(x,\frac{1}{y}) = 0$. Sei $Q(X,T) = a_o(X) \cdot T^r + a_1(X) \cdot T^{r-1} + \dots + a_r(X)$, $a_o(X) \neq 0$. Wir können annehmen, daß $a_o(X)$ die Gestalt $X^m + b_1 \cdot X^{m-1} + \dots + b_m$ mit $b_i \in R$ hat. Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß alle von 0 verschiedenen Wurzeln von $a_o(X)$ dem Betrage nach größer als ε sind. Sei $(x,t) \in R^2$ mit $0 < |x| \leq \varepsilon$, $t \neq 0$, $Q(x,t) = 0$. Dann ist

$$x^m \cdot t = - \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i(x) \cdot x^m}{a_o(x)} \cdot \frac{1}{t^{i-1}} ,$$

woraus

$$|t| \cdot |x|^m \leqslant |x|^m + \sum_{i=1}^{r} \left| \frac{a_i(x) \cdot x^m}{a_o(x)} \right| \quad \text{folgt.}$$

$\dfrac{X^m}{a_o(X)}$ ist eine semialgebraische Funktion auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Nach Theorem 1.7 ist die rechte Seite der Ungleichung für $|x| \leqslant \varepsilon$ durch eine Konstante $C > 0$ beschränkt. Dann gilt aber für alle $(x,y) \in R^2$ mit $|x| < \varepsilon$, $y \neq 0$, $P(x,y) = 0$ $(\Rightarrow Q(x,\frac{1}{y}) = 0)$:

$$|y| > \frac{1}{2\,C} |x|^m \qquad \square$$

<u>Lemma 3.2 :</u> Sei M eine beschränkte abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von R^n. f und g seien semialgebraische Funktionen auf M. Für alle $x \in M$ gelte : Ist $f(x) = 0$, so ist auch $g(x) = 0$.

Dann gibt es eine Konstante $C \in R$, $C > 0$, und eine natürliche Zahl m, so daß für alle $x \in M$ gilt :

$$|f(x)| \geqslant C \cdot |g(x)|^m \quad .$$

Beweis : Betrachte die semialgebraische Abbildung $\Psi : M \to R^2$, $\Psi = (g,f)$. $N := \Psi(M)$ ist eine abgeschlossene beschränkte semialgebraische Teilmenge von R^2 (Theorem 1.7), für die gilt : Ist $(x,y) \in N$ und $y = 0$, so ist auch $x = 0$.

Wir müssen zeigen, daß es eine Ungleichung $|y| \geqslant C \cdot |x|^m$ für alle $(x,y) \in N$ gibt. Offenbar genügt es, die Existenz solch einer Ungleichung für alle $(x,y) \in \mathrm{Rd}\, N$, dem Rand von N, mit $x \neq 0$ zu zeigen. $\mathrm{Rd}\, N$ ist eine vollständige semialgebraische Menge von Dimension ≤ 1. Insbesondere gibt es ein nichttriviales Polynom $P \in R[X,Y]$, das auf $\mathrm{Rd}\, N$ verschwindet. Mit Lemma 3.1 schließen wir deshalb : Es gibt Konstanten $C, \varepsilon \in R$, $C > 0$, $\varepsilon > 0$, und eine natürliche Zahl m , so daß für alle $(x,y) \in \mathrm{Rd}\, N$ mit $0 \leq |x| \leq \varepsilon$ gilt: $|y| \geq C \cdot |x|^m$. Da die semialgebraische Funktion $\left|\frac{y}{x^m}\right|$ auf $\mathrm{Rd}\, N \cap \{(x,y) \mid |x| \geq \varepsilon\}$ ein von 0 verschiedenes Minimum annimmt (Theorem 1.7), folgt die Behauptung □

Wir benützen diese allgemeine "Ungleichung von Lojasciewicz" beim Beweis von

<u>Theorem 3.3 :</u> Sei M eine semialgebraische Teilmenge von R^n und U eine in M offene semialgebraische Menge. Dann gibt es Polynome $f_{ij} \in R[X_1,\ldots,X_n]$, $i = 1,\ldots,r$; $j = 1,\ldots, s_i$, so daß

$$U = \bigcup_{i=1}^{r} \{ x \in M \mid f_{ij}(x) > 0 , j = 1, \ldots , s_i \}$$

ist.

Dual erhalten wir

<u>Theorem 3.4 :</u> Sei M eine semialgebraische Teilmenge von R^n und A eine in M abgeschlossene semialgebraische Menge. Dann gibt es Polynome $f_{ij} \in R[X_1,\dots,X_n]$, $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s_i$, so daß

$$A = \bigcup_{i=1}^{r} \left\{ x \in M \mid f_{ij}(x) \geqslant 0 \, , \, j = 1, \dots , s_i \right\}$$

ist.

Wir führen einen ähnlichen Beweis wie Bochnak und Efroymson für den Fall, daß M eine algebraische Varietät über dem Körper der reellen Zahlen ist ([BE]). Dabei benötigen wir

<u>Lemma 3.5 :</u> Sei M eine abgeschlossene und beschränkte semialgebraische Teilmenge von R^n und U eine in M offene semialgebraische Teilmenge von M. $f_1, \dots, f_k$, g seien semialgebraische Funktionen auf M, $U_o := \left\{ x \in M \mid f_i(x) > 0, \right.$ $\left. i = 1, \dots, k \right\}$ und $Z := \left\{ x \in U_o \mid g(x) = 0 \right\}$. Z sei in U enthalten. Dann gibt es eine Konstante $C \in R$, $C > 0$, und eine natürliche Zahl m, so daß

$$Z \subseteq \left\{ x \in U_o \mid |g(x)| < C \cdot |f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k(x)|^m \right\} \subseteq U$$

ist.

Beweis : $\overline{U}_o$ sei der Abschluß von U_o in R^n. $\overline{U}_o$ ist semialgebraisch und in M enthalten. Die Menge $K := \overline{U}_o \setminus U$ ist beschränkt, abgeschlossen und semialgebraisch in R^n. Ist

$x \in K$ und $g(x) = 0$, so ist $x \in \overline{U}_o - U_o$, also ist $f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k(x) = 0$. Nach Lemma 3.2 gibt es eine Konstante $C > 0$, $C \in R$, und eine natürliche Zahl m, so daß für alle $x \in K$ $|g(x)| \geq C \cdot |f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k(x)|^m$ ist. Dann ist $\{ x \in U_o \mid |g(x)| < C \cdot |f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_k(x)|^m \} \subseteq U$ □

Beweis von Theorem 3.3 :

Eine einfache Überlegung zeigt, daß wir ohne Einschränkung annehmen können, daß M eine beschränkte Teilmenge von R^n ist. (Zerlege entweder M oder verwende Lemma 1.1). Da die semialgebraische Topologie von M durch die von $\overline{M}$ induziert wird (Theorem 2.8), ist darüberhinaus OE M auch abgeschlossen in R^n.

$$U = \bigcup_{i=1}^{r} \{ x \in M \mid g_{ij}(x) > 0,\ j = 1, \ldots, r_i;\ h_i(x) = 0 \}$$

mit Polynomen g_{ij}, $h_i \in R[X_1, \ldots, X_n]$. Nach Lemma 3.5 gibt es Konstanten $C_i > 0$ und natürliche Zahlen m_i $(i = 1, \ldots, r)$, so daß

$$\{ x \in M \mid g_{ij}(x) > 0, j = 1, \ldots, r_i;\ |h_i(x)| < C_i \cdot |\prod_{j=1}^{r_i} g_{ij}(x)|^{m_i} \}$$

in U enthalten ist. Dann ist aber

$$U = \bigcup_{i=1}^{r} \{ x \in M \mid g_{ij}(x) > 0,\ j = 1, \ldots, r_i;\ C_i^2 \cdot (\prod_{j=1}^{r_i} g_{ij}(x))^{2m_i} - h_i^2(x) > 0 \} .$$

und Theorem 3.3 ist bewiesen □

Theorem 3.3 wird auf ganz andere Weise unter Benutzung eines Separationslemmas und des Tarski-Prinzips auch von M.F. Coste-Roy bewiesen ([C], Teil I).

Theorem 3.3 erlaubt es uns, die semialgebraische Topologie eines affinen semialgebraischen Raums und damit die semialgebraischen Räume ohne Verwendung der starken Topologie zu definieren. Die offenen Teilmengen einer semialgebraischen Teilmenge M einer affinen R-Varietät V sind die endlichen Vereinigungen von Mengen $\{ x \in M \mid f_i(x) > 0, i = 1, \dots , r \}$ mit Schnitten $f_i \in \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$. Eine Funktion f auf M ist semialgebraisch, wenn ihr Graph eine semialgebraische Menge und sie stetig in der semialgebraischen Topologie ist.

Die Topologie affiner semialgebraischer Räume besitzt eine Reihe ähnlicher Eigenschaften wie die eines gewöhnlichen parakompakten Raums. Dies ist, obwohl die semialgebraische Topologie noethersch ist, nicht selbstverständlich, weil viele Argumente aus der Topologie hier versagen. Die Vereinigung von unendlich vielen semialgebraischen Mengen ist ja im allgemeinen nicht semialgebraisch.

<u>Satz 3.6 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum und A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von M. Dann existiert eine semialgebraische Funktion f auf M, so daß $A = \{ x \in M \mid f(x) = 0 \}$ ist.

Beweis : Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß $M = R^n$

ist. Nach Theorem 4 ist

$$A = \bigcup_{i=1}^{r} \left\{ x \in R^n \mid g_{ij}(x) \geq 0,\ j = 1, \ldots, s_i \right\}$$

mit Polynomen $g_{ij} \in R[X_1,\ldots,X_n]$. Wir setzen

$f_i := \sum_{j=1}^{s_i} (|g_{ij}| - g_{ij})$ und $f := \prod_{i=1}^{r} f_i$. f ist eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften □

<u>Korollar 3.7 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum. A, B seien semialgebraische Teilmengen von M, $\overline{A}$, $\overline{B}$ ihre Abschlüsse in M und es sei sowohl $\overline{A} \cap B$ als auch $\overline{B} \cap A$ leer. Dann gibt es eine semialgebraische Funktion f auf M mit $f(x) > 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) < 0$ für alle $x \in B$. Insbesondere gibt es offene semialgebraische Umgebungen U bzw. V von A bzw. B mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis : Nach Satz 3.6 gibt es semialgebraische Funktionen g und h auf M, so daß $g(x) = 0$, $h(x) > 0$ für alle $x \in A$ und $g(x) > 0$, $h(x) = 0$ für alle $x \in B$ ist. $f := h - g$ hat die gewünschten Eigenschaften. Wir können

$U := \left\{ x \in M \mid f(x) > 0 \right\}$ und $V := \left\{ x \in M \mid f(x) < 0 \right\}$

wählen □

<u>Satz 3.8 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum. $\left\{U_i\right\}_{i=1,\ldots,n}$ sei eine Überdeckung von M durch offene semialgebraische Teilmengen.

Dann gibt es eine Verfeinerung $\left\{V_i\right\}_{i=1,\ldots,n}$ der Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$, so daß der Abschluß $\overline{V}_i$ von V_i in M in U_i enthalten ist ($i = 1, \dots, n$).

Beweis : Wir definieren V_i induktiv nach i. Formal setzen wir $V_o := \emptyset$ und nehmen an, daß V_j für $j < i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, schon definiert ist und gilt :

$$\left(\bigcup_{j=0}^{i-1} V_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=i}^{n} U_j\right) = M \quad .$$

Der Rand Rd U_i von U_i in M ist eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von M, ebenso die Menge

$$A_i := M - \left(\left(\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=i+1}^{n} U_j\right)\right) .$$

Der Durchschnitt $A_i \cap$ Rd U_i ist leer. Nach Korollar 3.7 gibt es deshalb offene semialgebraische Umgebungen T_i von A_i und W_i von Rd U_i mit $T_i \cap W_i = \emptyset$. Wir setzen $V_i = U_i \cap T_i$. Dann ist $\overline{V}_i \subseteq \overline{U}_i$ und $\overline{V}_i \cap W_i = \emptyset$, also ist $\overline{V}_i \subseteq U_i$. Außerdem ist offensichtlich

$$\left(\bigcup_{j=0}^{i} V_j\right) \cup \left(\bigcup_{j=i+1}^{n} U_j\right) = M \quad ,$$

und Satz 3.8 ist bewiesen.□

<u>Satz 3.9 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum und $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ eine Überdeckung von M durch offene semialgebraische Teilmengen.

Dann gibt es eine der Überdeckung untergeordnete Partition der 1, d.h., es gibt semialgebraische Funktionen f_i auf M, deren Träger supp f_i in U_i enthalten ist, mit $f_i(x) \geqslant 0$

und $\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 1$ für alle $x \in M$.

Beweis : Sei $\{V_i\}_{i=1,\ldots,n}$ eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i=1,\ldots,n}$ mit $\overline{V}_i \subseteq U_i$ (Satz 3.8). Nach Satz 3.6 gibt es semialgebraische Funktionen $g_i : M \to R$ mit $g_i(x) = 0$ für alle $x \in M - V_i$ und $g_i(x) > 0$ für alle $x \in V_i$. Setze

$$f_i := \frac{g_i}{g_1 + \ldots + g_n} \qquad \square$$

Eine weitere Anwendung des Triangulierungssatzes ist

<u>Theorem 3.10 :</u> Sei M ein vollständiger affiner semialgebraischer Raum und A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge von M. f sei eine semialgebraische Funktion auf A, U sei eine offene semialgebraische Umgebung von A in M. Dann gibt es eine semialgebraische Funktion g auf M, die außerhalb U verschwindet, mit $g|A = f$.

Beweis : Sei $\Psi : |K| = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} M$ eine Triangulierung von M, so daß A und U die Vereinigung von "Simplizes" $\Psi(S_i)$ sind (Theorem 2.2). Wir identifizieren M vermöge Ψ mit $|K|$. Sei $S_i \subseteq St(A)$ (vgl. Def. 6, § 2). Dann ist S_i in U enthalten. Nach Übergang zur baryzentrischen Unterteilung von $|K|$ dürfen wir annehmen, daß für alle $S_i \subseteq St(A)$ $\overline{S}_i \cap A = \overline{T}_i$ ein abgeschlossener Simplex $\overline{T}_i$ von $|K|$ ist. Seien nun S und T offene Simplizes von $|K|$ mit $T \subseteq \overline{S}$.

$e_o,\dots,e_l$ seien die Ecken von T, $e_o,\dots,e_l,e_{l+1},\dots,e_m$ die Ecken von S. Dann sei $\overline{S}(T) := \left\{ \sum_{i=0}^{m} t_i \cdot e_i \in \overline{S} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{l} t_i \geq \frac{1}{2} \right\}$ und

$$p_{S|T} : \overline{S}(T) \to \overline{T} \quad , \quad \sum_{i=0}^{m} t_i \cdot e_i \mapsto \Big(\sum_{i=0}^{l} t_i \cdot e_i\Big)\Big/\Big(\sum_{i=0}^{l} t_i\Big)$$

die Projektion von $\overline{S}(T)$ nach $\overline{T}$.

$p : B := \bigcup_{S_i \subseteq St(A)} \overline{S}_i(T_i) \to A$, definiert durch

$p|\overline{S}_i(T_i) \cap S_i := p_{S_i|T_i}|\overline{S}_i(T_i) \cap S_i$,

ist eine Abbildung mit semialgebraischem Graph. B ist in U enthalten, ist abgeschlossen in M und enthält eine offene Umgebung von A.

Seien S_i, $S_j \subseteq St(A)$ und $S_i \leq \overline{S}_j$. Dann ist $\overline{T}_i = \overline{T}_j \cap \overline{S}_i$, $\overline{S}_i(T_i) = \overline{S}_j(T_j) \cap \overline{S}_i$ und $p_{S_i|T_i} = p_{S_j|T_j}|\overline{S}_i(T_i)$.

Wir sehen, daß p auch stetig ist. Leicht ist zu erkennen, daß sich B wie folgt disjunkt zerlegen läßt :

$$B = A \cup \Big(\bigcup_{x \in Rd(B)} \{ t\cdot x + (1-t)\cdot p(x) \mid t \in \,]0,1] \} \Big).$$

$Rd\,B$ sei dabei der Rand von B in M. Ist $y = tx + (1-t)\cdot p(x)$, $x \in Rd\,B$, so ist $p(y) = p(x)$. Durch

$$g(y) := \begin{cases} f(y) & \text{für } y \in A \\ (1-t)\cdot f(p(y)) & \text{für } y = t\cdot x + (1-t)\cdot p(x) \in B - A \end{cases}$$

wird eine semialgebraische Funktion g auf B gegeben, die am Rand von B verschwindet. Setzen wir g durch 0 auf ganz M fort, so erhalten wir die gewünschte Funktion $\Box$

§ 4 Garben auf semialgebraischen Räumen

Zunächst sei kurz an die Definition von Prägarbe und Garbe erinnert.

M sei ein semialgebraischer Raum. Eine (abelsche) Prägarbe $\mathfrak{F}$ auf M ordnet jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von M eine abelsche Gruppe $\mathfrak{F}(U)$ und jedem Paar $V \subseteq U$ einen Restriktionshomomorphismus $\rho_{U|V} : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{F}(V)$ so zu, daß für $W \subseteq V \subseteq U$ gilt : $\rho_{U|W} = \rho_{V|W} \circ \rho_{U|V}$. Mit anderen Worten : $\mathfrak{F}$ ist ein kontravarianter Funktor auf der zur semialgebraischen Topologie M_{sa} gehörenden Kategorie mit Werten in der Kategorie der abelschen Gruppen.

Eine Prägarbe $\mathfrak{F}$ auf M ist eine Garbe , wenn das Garbenaxiom erfüllt ist :

Ist $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch, $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von U in der semialgebraischen Topologie und sind Schnitte $s_i \in \mathfrak{F}(U_i)$ gegeben mit $s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$, so gibt es genau einen Schnitt $s \in \mathfrak{F}(U)$ mit $s|U_i = s_i$.

Jeder Prägarbe $\mathfrak{F}$ auf M können wir wie folgt in funktorieller Weise eine andere Prägarbe $\mathfrak{F}^+$ zuordnen :

Ist $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von U in der semialgebraischen Topologie, so sei

$$\mathfrak{F}(\{U_i\}) := \{(s_i)_i \mid s_i \in \mathfrak{F}(U_i),\ s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j\}$$

die abelsche Gruppe der Familien verträglicher Schnitte.

Wir setzen

$$\mathfrak{F}^+(U) := \varinjlim \mathfrak{F}(\{U_i\}) \quad ,$$

wobei der induktive Limes über alle Überdeckungen von U gebildet wird. Offenbar hat man einen kanonischen Prägarbenhomomorphismus $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}^+$, dieser ist ein Isomorphismus, wenn $\mathfrak{F}$ eine Garbe ist.

Im allgemeinen ist auch $\mathfrak{F}^+$ keine Garbe, nur für separierte Prägarben $\mathfrak{F}$ ist dies immer richtig. (Eine Prägarbe $\mathfrak{F}$ heißt separiert, wenn für alle Überdeckungen $\{U_i\}_{i\in I}$ einer offenen semialgebraischen Teilmenge U von M der kanonische Homomorphismus $\mathfrak{F}(U) \to \prod_I \mathfrak{F}(U_i)$ injektiv ist.)

Da $\mathfrak{F}^+$ aber immer separiert ist, ist $\mathfrak{F}^\# := (\mathfrak{F}^+)^+$ eine Garbe. $\mathfrak{F}^\#$ heißt die zu $\mathfrak{F}$ assoziierte Garbe.

(Man vgl. [T],I.2; [A],I.2,II.1).

Satz 4.1 : Sei M ein affiner semialgebraischer Raum und $\mathfrak{F}$ eine Prägarbe auf M. Dann ist $\mathfrak{F}^+$ eine Garbe, d.h., $\mathfrak{F}^+$ ist die zu $\mathfrak{F}$ assoziierte Garbe $\mathfrak{F}^\#$.

Beweis : Sei $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von M in der semialgebraischen Topologie. Ist $s \in \mathfrak{F}^+(U)$ und $s|U_i = 0$ für alle i, so ist offenbar $s = 0$. Also ist nur zu zeigen, daß es zu einer Familie

$(s_i)_{i\in I}$ von Schnitten $s_i \in \mathfrak{F}^+(U_i)$ mit $s_i|U_i \cap U_j = s_j|U_i \cap U_j$ einen Schnitt $s \in \mathfrak{F}^+(U)$ mit $s|U_i = s_i$ gibt. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß $I = \{1,2\}$ ist.

Seien $s \in \mathfrak{F}^+(U_1)$ und $t \in \mathfrak{F}^+(U_2)$ mit $s|U_1 \cap U_2 = t|U_1 \cap U_2$ gegeben. Es gibt Überdeckungen $\{U_{1i}\}_{i\in I_1}$ und $\{U_{2j}\}_{j\in I_2}$ von U_1 bzw. U_2, so daß s durch eine Familie $(s_i) \in \mathfrak{F}(\{U_{1i}\})$ und t durch eine Familie $(t_j) \in \mathfrak{F}(\{U_{2j}\})$ repräsentiert wird. Da $s|U_1 \cap U_2 = t|U_1 \cap U_2$ ist, gibt es Überdeckungen $\{W_{ijk}\}_{k\in K(i,j)}$ von $U_{1i} \cap U_{2j}$ mit $s_i|W_{ijk} = t_j|W_{ijk}$ in $\mathfrak{F}(W_{ijk})$.

$\{V_1,V_2\}$ sei eine Verfeinerung von $\{U_1,U_2\}$ mit $\overline{V}_l \subseteq U_l$, $l = 1,2$ (Satz 3.8). Wir erhalten eine offene Überdeckung $\mathfrak{B}$ von U, bestehend aus den Mengen W_{ijk}, $i \in I_1$, $j \in I_2$, $k \in K(i,j)$, und den Mengen $S_i := U_{1i} \setminus \overline{V}_2$, $i \in I_1$, $T_j := U_{2j} \setminus \overline{V}_1$, $j \in I_2$.

Die Schnitte $s_i|W_{ijk} \in \mathfrak{F}(W_{ijk})$, $s_i|S_i \in \mathfrak{F}(S_i)$, $t_j|T_j \in \mathfrak{F}(T_j)$ definieren eine verträgliche Familie $r \in \mathfrak{F}(\mathfrak{B})$, für die $r|U_1 = s$ und $r|U_2 = t$ ist, was leicht nachzuprüfen ist. Also ist $\mathfrak{F}^+$ eine Garbe □

<u>Definition 1</u> : $\mathfrak{F}$ sei eine Prägarbe auf dem semialgebraischen Raum M und x ein Punkt in M.

Der <u>Halm</u> $\mathfrak{F}_x$ von $\mathfrak{F}$ in x sei wie folgt definiert :

$$\mathfrak{F}_x := \varinjlim \mathfrak{F}(U)$$

Der induktive Limes wird gebildet über die induktiv geordnete Menge der offenen semialgebraischen Umgebungen von x in M.

Der Übergang zum Halm ist in der semialgebraischen Topologie, anders als bei gewöhnlichen topologischen Räumen oder in der Etaltopologie, im allgemeinen nicht gutartig. Es gibt nichttriviale Garben mit überall verschwindenden Halmen.

<u>Beispiel :</u> Sei R ein nichtarchimedischer reell-abgeschlossener Körper und $M = \,]0,1[$ das offene Einheitsintervall in R. Wir definieren auf M die folgende Prägarbe $\mathfrak{G}$:
Für $0 \leq a < b \leq 1$ sei $\mathfrak{G}(]a,b[) = 0$, falls $]a,b[$ höchstens einen Punkt aus $\mathbb{Q}$ enthält, und sonst $\mathfrak{G}(]a,b[) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.
$\mathfrak{F}$ sei die zu $\mathfrak{G}$ assoziierte Garbe. $\mathfrak{F}$ ist nicht die Nullgarbe, während der Halm $\mathfrak{F}_x$ für alle $x \in M$ gleich 0 ist.

<u>Satz 4.2 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum mit Strukturgarbe $\mathfrak{O}_M$. Dann sind alle $\mathfrak{O}_M$-Modulgarben $\mathfrak{M}$ "fein", d.h., zu jeder Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ von M gibt es eine Verfeinerung $\{V_i\}_{i=1,\dots,n}$ von $\{U_i\}$ mit $\overline{V}_i \subseteq U_i$ und eine Familie $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ von Endomorphismen von $\mathfrak{M}$, so daß für alle offenen semialgebraischen Teilmengen U von M

und alle Schnitte $s \in \mathfrak{M}(U)$ gilt :

i) $\quad s = \sum_{i=1}^{n} e_i(s)$

ii) $\quad e_i(s) \,|U \setminus \overline{V}_i = 0$.

Beweis : Wir wählen eine der Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete semialgebraische Partition $\{f_i\}$ der 1 (Satz 3.9), setzen $V_i := \{ x \in U_i \mid f_i(x) > 0 \}$ und definieren für $s \in \mathfrak{M}(U)$ $\quad e_i(s) := (f_i|U)\cdot s$ □

Wir werden Satz 4.2 im nächsten Abschnitt verwenden, um zu zeigen, daß die Kohomologie eines affinen semialgebraischen Raums M mit Koeffizienten in einer $\mathcal{O}_M$-Modulgarbe trivial ist.

Sei nun $f : M \to N$ ein Morphismus zwischen semialgebraischen Räumen. Einer Garbe $\mathfrak{F}$ auf M kann man dann das direkte Bild $f_*\mathfrak{F}$ auf N zuordnen:

$$f_*\mathfrak{F}(V) := \mathfrak{F}(f^{-1}(V))$$

für jede offene semialgebraische Menge V in N. $f_*\mathfrak{F}$ ist wieder eine Garbe. Zu einer Garbe $\mathcal{G}$ auf N können wir das Urbild $f^*\mathcal{G}$ bilden : $f^{\cdot}\mathcal{G}$ sei folgende Prägarbe auf M : $f^{\cdot}\mathcal{G}$ ordnet jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von M $\varinjlim \mathcal{G}(V)$ zu, wobei der induktive Limes über die offenen semialgebraischen Umgebungen von $f(U)$ gebildet wird. $f^*\mathcal{G}$ ist dann die zu $f^{\cdot}\mathcal{G}$ assoziierte Garbe. $f^{\cdot}\mathcal{G}$ ist separiert. Damit ist $f^*\mathcal{G}$ gleich $(f^{\cdot}\mathcal{G})^+$.

f_* ist ein linksexakter Funktor auf der Kategorie der abelschen Garben auf M, f^* ist exakt und zu f_* linksadjungiert ([T],I.3.6; [A], II.4.14).

Sei nun U eine offene und semialgebraische Teilmenge des semialgebraischen Raums M. $i : M - U \to M$ und $j : U \to M$ seien die Inklusionen. $\mathfrak{F}$ sei eine Garbe auf U. In der üblichen Weise können wir $\mathfrak{F}$ durch 0 zu einer Garbe $j_!\mathfrak{F}$ auf M fortsetzen.

$\mathfrak{F}_0$ sei die folgende Prägarbe auf M :

$$\mathfrak{F}_0(V) := \begin{cases} \mathfrak{F}(V) & \text{für } V \subseteq U \\ 0 & \text{für } V \nsubseteq U \end{cases} .$$

$j_!\mathfrak{F}$ sei die zu $\mathfrak{F}_0$ assoziierte Garbe.

Da $\mathfrak{F}_0$ separiert ist, ist $j_!\mathfrak{F}$ schon gleich $\mathfrak{F}_0^+$.

Für eine Garbe $\mathcal{G}$ auf M ist $j^*\mathcal{G}$ einfach die Restriktion $\mathcal{G}|U$ von $\mathcal{G}$ auf U.

<u>Satz 4.3 :</u> Sei M ein semialgebraischer Raum und U eine offene semialgebraische Teilmenge von M. $\mathfrak{F}$ sei eine Garbe auf M. $j : U \to M$ und $i : M - U \to M$ seien die Inklusionen. Dann ist die kanonische Sequenz

$$0 \to j_!(\mathfrak{F}|U) \to \mathfrak{F} \to i_*i^*\mathfrak{F} \to 0$$

abelscher Garben auf M exakt.

(Dabei wird $j_!(\mathfrak{F}|U) \to \mathfrak{F}$ durch die Inklusion $(\mathfrak{F}|U)_0 \to \mathfrak{F}$ induziert und $\mathfrak{F} \to i_* i^* \mathfrak{F}$ ist der Adjunktionsmorphismus).

Beweis : Die Folge ist ein Komplex, da der Prägarbenhomomorphismus $(\mathfrak{F}|U)_0 \to \mathfrak{F} \to i_* i^* \mathfrak{F}$ der Nullmorphismus ist. $(\mathfrak{F}|U)_0 \to \mathfrak{F}$ ist trivialerweise injektiv. Da der Übergang zur assoziierten Garbe exakt ist, ist demnach $j_!(\mathfrak{F}|U) \to \mathfrak{F}$ injektiv. Sei $V \subseteq M$ offen und semialgebraisch und $s \in i_* i^* \mathfrak{F}(V) = i^* \mathfrak{F}(V \cap (M-U))$. Da die semialgebraische Topologie auf $(M-U)$ durch die von M induziert wird (Theorem 2.8), gibt es offene semialgebraische Teilmengen V_k, $k = 1,\dots, r$, von V, die $V \cap (M-U)$ überdecken und Schnitte $s_k \in \mathfrak{F}(V_k)$, so daß $s|V_k \cap (M-U)$ schon in

$$\varinjlim_{\substack{(V_k \cap (M-U)) \subseteq W \\ W \subseteq M \text{ offen, semialgebraisch}}} \mathfrak{F}(W)$$

ist und durch s_k repräsentiert wird. $s|V_k \in i_* i^* \mathfrak{F}(V_k)$ liegt also im Bild von $\mathfrak{F} \to i_* i^* \mathfrak{F}$. Andererseits ist $s|V \cap U = 0$. $\mathfrak{F} \to i_* i^* \mathfrak{F}$ ist deshalb surjektiv.

Sei nun $s \in \mathfrak{F}(V)$ ein Schnitt, der auf 0 abgebildet wird. Dann gibt es offene semialgebraische Teilmengen W_k, $k = 1, \dots, s$, von V, die $V \cap (M-U)$ überdecken, so daß die Restriktionen $s|W_k$ gleich 0 sind. $\{ W_k, k=1,\dots,s, V \cap U \}$ ist eine Überdeckung von V. $s|W_k$, $k = 1,\dots, s$, und $s|V \cap U$ sind Schnitte der Prägarbe $(\mathfrak{F}|U)_0$, die selbstverständlich miteinander verträglich sind. s ist also schon ein Schnitt von $j_!(\mathfrak{F}|U)$. Die Behauptung ist gezeigt □

<u>Satz 4.4 :</u> A sei eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge eines semialgebraischen Raums M. $i : A \to M$ sei die Inklusion. Dann ist i_* exakt.

Beweis : Sei $0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{G} \to \mathfrak{H} \to 0$ eine exakte Sequenz abelscher Garben auf A. i_* ist immer linksexakt, also ist zu zeigen, daß $i_*\mathfrak{G} \to i_*\mathfrak{H}$ surjektiv ist. Sei U offen und semialgebraisch in M und $s \in i_*\mathfrak{H}(U) = \mathfrak{H}(U \cap A)$ gegeben. Die Topologie von A wird durch die von M induziert. Deshalb gibt es offene ~~semialgebraische~~ Teilmengen V_k, $k = 1,\ldots,r$, <u>von U</u> , die $U \cap A$ überdecken, so daß $s|V_k$ im Bild von $i_*\mathfrak{G}(V_k) = \mathfrak{G}(V_k \cap A) \to i_*\mathfrak{H}(V_k) = \mathfrak{H}(V_k \cap A)$ liegt. Da $s|U \setminus A = 0$ und $\{U \setminus A, V_k, k = 1,\ldots, r\}$ eine Überdeckung von U ist, folgt die Behauptung □

§ 5 Semialgebraische Kohomologie

Wie immer betrachten wir einen semialgebraischen Raum M. Sowohl die Kategorie $\underline{P}$ der abelschen Prägarben auf M als auch die Kategorie $\underline{S}$ der abelschen Garben auf M ist eine Kategorie mit genügend vielen injektiven Objekten ([T] I.2.1,3.2; [A] I.2.7, II.1.8). Ich will kurz an die Definition der Kohomologie von M mit Koeffizienten in einer abelschen Garbe $\mathfrak{F}$ erinnern :

Man erhält $H^q(M,\mathfrak{F})$, indem man die q-te Rechtsableitung $R^q\Gamma_M$ des linksexakten Schnittfunktors Γ_M auf $\underline{S}$, der einer Garbe $\mathfrak{G}$ die abelsche Gruppe $\mathfrak{G}(M) = \Gamma(M,\mathfrak{G})$ zuordnet, auf $\mathfrak{F}$ anwendet :

$$H^q(M,\mathfrak{F}) = R^q\Gamma_M(\mathfrak{F}).$$

$R^q\Gamma_M(\mathfrak{F})$ gewinnt man folgendermaßen :

Man wähle eine Auflösung

$$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{M}_3 \to \dots$$

von $\mathfrak{F}$ durch injektive abelsche Garben $\mathfrak{M}_i$, wende den Schnittfunktor Γ_M an und nehme die q-te Kohomologiegruppe des Komplexes

$$0 \to \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{M}_0(M) \to \mathfrak{M}_1(M) \to \mathfrak{M}_2(M) \to \mathfrak{M}_3(M) \to \dots \quad .$$

Ist $\mathfrak{F}$ eine abelsche Prägarbe auf M, so können wir $\mathfrak{F}$ zu jeder Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ von M durch offene semialgebraische Teilmengen in der üblichen Weise die Čech-Kohomologiegruppen $H^q(\{U_i\},\mathfrak{F})$ zu dieser Überdeckung und dann die Čech-Kohomologie $\check{H}^q(M,\mathfrak{F})$ von M mit Werten in $\mathfrak{F}$, die als induktiver Limes $\check{H}^q(M,\mathfrak{F}) = \varinjlim H^q(\{U_i\},\mathfrak{F})$ (über alle Überdeckungen) definiert ist, zuordnen (vgl. [T] I.2.2; [A] I.3).

Wir werden sehen, daß für jede abelsche Garbe $\mathfrak{F}$ auf einem affinen semialgebraischen Raum die oben definierte (Grothendieck-)Kohomologie wie bei parakompakten Räumen mit der Čech-Kohomologie übereinstimmt.

<u>Lemma 5.1 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum und $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von M in der semialgebraischen Topologie. $\{V_i\}_{i\in I}$ sei eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i\in I}$ mit $\overline{V}_i \subseteq U_i$ für alle $i \in I$. $\mathfrak{F}$ sei eine abelsche Prägarbe auf M, deren assoziierte Garbe $\mathfrak{F}^{\#}$ gleich 0 ist. α sei eine q-Čech-Kokette von $\mathfrak{F}$ zur Überdeckung $\{U_i\}$, d.h.

$$\alpha = (\alpha_{i_0\ldots i_q}) \in C^q(\{U_i\},\mathfrak{F}) = \prod_{\substack{(i_0,\ldots,i_q)\\ \in I^{q+1}}} \mathfrak{F}(U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}) \ .$$

Dann gibt es eine Überdeckung $\{W_j\}_{j\in J}$ von M, die $\{V_i\}_{i\in I}$ verfeinert, mit folgenden Eigenschaften :

i) Ist W_j nicht in U_i enthalten, so ist $W_j \cap \overline{V}_i = \emptyset$.

ii) Ist $W_j \subseteq U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$, so ist $\alpha_{i_0\ldots i_q}|W_j = 0$.

Beweis : Da M affin ist, stimmen $\mathfrak{J}^{\#}$ und $\mathfrak{J}^{+}$ überein. Für alle $(i_o,\dots,i_q) \in I^{q+1}$ gibt es deshalb eine Überdeckung $\{W_k(i_o,\dots,i_q)\}_{k \in K(i_o,\dots,i_q)}$ von $U_{i_o} \cap \dots \cap U_{i_q}$, so daß $\alpha_{i_o\dots i_q}|W_k(i_o,\dots,i_q) = 0$ ist. Wir erhalten eine Überdeckung $\{S_l\}_{l\in\Lambda}$ von M, bestehend aus den Mengen

$$V_i \cap (\bigcap_{j\in I} T_j) \quad , \ i \in I \ , \ T_j \in \left\{ U_j \ , M - \overline{V}_j \right\} .$$

Ersichtlich ist $S_l \subseteq U_j$ oder $S_l \cap \overline{V}_j = \emptyset$ für jedes $j \in I$.

Wir betrachten nun das System der Mengen

$$S_l \cap (\bigcap_{\substack{(i_o,\dots,i_q) \\ \in I^{q+1}}} A_{i_o\dots i_q}) \quad , \ l \in \Lambda \ \text{ und}$$

$$A_{i_o\dots i_q} \in \left\{ M, W_k(i_o,\dots,i_q) \ , \ k \in K(i_o,\dots,i_q) \right\} .$$

Diese Mengen sind offen und semialgebraisch und überdecken M. Die Überdeckung $\{W_j\}_{j\in J}$, bestehend aus den irreduziblen Mengen dieses Systems, d.h., aus denjenigen Mengen, die sich nicht als echte Vereinigung von anderen Mengen des Systems darstellen lassen, hat die gewünschten Eigenschaften :

Offensichtlich ist $\{W_j\}$ eine Verfeinerung von $\{V_i\}$.

Ist W_j nicht in U_i enthalten, so ist $W_j \cap \overline{V}_i = \emptyset$, da dies ja schon für alle S_l gilt.

Sei $W_j \subseteq U_{i_o} \cap \dots \cap U_{i_q}$. W_j ist von der Gestalt

$$S_l \cap (\bigcap_{(j_o,\dots,j_q)} A_{j_o\dots j_q}) \quad , \text{ wobei } l \in \Lambda \text{ und}$$

$$A_{j_o\dots j_q} \in \left\{ M, W_k(j_o,\dots,j_q), \ k \in K(j_o,\dots,j_q) \right\} .$$

Es gibt ein $k \in K(i_o,\ldots,i_q)$, so daß $W_j \subseteq W_k(i_o,\ldots,i_q)$ ist, denn sonst wäre $A_{i_o\ldots i_q} = M$ und $W_j \cap W_k(i_o,\ldots,i_q)$ für alle $k \in K(i_o,\ldots,i_q)$ eine Menge des Systems, die echt in W_j enthalten ist. Dies kann nicht sein, da W_j irreduzibel und

$$W_j = \bigcup_{k\in K(i_o,\ldots,i_q)} (W_j \cap W_k(i_o,\ldots,i_q))$$

ist.

Sei $W_j \subseteq W_k(i_o,\ldots,i_q)$. Da $\alpha_{i_o\ldots i_q} | W_k(i_o,\ldots,i_q) = 0$ ist, ist erst recht $\alpha_{i_o\ldots i_q}|W_j = 0$ $\square$

Sei nun M ein beliebiger semialgebraischer Raum und $\mathfrak{F}$ eine abelsche Garbe auf M. Ordnen wir jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von M die q-te Kohomologiegruppe $H^q(U,\mathfrak{F})$ zu, so ist dies eine Prägarbe $\mathfrak{H}^q(\mathfrak{F})$ auf M. Die Restriktionshomomorphismen werden durch die Restriktionshomomorphismen der bei der Definition von $H^q(M,\mathfrak{F})$ verwendeten Auflösung

$$0 \to \mathfrak{F} \to \mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2 \to \ldots$$

gegeben.

Es gibt eine in $\mathfrak{F}$ funktorielle Spektralsequenz ([T] I.3.4.4; [A] II.3.5)

$$E_2^{pq} = \check{H}^p(M,\mathfrak{H}^q(\mathfrak{F})) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(M,\mathfrak{F}) .$$

Der Eckenmorphismus $E_2^{po} \to E^p$ liefert einen in $\mathfrak{F}$ funktoriellen Homomorphismus

$$\check{H}^p(M,\mathfrak{F}) \to H^p(M,\mathfrak{F}) \quad .$$

Da die Kohomologiegruppen von $\mathfrak{F}$ aus einer (exakten) Auflösung von $\mathfrak{F}$ entstehen, ist jeder Kozykel von $\mathfrak{F}$ lokal ein Korand, d.h., ist $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch, so gibt es zu jeder Kohomologieklasse $[\alpha] \in H^q(U,\mathfrak{F})$ eine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von U, so daß $\alpha|U_i$ ein Korand, die Kohomologieklasse von $\alpha|U_i$ also 0 ist. Dies bedeutet, daß $\mathfrak{H}^q(\mathfrak{F})^+ = 0$ ist, insbesondere verschwindet die zu $\mathfrak{H}^q(\mathfrak{F})$ assoziierte Garbe (für $q > 0$).

<u>Theorem 5.2 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum und $\mathfrak{F}$ eine abelsche Garbe auf M. Dann ist der kanonische Homomorphismus

$$\check{H}^p(M,\mathfrak{F}) \to H^p(M,\mathfrak{F})$$

für alle $p \geq 0$ ein Isomorphismus.

Beweis : Ist $E_2^{pq} = 0$ für alle $p \geq 0$, $q > 0$, so zerfällt die Spektralsequenz und die Eckenmorphismen $E_2^{po} \to E^p$ sind Isomorphismen. Da die zu $\mathfrak{H}^q(\mathfrak{F})$ assoziierte Garbe für $q > 0$ gleich 0 ist, folgt die Behauptung deshalb aus

<u>Lemma 5.3 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum und $\mathfrak{G}$ eine abelsche Prägarbe auf M, deren assoziierte Garbe verschwindet. Dann ist $\check{H}^q(M,\mathfrak{G}) = 0$ für alle $q \geq 0$.

Beweis : Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von M (wie immer in der semialgebraischen Topologie) und $\alpha = (\alpha_{i_0\ldots i_q}) \in C^q(\{U_i\},\mathcal{G})$ ein Kozykel. $\{V_i\}_{i\in I}$ sei eine Verfeinerung von $\{U_i\}_{i\in I}$, so daß der Abschluß $\overline{V}_i$ von V_i in M ganz in U_i enthalten ist (Satz 3.8). Nach Lemma 5.1 gibt es eine Verfeinerung $\{W_j\}_{j\in J}$ von $\{V_i\}$ mit folgenden Eigenschaften:

i) Ist $W_j \not\subseteq U_i$, so ist $W_j \cap V_i = \emptyset$.

ii) Ist $W_j \subseteq U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_q}$, so ist $\alpha_{i_0\ldots i_q}|W_j = 0$.

$\mu : J \to I$ sei eine Verfeinerungsabbildung, d.h., es sei $W_j \subseteq V_{\mu(j)} \subseteq U_{\mu(j)}$. $\delta = (\delta_{j_0\ldots j_q})$ sei das Bild von α in $C^q(\{W_j\},\mathcal{G})$, das man durch Restriktion bezüglich μ erhält. $W_{j_0} \cap \ldots \cap W_{j_q}$ ist in $V_{\mu(j_0)} \cap \ldots \cap V_{\mu(j_q)}$ enthalten. Ist $W_{j_0} \cap \ldots \cap W_{j_q}$ nicht leer, so ist insbesondere $W_{j_0} \cap V_{\mu(j_k)}$ nicht leer für $k = 0,\ldots, q$ und aus i) folgt, daß $W_{j_0} \subseteq U_{\mu(j_0)} \cap \ldots \cap U_{\mu(j_q)}$ ist. Nach ii) ist deshalb $\alpha_{\mu(j_0)\ldots\mu(j_q)} \mid W_{j_0} \cap \ldots \cap W_{j_q} = 0$. Da $\delta_{j_0\ldots j_q} = \alpha_{\mu(j_0)\ldots\mu(j_q)} \mid W_{j_0} \cap \ldots \cap W_{j_q}$ ist, ist $\delta = 0$. Damit ist auch die von α in $\check{H}^q(M,\mathcal{G})$ repräsentierte Kohomologieklasse gleich 0 □

Die Beschreibung der Grothendieck- als Čech-Kohomologie benützen wir beim Nachweis, daß $\mathcal{O}_M$-Modulgarben azyklisch sind.

<u>Satz 5.4 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum mit Strukturgarbe $\mathfrak{G}_M$. $\{U_i\}_{i\in I}$ sei eine Überdeckung von M. Dann ist $H^q(\{U_i\},\mathfrak{M}) = 0$ für jede $\mathfrak{G}_M$-Modulgarbe $\mathfrak{M}$ und für alle $q > 0$.

Beweis : Da $\mathfrak{M}$ fein ist (Satz 4.2), gibt es eine Verfeinerung $\{V_i\}_{i\in I}$ von $\{U_i\}_{i\in I}$ mit $\overline{V}_i \subseteq U_i$ und Endomorphismen e_i , $i \in I$, von $\mathfrak{M}$, so daß für alle $s \in \mathfrak{M}(U)$, $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch, gilt :

i) $s = \sum_{i\in I} e_i(s)$.

ii) $e_i(s) \mid U\setminus\overline{V}_i = 0$.

Sei $\alpha = (\alpha_{i_o\ldots i_q}) \in C^q(\{U_i\},\mathfrak{M})$ ein q-Čech-Kozykel, $q > 0$. Die Schnitte $e_i(\alpha_{ii_o\ldots i_{q-1}}) \in \mathfrak{M}(U_i \cap U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_{q-1}})$ lassen sich durch 0 zu Schnitten $\delta^i_{i_o\ldots i_{q-1}}$ über $U_{i_o} \cap \ldots \cap U_{i_{q-1}}$ fortsetzen (nach ii)). Setzen wir

$$\delta_{i_o\ldots i_{q-1}} := \sum_{i\in I} \delta^i_{i_o\ldots i_{q-1}} ,$$

so erhalten wir eine (q-1)-Kokette $\delta = (\delta_{i_o\ldots i_{q-1}})$, deren Korand, wie eine einfache Rechnung zeigt, gleich α ist. Also ist $H^q(\{U_i\},\mathfrak{M}) = 0$ für $q > 0$ □

<u>Korollar 5.5 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum mit Strukturgarbe $\mathfrak{G}_M$. Dann sind alle $\mathfrak{G}_M$-Modulgarben $\mathfrak{M}$ azyklisch, d.h. $H^q(M,\mathfrak{M}) = 0$ für alle $q > 0$.

Beweis : Die Behauptung folgt unmittelbar aus Theorem 5.2

und Satz 5.4 □

Einige Bezeichnungen :

M sei ein affiner semialgebraischer Raum und $\Psi : X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} M$ eine Triangulierung von M. X sei in R^n enthalten. Wir identifizieren $|K(X)| =: |K|$ und den Abschluß $\overline{X}$ von X in R^n. A sei eine semialgebraische Teilmenge von M. E(K) sei die Menge der Ecken von $|K|$, $E(S_i)$ die Menge der Ecken von S_i. $E(X) = \{ e \in E(K) \mid e \in X \}$, $E(M) = \Psi(E(X))$, $E(A) = E(M) \cap A$ heiße dann die <u>Eckenmenge von</u> X bzw. M bzw. A.

<u>Definition 1 :</u>

Ψ induziert eine <u>gute Triangulierung von A</u> , wenn gilt :

a) A ist die Vereinigung gewisser "Simplizes" $\Psi(S_i)$.

b) Ist $\Psi(S_i) \subseteq A$, so ist $\Psi^{-1}(E(A)) \cap \overline{S}_i \neq \emptyset$, d.h., mindestens eine Ecke von S_i liegt in X und wird durch Ψ nach A abgebildet.

c) Ist S ein offener Simplex von $|K|$ und die Eckenmenge E(S) in $\Psi^{-1}(A)$ enthalten, so liegt S in $\Psi^{-1}(A)$, d.h. S ist in X enthalten und wird durch Ψ nach A abgebildet.

Ist A = M und sind a),b),c) erfüllt, so heißt Ψ eine gute Triangulierung von M.

Das folgende Lemma ist einfach zu zeigen.

<u>Lemma 5.6 :</u> M sei ein affiner semialgebraischer Raum und $A \subseteq M$ eine semialgebraische Teilmenge.

$\Psi : X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} M$ sei eine Triangulierung von M, so daß A die Vereinigung gewisser "Simplizes" $\Psi(S_i)$ ist. $|K(X)'|$ sei die baryzentrische Unterteilung von $|K(X)|$. Dann induziert die Triangulierung $\Psi' : |K(X)'| \cap X \xrightarrow[\Psi]{\sim} M$ eine gute Triangulierung von A. Induziert Ψ schon eine gute Triangulierung von A, so ist $A \subseteq \bigcup_{e \in E(A)} St(e)$, wobei St(e) die Sternumgebung von e in M bzgl. Ψ bezeichne.

Aus Lemma 5.6 folgt insbesondere, daß für eine gute Triangulierung $\Psi : \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} M$ von M durch $\{St(e)\}_{e \in E(M)}$ eine Überdeckung von M, die "Sternüberdeckung" von M (bzgl. Ψ), gegeben wird.

<u>Lemma 5.7 :</u> Sei $\Psi : X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} M$ eine gute Triangulierung von M, und seien Ecken $e_o, \ldots, e_q \in E(M)$ von M gegeben. Dann ist $St(e_o) \cap \ldots \cap St(e_q)$ genau dann nicht leer, wenn $\Psi^{-1}(\{e_o, \ldots, e_q\})$ die Eckenmenge eines offenen Simplex S von $|K(X)|$ ist (m.a.W.: wenn $\Psi^{-1}(\{e_o, \ldots, e_q\})$ ein Simplex von K(X) ist). Ist dies der Fall, so liegt $\Psi(S)$ in $St(e_o) \cap \ldots \cap St(e_q)$.

Beweis : Sei $J := \{ i \mid 1 \leq i \leq r, \Psi^{-1}(e_k) \in \overline{S_i}$ für $k = 0, \ldots, q \}$. Dann ist $St(e_o) \cap \ldots \cap St(e_q) = \bigcup_{i \in J} \Psi(S_i)$. Ist J nicht leer, so spannen die Ecken $\Psi^{-1}(e_k)$ eine iterierte Seite eines jeden Simplex S_i, $i \in J$, auf. Sind umgekehrt $\Psi^{-1}(e_o), \ldots , \Psi^{-1}(e_q)$ die Ecken eines offenen Simplex S von $|K(X)|$, so ist S, da Ψ eine gute Triangulierung ist, in X. Er wird durch Ψ nach $St(e_o) \cap \ldots \cap St(e_q)$ abgebildet □

<u>Lemma 5.8 :</u> Sei M ein ~~affiner~~ semialgebraischer ~~Raum~~ und $\Psi : X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} M$ eine gute Triangulierung. $\{St(e)\}_{e\in E(M)}$ sei die zugehörige Sternüberdeckung von M. Dann ist für alle abelschen Prägarben $\mathfrak{F}$ auf M $H^q(\{St(e)\},\mathfrak{F}) = 0$ für alle $q > \dim M$.

Beweis : Die Čech-Kohomologie von $\mathfrak{F}$ zur Überdeckung $\{St(e)\}_{e\in E(M)}$ läßt sich berechnen als die Kohomologie des Kokettenkomplexes $\{\tilde{C}^q(\{St(e)\},\mathfrak{F})\}_{q\geqslant 0}$ der alternierenden Čech-Koketten. Es ist

$$\tilde{C}^q(\{St(e)\},\mathfrak{F}) = \prod_{\substack{(e_o,\ldots,e_q)\in E(M)^{q+1} \\ e_i \neq e_j \text{ für } i \neq j}} \mathfrak{F}(\,St(e_o) \cap \ldots \cap St(e_q))$$

([G] I.3.8). Da $St(e_o) \cap \ldots \cap St(e_q)$ nur dann nicht leer ist, wenn $\Psi^{-1}(e_o), \ldots , \Psi^{-1}(e_q)$ die Ecken eines Simplex von $|K|$ sind (Lemma 5.7), und andererseits alle Simplizes von X höchstens dim M - dimensional sind, ist $\tilde{C}^q(\{St(e)\},\mathfrak{F}) = 0$ und damit $H^q(\{St(e)\},\mathfrak{F}) = 0$ für $q > \dim M$ □

<u>Theorem 5.9 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum. Dann ist die kohomologische Dimension von M $\leqslant$ dim M, d.h.,

für alle abelschen Garben $\mathfrak{F}$ auf M ist $H^q(M,\mathfrak{F}) = 0$ für $q > \dim M$.

Beweis : Nach Theorem 5.2 ist $\check{H}^q(M,\mathfrak{F}) = H^q(M,\mathfrak{F})$. Aus dem Triangulierungssatz 2.2 und Lemma 1.1 folgt, daß es zu jeder Überdeckung $\mathfrak{U}$ von M eine gute Triangulierung $\Psi : X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} M$ gibt, so daß die zugehörige Sternüberdeckung $\{St(e)\}_{e \in E(M)}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ ist. Nach Lemma 5.8 ist $H^q(\{St(e)\},\mathfrak{F}) = 0$ für alle $q > \dim M$, also ist auch $\check{H}^q(M,\mathfrak{F}) = 0$ für $q > \dim M$ □

§ 6 Die Alexander-Spanier-Kohomologie in der semialgebraischen Topologie

M sei zunächst immer ein affiner semialgebraischer Raum. Spezielle Garben auf M sind die konstanten Garben G_M zu abelschen Gruppen G. G_M ist die assoziierte Garbe zu der Prägarbe, die jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von M die abelsche Gruppe G zuordnet. Es ist

$$G_M(U) = \prod_{\pi_o(U)} G \quad ,$$

wobei $\pi_o(U)$ die endliche Menge der Komponenten von U ist. Wir wollen in diesem Abschnitt die Kohomologie $H^q(M,G_M)$ mit Koeffizienten in G_M als Alexander-Spanier-Kohomologie beschreiben. Die Definition dieser Kohomologie erfolgt analog zu der im klassischen Fall topologischer Räume (vgl. [S] 6.4).

Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von M. $C^q(U,G)$ sei die Menge aller Abbildungen $U^{q+1} \to G$, die unter punktweiser Addition eine Gruppe bilden ($q \in \mathbb{N}$, $q \geqslant 0$). Durch

$$\delta : C^q(U,G) \to C^{q+1}(U,G) ,$$

$$\delta\chi(x_o,\ldots,x_{q+1}) := \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \chi(x_o,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_{q+1})$$

wird ein Korandhomomorphismus definiert, und wir erhalten einen Kokettenkomplex $C^*(U,G) = \{C^q(U,G)\}_{q\geqslant 0}$.

Eine Abbildung $\chi \in C^q(U,G)$ "verschwindet lokal", wenn es eine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von U (natürlich in der semialgebraischen Topologie) gibt, so daß χ auf $\bigcup_{i\in I} U_i^{q+1}$ verschwindet. Die Untergruppe der lokal verschwindenden Abbildungen bezeichnen wir mit $C_o^q(U,G)$. $C_o^*(U,G) = \{C_o^q(U,G)\}_{q\geq 0}$ ist ein Unterkokettenkomplex von $C^*(U,G)$.

Der Quotient $\overline{C}^*(U,G) := C^*(U,G)/C_o^*(U,G)$ der beiden ist der <u>Komplex der Alexander-Spanier-Koketten auf U mit Koeffizienten in G</u>. Es ist $\overline{C}^q(U,G) = C^q(U,G)/C_o^q(U,G)$.

Die Kohomologiegruppen $\overline{H}^q(U,G)$ dieses Kokettenkomplexes heißen die <u>Alexander-Spanier-Kohomologie von U mit Koeffizienten in G</u>.

Ordnen wir jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von M die Gruppe $C^q(U,G)$ ($C_o^q(U,G)$) zu, so erhalten wir offenbar eine Prägarbe $C_{M,G}^q$ ($C_{oM,G}^q$) auf M .

<u>Lemma 6.1 :</u> $\overline{C}_{M,G}^q : U \mapsto \overline{C}^q(U,G)$ ist die zu $C_{M,G}^q$ assoziierte Garbe.

Beweis : Sei U eine offene semialgebraische Teilmenge von M. Nach Satz 4.1 ist

$$(C_{M,G}^q)^{\#}(U) = \varinjlim C_{M,G}^q(\{U_i\}) \quad ,$$

wobei $C_{M,G}^q(\{U_i\}) = \{(\chi_i) \mid \chi_i \in C^q(U_i,G),\ \chi_i|U_i\cap U_j = \chi_j|U_i\cap U_j\}$ ist und der induktive Limes über alle Überdeckungen $\{U_i\}$ von U gebildet wird. Aus dieser Beschreibung der assoziierten Garbe erkennt man, daß der Kern des kanonischen Prägarbenhomomorphismus $\alpha : \overset{q}{C}_{M,G} \to (\overset{q}{C}_{M,G})^{\#}$ gleich $\overset{q}{C}_{o\,M,G}$ ist. Andererseits ist α surjektiv, denn ist $(\chi_i) \in \overset{q}{C}_{M,G}(\{U_i\})$ gegeben und setzen wir

$$\chi(x_o,\ldots,x_q) := \begin{cases} \chi_i(x_o,\ldots,x_q) & \exists\, i : x_k \in U_i \ , \ k = 0,\ldots,q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

so ist $\chi \in C^q(U,G)$ und $\alpha(\chi) = (\chi_i)$. Also ist $\overset{q}{\overline{C}}_{M,G}$ die zu $\overset{q}{C}_{M,G}$ assoziierte Garbe $\square$

<u>Definition :</u> Eine Garbe $\mathfrak{M}$ auf einem beliebigen semialgebraischen Raum M heißt welk, wenn sich jeder Schnitt über einer offenen semialgebraischen Teilmenge U von M zu einem globalen Schnitt von $\mathfrak{M}$ fortsetzen läßt, d.h., wenn $\mathfrak{M}(M) \to \mathfrak{M}(U)$ für alle offenen semialgebraischen Teilmengen U von M surjektiv ist.

Sei nun M wieder ein affiner Raum und $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C^q(M,G) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & C^q(U,G) \arrow[d] \\ \overline{C}^q(M,G) \arrow[r] & \overline{C}^q(U,G) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist und sich jede Abbildung $\chi : U^{q+1} \to G$ durch 0 zu einer Abbildung von M^{q+1} nach G fortsetzen läßt, ist die Garbe $\overset{q}{\overline{C}}_{M,G}$ welk.

Wir merken noch an, daß die Korandhomomorphismen der Komplexe $\overline{C}^*(U,G)$ Garbenhomomorphismen $\overline{C}^q_{M,G} \xrightarrow{\delta} \overline{C}^{q+1}_{M,G}$ induzieren.

<u>Lemma 6.2 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum. Dann bilden die Garben $\overline{C}^q_{M,G}$ der Alexander-Spanier-Koketten eine welke Auflösung der konstanten Garbe G_M. Ist $j : G_M \to \overline{C}^0_{M,G}$ der kanonische Homomorphismus, so ist also die Garbensequenz

$$0 \to G_M \xrightarrow{j} \overline{C}^0_{M,G} \xrightarrow{\delta} \overline{C}^1_{M,G} \xrightarrow{\delta} \overline{C}^2_{M,G} \xrightarrow{\delta} \overline{C}^3_{M,G} \to \ldots$$

exakt.

Beweis : Wir müssen nur noch zeigen, daß die Garbensequenz exakt ist. Ist $U \subseteq M$ offen, semialgebraisch und zusammenhängend und $g \in G_M(U) = G$, so ist $j(g)$ die durch g definierte auf U konstante Abbildung. Offensichtlich ist j injektiv. Sei nun $\chi \in C^0(U,G) = \overline{C}^0(U,G)$, und das Bild von χ unter δ sei 0. Dann gibt es eine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von U, so daß für alle $u,v \in U_i$, $i \in I$, $\chi(u) - \chi(v) = 0$ ist. Sei $u \in U$ beliebig gewählt. Die Menge $U(\chi,u) :=$ $\{v \in U \mid \chi(u) = \chi(v)\}$ ist eine Vereinigung von Mengen U_i der Überdeckung, also offen und semialgebraisch. $U(\chi,u)$ ist aber auch abgeschlossen, da U eine endliche disjunkte Vereinigung von Mengen dieses Typs ist. Da U zusammenhängend ist, ist deshalb $U = U(\chi,u)$. Also ist χ konstant und liegt im Bild von j.

Sei nun $q \geqslant 1$ und $\chi \in C^q(U,G)$ gegeben. Die Klasse $[\chi] \in \overline{C}^q(U,G)$ werde auf 0 abgebildet. Es gibt eine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von U, so daß $\delta\chi \in C^{q+1}(U,G)$ auf $\bigcup_{i\in I} U_i^{q+2}$ verschwindet. Wir definieren Koketten $\Psi_i \in C^{q-1}(U_i,G)$ mit $\delta\Psi_i = \chi|U_i$. Dann ist $[\chi]|U_i = \delta([\Psi_i])$, damit ist $[\chi]$ im Bild von $\overline{C}^{q-1}_{M,G} \to \overline{C}^{q}_{M,G}$ und die Behauptung ist gezeigt.

Wir wählen Punkte $y_i \in U_i$ und setzen

$\Psi_i(x_o,\ldots,x_{q-1}) := \chi(y_i,x_o,\ldots,x_{q-1})$ für $(x_o,\ldots,x_{q-1}) \in U_i^q$. Dann ist für alle $(x_o,\ldots,x_q) \in U_i^{q+1}$

$$\delta\Psi_i(x_o,\ldots,x_q) = \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \Psi_i(x_o,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_q) =$$
$$= \sum_{k=0}^{q} (-1)^k \chi(y_i,x_o,\ldots,\hat{x}_k,\ldots,x_q) = \chi(x_o,\ldots,x_q).$$

Das letzte Gleichheitszeichen ist richtig, da $\delta\chi$ auf U_i^{q+2} verschwindet □

Wir wollen nun kurz die Kohomologie welker Garben auf einem beliebigen semialgebraischen Raum untersuchen.

<u>Satz 6.3 :</u> Sei M ein semialgebraischer Raum und $0 \to \mathfrak{M}' \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{M}'' \to 0$ eine kurze exakte Folge abelscher Garben auf M . $\mathfrak{M}'$ sei welk. Dann ist für jede offene semialgebraische Teilmenge U von M die Folge

$$0 \to \mathfrak{M}'(U) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M}(U) \xrightarrow{\beta} \mathfrak{M}''(U) \to 0$$

exakt.

Beweis : Da der Schnittfunktor Γ_U linksexakt ist, ist nur zu zeigen, daß $\mathfrak{M}(U) \to \mathfrak{M}''(U)$ surjektiv ist. Sei $s \in \mathfrak{M}''(U)$. $\vartheta\mathfrak{M}$ sei das Prägarbenbild von $\mathfrak{M}$ unter ϑ, d.h. $\vartheta\mathfrak{M}(V) = \mathrm{Im}(\mathfrak{M}(V) \to \mathfrak{M}''(V))$. $\vartheta\mathfrak{M}$ ist eine separierte Prägarbe, deshalb ist schon $(\vartheta\mathfrak{M})^+$ die zu ihr assoziierte Garbe. Nach Voraussetzung ist $(\vartheta\mathfrak{M})^+ = \mathfrak{M}''$. Es gibt deshalb Überdeckungen $\{U_i\}_{i=1,..,n}$ von U mit folgender Eigenschaft: Es gibt Schnitte $t_i \in \mathfrak{M}(U_i)$ mit $\vartheta(t_i) = s|U_i$, $1 \leq i \leq n$. Da alle Überdeckungen endlich sind, gibt es in der Menge dieser Überdeckungen ein Element kleinster Länge. Wir müssen zeigen, daß dieses minimale Element die nur aus U selbst bestehende Überdeckung von U ist. Sei dazu $\{U_i\}_{i=1,...,n}$ eine Überdeckung von U und seien $t_i \in \mathfrak{M}(U_i)$ Schnitte mit $\vartheta(t_i) = s|U_i$. Es ist $\vartheta(t_1|U_1 \cap U_i - t_i|U_1 \cap U_i) = 0$, $1 \leq i \leq n$. Nach Voraussetzung gibt es Schnitte $r_i \in \mathfrak{M}'(U_1 \cap U_i)$ mit $\alpha(r_i) = t_1|U_1 \cap U_i - t_i|U_1 \cap U_i$. Da $\mathfrak{M}'$ welk ist, läßt sich r_i zu einem Schnitt q_i über U_i fortsetzen. Wir nehmen nun an, daß $n > 1$ ist. Da $t_i + \alpha(q_i) \mid U_1 \cap U_i = t_1 \mid U_1 \cap U_i$ ist, gibt es Schnitte t_i' von $\mathfrak{M}$ über $V_i := U_1 \cup U_i$ mit $t_i'|U_1 = t_1$ und $t_i'|U_i = t_i + \alpha(q_i)$, $2 \leq i \leq n$. Offenbar ist $\vartheta(t_i') = s|V_i$. Die Überdeckung $\{V_i\}$ besteht nur noch aus n-1 Mengen. Das minimale Element kann deshalb nur aus U selbst bestehen $\square$

Korollar 6.4 : Sei M ein semialgebraischer Raum und $0 \to \mathfrak{M}' \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{M} \xrightarrow{\vartheta} \mathfrak{M}'' \to 0$ eine exakte Folge abelscher Garben auf M.

Sind $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}$ welk, so ist auch $\mathfrak{M}''$ welk.

Beweis : Sei $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch, und sei $s \in \mathfrak{M}''(U)$. Nach Satz 6.3 gibt es ein $t \in \mathfrak{M}(U)$ mit $\vartheta(t) = s$. Da $\mathfrak{M}$ welk ist, läßt sich t zu einem Schnitt $r \in \mathfrak{M}(M)$ fortsetzen. Dann ist $\vartheta(r) \in \mathfrak{M}''(M)$ und $s = \vartheta(r)|U$. Also ist $\mathfrak{M}''$ welk $\square$

Satz 6.5 : Sei M ein semialgebraischer Raum und

$0 \to \mathfrak{M}^0 \to \mathfrak{M}^1 \to \mathfrak{M}^2 \to \mathfrak{M}^3 \to \dots$

eine exakte Folge welker abelscher Garben auf M. Dann ist für jede offene semialgebraische Teilmenge U von M die Folge

$0 \to \mathfrak{M}^0(U) \to \mathfrak{M}^1(U) \to \mathfrak{M}^2(U) \to \mathfrak{M}^3(U) \to \dots$

exakt.

Beweis : Sei $\mathfrak{N}^p$ der Kern des Garbenhomomorphismus $\mathfrak{M}^p \to \mathfrak{M}^{p+1}$. Da $0 \to \mathfrak{N}^p \to \mathfrak{M}^p \to \mathfrak{N}^{p+1} \to 0$ für alle $p \geqslant 0$ exakt und $\mathfrak{N}^0 = 0$ ist, folgt induktiv mit Korollar 6.4, daß $\mathfrak{N}^p$ für alle $p \geqslant 0$ welk ist. Nach Satz 6.3 ist deshalb $0 \to \mathfrak{N}^p(U) \to \mathfrak{M}^p(U) \to \mathfrak{N}^{p+1}(U) \to 0$ exakt, was zu zeigen war $\square$

Um aus Satz 6.5 eine wichtige Folgerung ziehen zu können, benötigen wir

Lemma 6.6 : Sei M ein semialgebraischer Raum, U eine offene semialgebraische Teilmenge von M und $\mathfrak{J}$ eine Garbe auf M. $j : U \to M$ sei die Inklusion.

Dann sind die Homomorphismen

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_M, \mathfrak{J}) &\to \mathfrak{J}(M) \\ \chi &\mapsto \chi(1) \qquad 1 = (1,\ldots,1) \in \prod_{\pi_0(M)} \mathbb{Z} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(j_! \mathbb{Z}_U, \mathfrak{J}) &\to \mathfrak{J}(U) \\ \Psi &\mapsto \Psi(1) \qquad 1 = (1,\ldots,1) \in \prod_{\pi_0(U)} \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Isomorphismen.

Beweis : Die erste Aussage ist trivial. Die zweite Aussage ist richtig, da j^* der zu $j_!$ linksadjungierte Funktor ist, d.h. die Abbildung

$\operatorname{Hom}(j_! Z_U, \mathfrak{J}) \to \operatorname{Hom}(Z_U, \mathfrak{J}|U)$, $\Psi \mapsto \Psi|U$

ist ein Isomorphismus. Dies folgt leicht aus der Definition von $j_!$ wie im Fall gewöhnlicher topologischer Räume □

Ebenfalls wohlbekannt im Fall topologischer Räume ist

Lemma 6.7 : Sei M ein semialgebraischer Raum. Dann ist jede injektive abelsche Garbe auf M welk.

Beweis : Sei $\mathfrak{M}$ eine injektive abelsche Garbe auf M und

$U \subseteq M$ offen und semialgebraisch. $j: U \to M$ und $i : M - U \to M$ seien die Inklusionen. Nach Satz 4.3 haben wir eine exakte Sequenz

$$0 \to j_! \mathbb{Z}_U \to \mathbb{Z}_M \to i_* \mathbb{Z}_{M-U} \to 0 \, .$$

Da $\mathfrak{M}$ injektiv ist, ist dann die Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}(i_* \mathbb{Z}_{M-U}, \mathfrak{M}) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_M, \mathfrak{M}) \to \mathrm{Hom}(j_! \mathbb{Z}_U, \mathfrak{M}) \to 0$$

exakt. Andererseits ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\chi \arrow[d, maps to] & \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_M, \mathfrak{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(j_! \mathbb{Z}_U, \mathfrak{M}) \arrow[d] & \Psi \arrow[d, maps to] \\
\chi(1) & \mathfrak{M}(M) \arrow[r] & \mathfrak{M}(U) & \Psi(1)
\end{tikzcd}$$

kommutativ, und die vertikalen Pfeile sind Isomorphismen (Lemma 6.6). $\mathfrak{M}$ ist also welk $\square$

Wir können nun aus Satz 6.5 eine wichtige Folgerung ziehen.

<u>Korollar 6.8 :</u> M sei ein semialgebraischer Raum. Dann ist jede welke Garbe $\mathfrak{M}$ auf M azyklisch, d.h. $H^q(M, \mathfrak{M}) = 0$ für alle $q > 0$.

Beweis : Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 6.5, Lemma 6.7 und der Definition der Kohomologiegruppen $\square$

Da man allgemein zur Bestimmung der Kohomologie mit Koeffizienten in einer abelschen Garbe $\mathfrak{F}$ azyklische Auflösungen verwenden kann (vgl. [T] I.3.5; [GR]), folgt insbesondere, daß wir die Kohomologie mit welken Auflösungen berechnen können.

Ist M ein affiner semialgebraischer Raum, so wird nach Lemma 6.2 durch die Garben $\overline{C}^q_{M,G}$ der Alexander-Spanier-Koketten eine welke Auflösung der konstanten Garbe G_M gegeben. Wir erhalten also

<u>Theorem 6.9 :</u> Sei M ein affiner semialgebraischer Raum. Dann ist die Grothendieck-Kohomologie von M mit Koeffizienten in einer konstanten Garbe G_M gleich der Alexander-Spanier-Kohomologie von M mit Koeffizienten in G, d.h.

$$H^q(M,G_M) = \overline{H}^q(M,G) \quad \text{für alle } q \geqslant 0.$$

Wir verwenden im folgenden die Terminologie des Buches von Spanier ([S]).

Für spätere Anwendungen sollen auch noch die relativen Kohomologiegruppen erklärt werden.

M sei wie immer ein affiner semialgebraischer Raum und A eine semialgebraische Teilmenge von M.

Wir haben einen kanonischen und offenbar surjektiven Homomorphismus von Kokettenkomplexen $\overline{C}^*(M,G) \to \overline{C}^*(A,G)$, der durch die Restriktion gegeben ist. Den Kern $\overline{C}^*(M,A,G)$ dieses Homomorphismus bezeichnen wir als den

Komplex der <u>relativen Alexander-Spanier-Koketten von M mod A</u> mit Koeffizienten in G, seine Kohomologiegruppen $\overline{H}^q(M,A,G)$ als die <u>relative Kohomologie von M mod A.</u>

Ist $C^*(M,A,G)$ der Unterkokettenkomplex von $C^*(M,G)$ der Funktionen, die lokal auf A verschwinden, so ist

$\overline{C}^*(M,A,G) = C^*(M,A,G)/C_o^*(M,G)$.

Sei $B \subseteq N$ ein weiteres Paar affiner semialgebraischer Räume (,d.h., B ist eine semialgebraische Teilmenge von N) und $f : (M,A) \to (N,B)$ eine semialgebraische Abbildung (,d.h., f ist eine semialgebraische Abbildung $M \to N$ mit $f(A) \subseteq B$). f induziert einen kanonischen Homomorphismus $\overline{C}^*(N,B,G) \to \overline{C}^*(M,A,G)$ und damit Homomorphismen $f^*: \overline{H}^q(N,B,G) \to \overline{H}^q(M,A,G)$ in der Kohomologie. All diese Homomorphismen sind in G funktoriell.

Zu jedem Paar $A \subseteq M$, erhält man, funktoriell in (M,A), eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \overline{H}^q(M,A,G) \to \overline{H}^q(M,G) \to \overline{H}^q(A,G) \to \overline{H}^{q+1}(M,A,G) \to \ldots .$$

Derselbe Beweis wie in [S] (6.4.4) liefert

<u>Satz 6.10 :</u> Sei U eine semialgebraische Teilmenge von $A \subseteq M$. U habe eine offene semialgebraische Umgebung W in M, deren Abschluß $\overline{W}$ im Innern $\mathrm{Int}_M A$ von A enthalten ist. Dann induziert die Inklusion $i: (M-U,A-U) \to (M,A)$ einen

Isomorphismus $\overline{C}^*(M,A,G) \xrightarrow{\sim} \overline{C}^*(M-U,A-U,G)$. Insbesondere ist für alle $q \geq 0$ $i^*: \overline{H}^q(M-U,A-U,G) \to \overline{H}^q(M,A,G)$ ein Isomorphismus.

Man kann in der Alexander-Spanier-Kohomologie also ausschneiden. Im nächsten Abschnitt werden wir das Homotopieaxiom beweisen. Die Alexander-Spanier-Kohomologie ist demnach eine "Kohomologietheorie" auf der Kategorie der Paare affiner semialgebraischer Räume.

Wir wollen nun die relativen Kohomologiegruppen noch etwas anders beschreiben.

Sei A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge eines affinen semialgebraischen Raums M. $i: A \to M$ und $j: M - A \to M$ seien die Inklusionen. Dann ist $i^* G_M = G_A$ und der Adjunktionsmorphismus $G_M \to i_* i^* G_M = i_* G_A$ ist surjektiv. Der Kern $G_{M,A}$ von $G_M \to i_* G_A$ ist $j_! G_{M-A}$, die durch 0 fortgesetzte konstante Garbe G_{M-A} (Satz 4.3). Es ist $G_{M,A}(V) = \prod_{\pi_0(V,A\cap V)} G$, wobei $\pi_0(V,A\cap V)$ die Menge der Komponenten von V ist, die A nicht treffen.

Wir erhalten das folgende Diagramm von Garben, in dem alle Rechtecke kommutieren. (Die Koeffizientengruppe G lassen wir bei unseren Bezeichnungen ab jetzt meist weg).

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & G_{M,A} \arrow[r] \arrow[d] & G_M \arrow[r] \arrow[d] & i_* G_A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{C}^0_{M,A} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{C}^0_M \arrow[r] \arrow[d] & i_* \overline{C}^0_A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{C}^1_{M,A} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{C}^1_M \arrow[r] \arrow[d] & i_* \overline{C}^1_A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

$\overline{C}^q_{M,A}$ sei dabei als Kern von $\overline{C}^q_M \to i_* \overline{C}^q_A$ definiert. (Die oben definierte Gruppe $\overline{C}^q(M,A,G)$ ist die Gruppe der globalen Schnitte von $\overline{C}^q_{M,A}$).

Dann sind alle Zeilen exakt, ebenso die mittlere und die rechte Spalte (Lemma 6.2, Satz 4.3). Hieraus folgt, daß auch die linke Spalte exakt ist. (Ist A in M nicht abgeschlossen, so wissen wir i.a. nicht, ob $G_M \to i_* G_A$ surjektiv und die rechte Spalte exakt ist. Nur dann ist aber die linke Spalte eine Auflösung.)

<u>Hilfssatz :</u> $\overline{C}^q_{M,A}$ ist azyklisch.

Beweis : Die Zeilen des Diagramms sind exakt. Wir erhalten deshalb eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to \overline{C}^q(M,A) \to \overline{C}^q(M) \to \overline{C}^q(A) \to H^1(M,\overline{C}^q_{M,A}) \to H^1(M,\overline{C}^q_M) \to \dots$$

$$\dots \to H^{n-1}(M,i_*\overline{C}^q_A) \to H^n(M,\overline{C}^q_{M,A}) \to H^n(M,\overline{C}^q_M) \to \dots$$

Da $\overline{C}^q(M) \to \overline{C}^q(A)$ surjektiv ist und sowohl $\overline{C}^q_M$ als auch $i_*\overline{C}^q_A$ welk ist, folgt die Behauptung □

Wir erhalten folgende Verallgemeinerung von Theorem 6.9 :

Theorem 6.11 : Sei A eine abgeschlossene semialgebraische Teilmenge des affinen semialgebraischen Raums M. Dann ist die Grothendieck-Kohomologie $H^q(M, G_{M,A})$ gleich der relativen Alexander-Spanier-Kohomologie $\overline{H}^q(M,A,G)$ (für alle $q \geqslant 0$).

Seien nun M und N beliebige semialgebraische Räume und $f : M \to N$ eine semialgebraische Abbildung. $\mathcal{G}$ sei eine abelsche Garbe auf N. Die Leraysche Spektralsequenz zu f ([T] I.3.7.6; [A] II.4.11)
$E_2^{pq} = H^p(N, R^q f_*(f^*\mathcal{G})) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(M, f^*\mathcal{G})$
liefert die in $\mathcal{G}$ funktoriellen Eckenmorphismen $H^p(N, f_* f^*\mathcal{G}) \to H^p(M, f^*\mathcal{G})$. Der Adjunktionsmorphismus $\mathcal{G} \to f_* f^*\mathcal{G}$ induziert funktorielle Homomorphismen $H^p(N,\mathcal{G}) \to H^p(N, f_* f^*\mathcal{G})$. Durch Komposition erhalten wir die Homomorphismen $H^p(N,\mathcal{G}) \to H^p(M, f^*\mathcal{G})$

Seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ wieder Paare affiner semialgebraischer Räume. A und B seien abgeschlossen in M bzw. N. $f : (M,A) \to (N,B)$ sei eine semialgebraische Abbildung. $f^*G_{N,B}$ ist die zur Prägarbe $f^{\bullet}G_{N,B}$ assoziierte Garbe (vgl. § 4). Ist $U \subseteq M$ offen, semialgebraisch und zusammenhängend, so ist $f^{\bullet}G_{N,B}(U) = G$, falls eine Umgebung V von f(U) in N existiert mit $V \cap B = \emptyset$, sonst ist

$f^{\cdot}G_{N,B}(U) = 0$. Insbesondere ist für $U \cap A \neq \emptyset$ auch $f(U) \cap B \neq \emptyset$ und damit $f^{\cdot}G_{N,B}(U) = 0$.

Wir erhalten deshalb einen Garbenhomomorphismus $f^{*}G_{N,B} \to G_{M,A}$, der Homomorphismen $H^p(M,f^{*}G_{N,B}) \to H^p(M,G_{M,A})$ induziert.

Die Homomorphismen $f^{*} : \overline{H}^p(N,B,G) \to \overline{H}^p(M,A,G)$ ergeben sich nun auch folgendermaßen :

$H^p(N,G_{N,B}) \to H^p(M,f^{*}G_{N,B}) \to H^p(M,G_{M,A})$.

Um dies einzusehen, muß man sich die explizite Gestalt der Eckenmorphismen in

i) der Lerayschen Spektralsequenz zu f,

ii) der Spektralsequenz, die die Alexander-Spanier-Kohomologie $\overline{H}^q(M,A,G)$ mit der Grothendieck-Kohomologie $H^q(M,G_{M,A})$ verknüpft,

verschaffen (man vgl. [G], II, 4.5 - 4.7, 4.17).

Da ich diese Interpretation der Morphismen f^{*} nicht weiter benötige, führe ich dies nicht näher aus.

Schließlich sei noch angemerkt, daß wir die Alexander-Spanier-Kohomologie auf diesselbe Weise auch für nicht-affine semialgebraische Räume M hätten definieren können. Allerdings wissen wir in diesem Fall nicht, ob $\overline{C}^q_{M,G}$ eine Garbe auf M ist, d.h., wir können die Grothendieck-Kohomologie mit Koeffizienten in einer konstanten Garbe nicht so einfach als Alexander-Spanier-Kohomologie interpretieren. Die Alexander-Spanier-Kohomologie dient uns als wesentliches Hilfsmittel beim Beweis der Homotopieinvarianz der Kohomologie im nächsten Abschnitt. Dieser gelingt uns auch nur im affinen Fall. Ich habe mich deshalb bei der Definition auf affine semialgebraische Räume beschränkt.

Beim Beweis des Homotopieaxioms benötigen wir eine weitere Interpretation der relativen Kohomologiegruppen $\overline{H}^q(M,A,G)$ eines Paares $A \subseteq M$ affiner semialgebraischer Räume. Wir betrachten Paare $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$, wobei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ eine Überdeckung von M in der semialgebraischen Topologie und $\mathfrak{U}' = \{U_i\}_{i\in J}$, $J \subseteq I$, eine Teilfamilie von $\mathfrak{U}$ ist, die A überdeckt (,d.h., es ist $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$). So ein Paar $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ heiße eine Überdeckung von (M,A). $M(\mathfrak{U})$ sei der abstrakte simpliziale Komplex (§ 2 , [S] 3.1), dessen Ecken die Punkte von M und dessen Simplizes alle endlichen Teilmengen von M, die in einer Menge U_i der Überdeckung $\mathfrak{U}$ enthalten sind, sind. $A(\mathfrak{U}')$ sei der abstrakte simpliziale Komplex, dessen Ecken die Punkte von A und dessen Simplizes die in einer Menge von $\mathfrak{U}'$ liegenden endlichen Teilmengen von A sind. $A(\mathfrak{U}')$ ist offenbar ein Unterkomplex von $M(\mathfrak{U})$.

$C_*(\mathfrak{U})$ und $C_*'(\mathfrak{U}')$ seien die zu $M(\mathfrak{U})$ bzw. $A(\mathfrak{U}')$ gehörenden geordneten Kettenkomplexe, d.h., $C_q(\mathfrak{U})$ bzw. $C'_q(\mathfrak{U}')$ sei die von den geordneten q-Simplizes erzeugte freie abelsche Gruppe ([S], 4.3).

$C^*(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ sei der zu dem Paar $(C_*(\mathfrak{U}), C'_*(\mathfrak{U}'))$ gehörende Kokettenkomplex mit Koeffizienten in G, d.h.

$C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{U}') = \left\{ \chi \in \mathrm{Hom}(C_q(\mathfrak{U}),G) \;\middle|\; \chi \mid C'_q(\mathfrak{U}') = 0 \right\}$.

Ist $(\mathfrak{V},\mathfrak{V}')$ eine Verfeinerung von $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$, d.h., ist $\mathfrak{V}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ im üblichen Sinn und jede Menge aus $\mathfrak{V}'$ in einer von $\mathfrak{U}'$ enthalten, so erhalten wir durch Restriktion eine Kokettenabbildung $C^*(\mathfrak{U},\mathfrak{U}') \to C^*(\mathfrak{V},\mathfrak{V}')$.

Die Kokettenkomplexe $C^*(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ bilden, wenn $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ die Überdeckungen von (M,A) durchläuft, ein induktives System, dessen induktiver Limes wieder ein Kokettenkomplex ist.

Ist $\chi \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, $\mathfrak{U}' = \{U_i\}_{i\in J}$, $J \subseteq I$, so ist χ insbesondere eine Abbildung $\bigcup\limits_{i\in I} U_i^{q+1} \to G$, die wir durch 0 auf ganz M zu einer Alexander-Spanier-Kokette $\chi' \in C^q(M)$ fortsetzen können. Da $\chi' \mid \bigcup\limits_{i\in J} (A \cap U_i)^{q+1} = 0$ ist, ist χ' sogar ein Element in $C^q(M,A)$.

Sei umgekehrt $\Psi \in C^q(M,A)$. Ψ verschwindet lokal auf A. Da die semialgebraische Topologie auf A durch die auf M induziert wird (Theorem 2.8), gibt es eine Überdeckung von A durch offene semialgebraische Teilmengen U_i, $i \in J$, von M, so daß $\Psi \mid (\bigcup\limits_{i\in J} U_i^{q+1}) \cap A^{q+1} = 0$ ist. Sei

$\mathfrak{U} = \{ M, U_i, i \in J \}$ und $\mathfrak{U}' = \{ U_i, i \in J \}$. Dann definiert Ψ ein Element Ψ' von $C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$.

Wir erhalten auf diese Weise für alle $q \geqslant 0$ einen Homomorphismus

$$\rho : C^q(M,A) \to \varinjlim_{(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')} C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{U}') .$$

Diese Homomorphismen vertauschen mit den Korandabbildungen.

Die vorangegangenen Überlegungen zeigen (man vgl. auch [S] 6.5.1)

<u>Lemma 6.11 :</u> ρ induziert einen Isomorphismus von Kokettenkomplexen

$$\overline{\rho} : \overline{C}^*(M,A,G) = C^*(M,A,G)/C_o^*(M,G) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')} C^*(\mathfrak{U},\mathfrak{U}') .$$

Dieser ist in der Koeffizientengruppe G funktoriell.

Da der Kohomologiefunktor auf der Kategorie der Kokettenkomplexe mit induktiven Limites vertauscht ([S] 4.1.7), erhalten wir

<u>Korollar 6.12 :</u> $\overline{\rho}$ induziert für alle $q \geqslant 0$ in G funktorielle Isomorphismen

$$\overline{H}^q(M,A,G) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')} H^q(C^*(\mathfrak{U},\mathfrak{U}'),G) .$$

§ 7 Das Homotopieaxiom

Wir betrachten Paare affiner semialgebraischer Räume und werden zeigen, daß, wie in der klassischen Kohomologietheorie topologischer Räume, homotope Abbildungen dieselben Homomorphismen in der Kohomologie induzieren. Der Beweisgang ist dem in [S], 6.5, ähnlich. Allerdings können alle dort vorkommenden, auf der Kompaktheit des Einheitsintervalls beruhenden Schlüsse nicht verwendet werden. Ebenso können wir, wenn der reell-abgeschlossene Grundkörper R nicht archimedisch ist, das Einheitsintervall durch baryzentrische Unterteilung nicht in beliebig kleine Teile zerlegen. Unsere Argumente sind deshalb "weniger linear", sie beruhen auf einer sorgfältigen Untersuchung der Nullstellen eines Systems von Polynomen. Die Beweise gestalten sich dadurch komplizierter als im klassischen Fall.

Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Kohomologie mit Koeffizienten in einer festen abelschen Gruppe G und werden G in unseren Bezeichnungen häufig weglassen.

Seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ zwei Paare affiner semialgebraischer Räume, und $f : (M,A) \to (N,B)$ sei eine semialgebraische Abbildung. Wie im § 6 bemerkt, induziert f einen Homomorphismus $f' : \overline{C}^*(N,B,G) \to \overline{C}^*(M,A,G)$ von Kokettenkomplexen und damit für alle $q \geqslant 0$ Homomorphismen

$$f^* : \bar{H}^q(N,B,G) \to \bar{H}^q(M,A,G) \quad .$$

Definition 1 :

i) Zwei semialgebraische Abbildungen f_0 und f_1 von (M,A) nach (N,B) heißen (semialgebraisch) homotop, wenn es eine semialgebraische Abbildung $H : (M \times [0,1],\ A \times [0,1]) \to (N,B)$ mit $f_0(x) = H(x,0)$ und $f_1(x) = H(x,1)$ für alle $x \in M$ gibt.

ii) (M,A) und (N,B) heißen (semialgebraisch) homotopieäquivalent, wenn es semialgebraische Abbildungen $f : (M,A) \to (N,B)$ und $g : (N,B) \to (M,A)$ gibt, so daß $f \circ g$ und $g \circ f$ homotop zur Identität sind.

iii) Ein semialgebraischer Raum, der homotopieäquivalent zu einem Punkt ist, heißt zusammenziehbar.

Theorem 7.1 : $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ seien Paare affiner semialgebraischer Räume. f_0 und f_1 seien homotope semialgebraische Abbildungen von (M,A) nach (N,B).
Dann induzieren f_0 und f_1 für alle $p \geqslant 0$ denselben Homomorphismus in der Kohomologie :

$$f_0^* = f_1^* \quad : \bar{H}^p(N,B,G) \to \bar{H}^p(M,A,G) \quad .$$

Offenbar genügt es, Theorem 7.1 für den Spezialfall

$f_0 = i_o$ und $f_1 = i_1$ zu beweisen, wobei i_o, i_1 die folgenden Abbildungen $(M,A) \to (M \times [0,1], A \times [0,1])$ sind :

$i_o(x) := (x,0) \quad , \qquad i_1(x) := (x,1) \quad .$

I bezeichne immer das Einheitsintervall $[0,1]$ in R .

Zum Beweis von Theorem 7.1 genügt es, folgenden Satz zu zeigen.

Satz 7.2 : Sei $(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')$ eine Überdeckung von $(M \times I, A \times I)$. Dann gibt es eine Überdeckung $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}')$ von (M,A) mit folgenden Eigenschaften :

i) Zu jedem $V \in \mathfrak{B}$ gibt es U_o, $U_1 \in \mathfrak{U}$ mit $i_o(V) \subseteq U_o$ und $i_1(V) \subseteq U_1$.

ii) Zu jedem $V' \in \mathfrak{B}'$ gibt es U_o', $U_1' \in \mathfrak{U}'$ mit $i_o(V') \subseteq U_o'$ und $i_1(V') \subseteq U_1'$.

iii) i_o und i_1 induzieren kettenhomotope Kettenabbildungen $(C_*(\mathfrak{B}), C_*(\mathfrak{B}')) \to (C_*(\mathfrak{U}), C_*(\mathfrak{U}'))$.

Wir erhalten Theorem 7.1 wie folgt aus Satz 7.2 :

Es ist

$$\overline{H}^p(M \times I, A \times I, G) = \varinjlim_{\substack{(\mathfrak{U},\mathfrak{U}') \text{ Überdeckung} \\ \text{von } (M \times I, A \times I)}} H^p(C^*(\mathfrak{U},\mathfrak{U}'))$$

und

$$\overline{H}^p(M,A,G) = \varinjlim_{\substack{(\mathfrak{B},\mathfrak{B}') \text{ Überdeckung} \\ \text{von } (M,A)}} H^p(C^*(\mathfrak{B},\mathfrak{B}'))$$

(Korollar 6.12) .

i_o und i_1 induzieren nach Satz 7.2 kokettenhomotope Abbildungen $C^*(\mathfrak{U},\mathfrak{U}') \to C^*(\mathfrak{B},\mathfrak{B}')$ und damit diesselben Abbildungen $H^p(C^*(\mathfrak{U},\mathfrak{U}')) \to H^p(C^*(\mathfrak{B},\mathfrak{B}'))$. Es folgt, daß

$i_o^* = i_1^* \quad : \quad \overline{H}^p(M \times I, A \times I, G) \to \overline{H}^p(M,A,G) \quad \square$

Im Beweis von Satz 7.2 benützen wir die am Ende von § 6 eingeführten Bezeichnungen etwas allgemeiner :

Ist N eine Menge und $\mathfrak{W}$ eine endliche Überdeckung von N durch <u>beliebige</u> Teilmengen, so sei $N(\mathfrak{W})$ der abstrakte simpliziale Komplex, dessen Ecken die Elemente von N und dessen Simplizes die endlichen Teilmengen von N sind, die in einer Menge der Überdeckung $\mathfrak{W}$ enthalten sind. $C_*(\mathfrak{W})$ sei der zu $N(\mathfrak{W})$ gehörende geordnete Kettenkomplex.

Zur Unterscheidung bezeichnen wir im Beweis von Satz 7.2 endliche Überdeckungen durch beliebige Teilmengen einfach als Überdeckungen, Überdeckungen in der semialgebraischen Topologie, d.h. Überdeckungen eines semialgebraischen Raums durch endlich viele offene semialgebraische Teilmengen, nennen wir <u>offene</u> Überdeckungen.

Beweis von Satz 7.2 :

Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß M eine beschränkte semialgebraische Teilmenge von R^n ist. Dann ist

$M \times I = \{ (x,t) \in R^n \times R = R^{n+1} \mid x \in M, 0 \leq t \leq 1 \}$.

$\pi : R^{n+1} \to R^n$, $(x_1,\dots,x_{n+1}) \mapsto (x_1,\dots,x_n)$ sei die Projektion auf die ersten n Koordinaten.

Wir benötigen den entscheidenden

<u>Hilfssatz 1</u> : Es gibt eine offene Überdeckung $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}')$ von (M,A) , $\mathfrak{B} = \{V_i\}_{i=1,\dots,m}$, und Überdeckungen $\mathfrak{B}_i = \{V_{ij}\}_{j=1,\dots,m_i}$ von $V_i \times I$ mit folgenden Eigenschaften :

i) $\pi(V_{ij}) = V_i$ für $j = 1, \dots , m_i$.

ii) Für $1 \leqslant j < m_i$ ist $(\bigcup\limits_{k=1}^{j} V_{ik}) \cap V_{ij+1} = V_{ij} \cap V_{ij+1}$.

iii) $\pi(V_{ij} \cap V_{ij+1}) = V_i$ für $1 \leqslant j < m_i$.

iv) Ist $V_i \cap V_{i'} \neq \emptyset$, so gilt entweder a) oder b) :

a) Für jedes $j = 1,\dots, m_i$ gibt es ein j', $1 \leqslant j' \leqslant m_{i'}$, mit $V_{ij} \cap \pi^{-1}(V_i \cap V_{i'}) \subseteq V_{i'j'}$.

b) Für jedes $j' = 1,\dots,m_{i'}$ gibt es ein j, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, mit $V_{i'j'} \cap \pi^{-1}(V_i \cap V_{i'}) \subseteq V_{ij}$.

v) $V_i \times \{0\} \subseteq V_{i1}$, $V_i \times \{1\} \subseteq V_{im_i}$.

vi) Ist $V_i \in \mathfrak{B}'$, so liegt jede Menge V_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, in einer Menge von $\mathfrak{U}'$. Alle Mengen V_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m_i$, sind in einer Menge der offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ enthalten.

Bevor wir Hilfssatz 1 beweisen, wollen wir sehen, wie aus ihm Satz 7.2 folgt :

i) und ii) folgen unmittelbar aus Hilfssatz 1, v), vi) .

$\underline{C}$ sei die Kategorie, deren Objekte die abstrakten simplizialen Unterkomplexe von $M(\mathfrak{B})$ und deren Morphismen die Inklusionen sind.

Wir definieren zwei Funktoren G, G' auf $\underline{C}$.

1) G : Jedem Unterkomplex K von $M(\mathfrak{B})$ ordnen wir den zugehörigen geordneten Kettenkomplex als $G(K)$ zu.

2) G' : Zu jedem q-Simplex $s = \{s_o, \dots, s_q\}$ von $M(\mathfrak{B})$ wählen wir einen Index $i(s)$, $1 \leqslant i(s) \leqslant m$, mit $s \subseteq V_{i(s)}$. Ist s schon ein Simplex von $A(\mathfrak{B}')$, so wählen wir den Index $i(s)$ so, daß $V_{i(s)} \in \mathfrak{B}'$ ist. $\mathfrak{U}(s)$ sei die aus folgenden semialgebraischen Mengen bestehende Überdeckung von $s \times I$:

$(s \times I) \cap V_{i(s)j}$, $1 \leqslant j \leqslant m_{i(s)}$.

Zu jedem Unterkomplex K von $M(\mathfrak{B})$ bilden wir den folgenden simplizialen Unterkomplex K' von $M \times I\ (\mathfrak{U})$:

$$K' = \bigcup_{s \in K} s \times I(\mathfrak{U}(s)) .$$

Die Eckenmenge $E(K')$ ist $\bigcup\limits_{\substack{s \text{ Simplex} \\ \text{von } K}} s \times I$, die Simplizes von K' sind die endlichen Teilmengen von $M \times I$, die für einen Simplex s von K in einer Menge der Überdeckung $\mathfrak{U}(s)$ enthalten sind.

$G'(K)$ sei der geordnete Kettenkomplex von K' .

Da die geordneten Kettenkomplexe abstrakter simplizialer Komplexe in natürlicher Weise augmentiert sind, sind G

und G' kovariante Funktoren von $\underline{C}$ in die Kategorie der augmentierten Kettenkomplexe.

Wir merken an, daß $G(A(\mathfrak{B}')) \subseteq G(M(\mathfrak{B}))$ und $G'(A(\mathfrak{B}')) \subseteq G'(M(\mathfrak{B}))$ nach Konstruktion Paare von Unterkettenkomplexen von $C_*^!(\mathfrak{U}') \subseteq C_*(\mathfrak{U})$ sind (Hilfssatz 1 vi)). Außerdem ist nach Definition $G(A(\mathfrak{B}')) = C_*^!(\mathfrak{B}')$ und $G(M(\mathfrak{B})) = C_*(\mathfrak{B})$.

s sei ein Simplex von $M(\mathfrak{B})$. Mit $\overline{s}$ bezeichnen wir den kleinsten simplizialen Unterkomplex von $M(\mathfrak{B})$, der s als Simplex enthält. $\overline{s}$ ist das System der nichtleeren Teilmengen von s.

$\mathfrak{M} = \left\{ \overline{s} \mid s \text{ Simplex von } M(\mathfrak{B}) \right\}$ sei die Menge all dieser Unterkomplexe. Dann ist G, d.h. jede Komponente G_q, $q \geqslant 0$, von G frei mit Modellen $\mathfrak{M}$. Als Basiselemente von G_q kann man nämlich die Tupel $(t_o,\dots,t_q) \in G_q(\overline{s})$, $\{t_o,\dots,t_q\} = s = \{s_o,\dots,s_r\}$, s Simplex von $M(\mathfrak{B})$, wählen. Der Funktor G' ist azyklisch auf $\underline{C}$ mit Modellen $\mathfrak{M}$, d.h., für alle $\overline{s} \in \mathfrak{M}$ hat der zu $G'(\overline{s})$ gehörende reduzierte Kettenkomplex verschwindende Homologie. Dies folgt aus Hilfssatz 3, den wir weiter unten beweisen.

i_o und i_1 induzieren die folgenden Kettenabbildungen

$i_{o*}, i_{1*} : (C_*(\mathfrak{B}), C_*^!(\mathfrak{B}')) \to (C_*(\mathfrak{U}), C_*^!(\mathfrak{U}'))$:

Für einen geordneten q-Simplex $(s_o,\dots,s_q) \in C_q(\mathfrak{B})$ ist

$i_{o*}((s_o,\dots,s_q)) = ((s_o,0),\dots,(s_q,0))$ und

$i_{1*}((s_o,\dots,s_q)) = ((s_o,1),\dots,(s_q,1))$.

Aus Hilfssatz 1 vi) und der Definition von G' folgt, daß für alle Unterkomplexe K von $M(\mathfrak{B})$ i_{o*} und i_{1*} den Unterkettenkomplex $G(K)$ von $C_*(\mathfrak{B})$ nach $G'(K)$ abbilden. Genauer: Durch i_{o*} und i_{1*} werden funktorielle Kettenabbildungen von G nach G' gegeben. Diese erhalten trivialerweise die Augmentation. Da G frei und G' azyklisch ist, gibt es deshalb eine natürliche Kettenhomotopie D von i_{o*} nach i_{1*} ([S] 4.3.3). Für jeden simplizialen Unterkomplex K von $M(\mathfrak{B})$ erhalten wir ein kommutatives Diagramm :

$$\begin{array}{ccccc}
C_*(\mathfrak{B}) = & G(M(\mathfrak{B})) & \xrightarrow{D(M(\mathfrak{B}))} & G'(M(\mathfrak{B})) & \subseteq C_*(\mathfrak{U}) \\
& \cup\!| & & \cup\!| & \\
& G(K) & \xrightarrow{D(K)} & G'(K) &
\end{array}$$

$D(K) = D(M(\mathfrak{B}))|G(K)$ ist eine Kettenhomotopie von $i_{o*}|G(K)$ nach $i_{1*}|G(K)$. Für $K = A(\mathfrak{B}')$ erhalten wir speziell (mit der Abkürzung $D = D(M(\mathfrak{B}))$) :

$$\begin{array}{ccccc}
C_*(\mathfrak{B}) & \xrightarrow{D} & G'(M(\mathfrak{B})) & \subseteq & C_*(\mathfrak{U}) \\
\cup\!| & & \cup\!| & & \cup\!| \\
C'_*(\mathfrak{B}') & \xrightarrow{D} & G'(A(\mathfrak{B}')) & \subseteq & C'_*(\mathfrak{U}')
\end{array}$$

Durch D wird also eine Kettenhomotopie zwischen i_{o*} und $i_{1*} : (C_*(\mathfrak{B}), C'_*(\mathfrak{B}')) \to (C_*(\mathfrak{U}), C'_*(\mathfrak{U}'))$ gegeben, und Satz 7.2 ist bis auf die Hilfssätze bewiesen.

<u>Hilfssatz 2 :</u> Sei V_i eine Menge der Überdeckung $\mathfrak{B}$ aus Hilfssatz 1 und Y eine nichtleere Teilmenge von V_i. $\mathfrak{B}_i = \{V_{ij}\}_{j=1,\dots,m_i}$ sei die Überdeckung von $V_i \times I$ aus Hilfssatz 1. $\mathfrak{U}_Y$ sei die Überdeckung $\mathfrak{B}_i \cap (Y \times I) :=$ $\{V_{ij} \cap (Y \times I)\}_{j=1,\dots,m_i}$ von $Y \times I$.
Dann ist der zu $C_*(\mathfrak{U}_Y)$ gehörende reduzierte Kettenkomplex azyklisch.

Beweis : Wir setzen für $1 \leqslant j < m_i$ $W_j := V_{ij} \cap V_{ij+1}$. Nach Eigenschaft ii), Hilfssatz 1, ist $W_j = (\bigcup_{k=1}^{j} V_{ij}) \cap V_{ij+1}$. L_j sei der abstrakte simpliziale Komplex der endlichen Teilmengen von $W_j \cap (Y \times I)$, K_j der der endlichen Teilmengen von $V_{ij} \cap (Y \times I)$. Da $\pi(W_j) = V_i$ ist (Hilfssatz 1 iii)), ist L_j für jedes $j = 1,\dots,m_i-1$ nicht leer.
Ist $e \in V_{ij} \cap (Y \times I)$, d.h., ist e eine Ecke von K_j, so ist der von e und K_j erzeugte abstrakte simpliziale Komplex $e*K_j$ (vgl. [S] p. 109) gleich K_j. Gleiches gilt für $e \in W_j \cap (Y \times I)$ und L_j. Deshalb sind die zu K_j und L_j gehörenden reduzierten geordneten Kettenkomplexe $\tilde{C}_*(K_j)$ und $\tilde{C}_*(L_j)$ azyklisch ([S] 4.3.6). Setze $N_j = \bigcup_{k=1}^{j} K_k$. Dann ist $N_{j+1} = N_j \cup K_{j+1}$, und aufgrund von Hilfssatz 1 ii) ist $N_j \cap K_{j+1} = K_j \cap K_{j+1} = L_j$. Da L_j nicht leer ist, folgt mit der reduzierten Mayer-Vietoris-Sequenz ([S] 4.6) durch Induktion, daß der zu N_j gehörende reduzierte geordnete

Kettenkomplex $\tilde{C}_*(N_j)$ für alle j azyklisch ist. Aber es ist $N_{m_i} = Y \times I(\mathfrak{U}_Y)$ □

Hilfssatz 3 : Die Teilmengen $Y_1,\ldots,Y_q$ von M seien in Y enthalten. Es sei $Y = Y_1 \neq \emptyset$. Y_j, $j = 1,\ldots, q$, sei in der Menge $V_{i(j)}$ der Überdeckung $\mathfrak{V}$ aus Hilfssatz 1 enthalten. $\mathfrak{U}_j$ sei die Überdeckung $(Y_j \times I) \cap \mathfrak{V}_{i(j)}$ ($\mathfrak{V}_{i(j)}$ aus Hilfssatz 1) und K der simpliziale Komplex $\bigcup_{j=1}^{q} Y_j \times I(\mathfrak{U}_j)$. Dann ist der zu K gehörende reduzierte geordnete Kettenkomplex $\tilde{C}_*(K)$ azyklisch.

Beweis : Wir führen ihn durch Induktion nach q. Der Fall $q = 1$ ist in Hilfssatz 2 behandelt. Sei nun $q > 1$ und $K' := \bigcup_{j=1}^{q-1} Y_j \times I(\mathfrak{U}_j)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\tilde{C}_*(K')$ azyklisch. Ist $Y_q = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $Y_q \neq \emptyset$. Setze $L = K' \cap (Y_q \times I(\mathfrak{U}_q))$. Dann ist $L = \bigcup_{j=1}^{q-1} Y_j \cap Y_q(\mathfrak{W}_j)$, wobei $\mathfrak{W}_j$ entweder gleich $\mathfrak{U}_j \cap \pi^{-1}(Y_j \cap Y_q)$ oder gleich $\mathfrak{U}_q \cap \pi^{-1}(Y_j \cap Y_q)$ ist. Dies folgt aus Hilfssatz 1 iv). Auf $Y_1 \cap Y_q, \ldots, Y_{q-1} \cap Y_q$ und L läßt sich dann wieder die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h., $\tilde{C}_*(L)$ ist azyklisch. Da $K = K' \cup (Y_q \times I(\mathfrak{U}_q))$ ist, erhalten wir mit der reduzierten Mayer-Vietoris-Sequenz die Behauptung □

Beweis von Hilfssatz 1 :

Die Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ sei mit Hilfe der Polynome $P_1, \ldots , P_r \in R[X_1,\ldots,X_n,T]$ definiert, d.h., jede Menge U_i sei eine endliche Vereinigung von Mengen der Gestalt $\{x \in R^{n+1} \mid P_k(x) = 0,\ P_{l_j}(x) > 0,\ j = 1, \ldots , s\}$. Aus Theorem 3.3 schließen wir, daß wir nach Übergang zu einer Verfeinerung und Hinzunahme weiterer Polynome darüberhinaus annehmen können, daß jede Menge U_i sich in der Form $\{ x \in M \times I \mid P_{l_j}(x) > 0,\ j = 1, \ldots , s \}$ schreiben läßt.

Wir wählen eine Zerlegung $M = \bigcup_{i\in I} B_i$ von M in endlich viele disjunkte semialgebraische Teilmengen und semialgebraische Funktionen ξ_k^i auf B_i $(1 \leq i \leq r_i)$ mit den in Lemma 2.5 angeführten Eigenschaften, wobei wir $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ und $N_j = \emptyset$ setzen. Wir verwenden die dort gebrauchten Bezeichnungen. Nach Lemma 2.5 iii) gilt für jedes der arithmetischen Mittel ξ_k^i $0 \leq \xi_k^i(x) \leq 1$ entweder für alle $x \in B_i$ oder für kein $x \in B_i$. Seien

$$\xi^i_{l_i} < \xi^i_{l_i+1} < \ldots < \xi^i_{m_i}$$

die zwischen 0 und 1 liegenden Funktionen ξ_k^i . Nach Umbenennen dürfen wir zur Vereinfachung annehmen, daß $l_i = 1$ ist. Offenbar muß in unserer Situation dann $\xi_1^i \equiv 0$ und $\xi^i_{m_i} \equiv 1$ sein (für alle $i \in I$). Da M eine beschränkte Teilmenge von R^n ist, folgt aus dem Triangulierungssatz 2.2 : Es gibt eine Triangulierung $\Psi : \bigcup_{j=1}^{s} S_j \xrightarrow{\sim} M$ von M, so daß alle Mengen B_i und A die Vereinigung gewisser "Simplizes" $\Psi(S_j)$ ~~sind~~. Wir nennen die Mengen $\Psi(S_j)$ einfach die Simplizes von M. Nach Unterteilen der B_i können wir annehmen, daß B_i für alle i ein Simplex ist.

Wir werden jetzt zu jedem Simplex B_i von M eine Umgebung V_i von B_i definieren. $\{V_i\}_{i\in I}$ wird die gesuchte Überdeckung $\mathfrak{B}$ sein. Wir gehen induktiv nach der Dimension der Simplizes vor:

Sei $0 \leqslant k \leqslant \dim M$. Die Umgebung V_i sei für alle i mit $\dim B_i < k$ schon definiert. Wähle dann zu jedem Simplex B_i mit $\dim B_i = k$ eine offene semialgebraische Umgebung V_i von B_i, so daß gilt :

1) $V_i \subseteq St(B_i)$ ($St(B_i)$ = Sternumgebung von B_i bzgl. Ψ).
2) Ist $\dim B_i = \dim B_j = k$ und $i \neq j$, so ist $V_i \cap V_j = \emptyset$.
3) Für jede der Umgebungen V_i ($\dim B_i = k$) und alle $j \in I$ gilt : Ist $\overline{B}_i \cap B_j = \emptyset$ und $\overline{B}_j \cap B_i = \emptyset$, so ist $\overline{V}_i \cap B_j = \emptyset$.
4) Für alle (i,j) mit $\dim B_i = k$ und $\dim B_j < k$ gilt : Ist $B_j \nsubseteq \overline{B}_i$, so ist $V_i \cap V_j = \emptyset$.

1) läßt sich trivialerweise erfüllen. 2) und 3) kann man nach Korollar 3.7 erfüllen. Sei schließlich $\dim B_i = k$, $\dim B_j < k$ und $B_j \nsubseteq \overline{B}_i$. Dann ist $\overline{B}_i \cap B_j = \emptyset$. Außerdem ist

$\overline{B}_j \cap B_i = \emptyset$. Nach 3) (für $k = \dim B_j$ angewendet) ist deshalb $\overline{V}_j \cap B_i = \emptyset$. Damit läßt sich auch 4) erreichen.

Auf diese Weise erhalten wir eine offene Überdeckung $\{V_i\}_{i\in I}$ von M. $\mathfrak{V}$ sei diese Überdeckung und $\mathfrak{V}' := \{V_i\}_{i\in J}$ mit $J := \{i \in I \mid B_i \subseteq A\}$.

Wir müssen nun noch die Überdeckungen $\mathfrak{V}_i$ von $V_i \times I$ definieren.

Zur Erinnerung : Mit W_{ij} haben wir in Lemma 2.5 die Menge $\{ (x, \xi^i_j(x)) \mid x \in B_i \}$ bezeichnet.

Sei $B_k \subseteq St(B_i)$, d.h. $B_i \subseteq \overline{B}_k$.

Für $2 \leqslant j \leqslant m_i$ sei

$$r(i,j,k) := \min \{m \mid W_{ij-1} \subseteq \overline{W}_{km}\} ,$$

$$s(i,j,k) := \max \{ m \mid W_{ij} \subseteq \overline{W}_{km} \} .$$

Nach Lemma 2.5 vii) sind die rechts stehenden Mengen nicht leer.

Definiere

$$V_{ij}(k) := \{ (x,t) \mid x \in V_i \cap B_k,\ \xi^i_{r(i,j,k)}(x) \leqslant t \leqslant \xi^i_{s(i,j,k)}(x) \}$$

und

$$V_{ij} := \bigcup_{\substack{k \\ B_k \subseteq St(B_i)}} V_{ij}(k)$$

und

$$\mathfrak{V}_i := \{V_{ij}\}_{j=2,\dots,m_i} .$$

Da trivialerweise $r(i,j+1,k) \leqslant s(i,j,k)$ ist und offenbar $r(i,2,k) = 1$ sowie $s(i,m_i,k) = m_k$ ist, ist $\bigcup_{j=2}^{m_i} V_{ij}(k) = (B_k \cap V_i) \times I$. Damit ist $\mathfrak{B}_i$ eine Überdeckung von $V_i \times I$.

Um die Eigenschaften i) bis vi) nachweisen zu können, benötigen wir den

<u>1. Hilfssatz im Hilfssatz :</u> Sei $B_i \subseteq \overline{B}_j$.

Es gelten folgende Ungleichungen :

a) $r(i,j,k) < r(i,j+1,k)$

b) $s(i,j,k) < s(i,j+1,k)$.

Beweis :

a) Sei $W_{ij} \subseteq \overline{W}_{km}$. Es genügt zu zeigen, daß es dann ein $l < m$ mit $W_{ij-1} \subseteq \overline{W}_{kl}$ gibt. Sei $x \in B_i$. Wie im Hilfssatz 1 im Beweis des Triangulierungssatzes (Theorem 2.2) sehen wir, daß es eine offene Umgebung U von x, eine semialgebraische Funktion $f : U \to R$ und ein l, $2 \leqslant l \leqslant m_k$ mit $f|U \cap B_i = \xi^i_{j-1}|U \cap B_i$ und $f|U \cap B_k = \xi^k_l|U \cap B_k$ gibt. Nach Lemma 2.5 vi) ist dann $W_{ij-1} \subseteq \overline{W}_{kl}$. Da $W_{ij} \subseteq \overline{W}_{km}$ ist und f stetig ist, muß in $U \cap B_k$ ein Punkt y mit $\xi^k_l(y) = f(y) < \xi^k_m(y)$ liegen, woraus $l < m$ folgt.

b) zeigt man wie a) □

<u>Nachweis der Eigenschaften i) bis vi) :</u>

i) Da $r(i,j,k) \leqslant s(i,j-1,k) < s(i,j,k)$ ist, ist dies erfüllt.

ii) Sei $(x,t) \in V_{im} \cap V_{ij+1}$, $x \in B_k \cap V_j$, $m \leq j$.

Dann ist

$$\xi^k_{r(i,m,k)}(x) \leq \xi^k_{r(i,j,k)}(x) < \xi^k_{r(i,j+1,k)}(x) \leq t \leq \xi^k_{s(i,m,k)}(x) \leq$$

$$\xi^k_{s(i,j,k)}(x) \leq \xi^k_{s(i,j+1,k)}(x) .$$

Also ist $(x,t) \in V_{ij}$.

iii) Da $r(i,j+1,k) \leq s(i,j,k)$ ist, ist auch iii) erfüllt.

iv) Sei $V_i \cap V_{i'} \neq \emptyset$. Nach Wahl der V_i muß dann entweder $B_i \subseteq \overline{B}_{i'}$ oder $B_{i'} \subseteq \overline{B}_i$ sein (2) und 4)). Sei OE $B_{i'} \subseteq \overline{B}_i$. Dann ist $St(B_i) \subseteq St(B_{i'})$.

Sei $B_k \subseteq St(B_i)$, d.h. $B_{i'} \subseteq \overline{B}_i \subseteq \overline{B}_k$, und $2 \leq m' \leq m_{i'}$.

Setze $s = s(i',m',i)$ und $t = r(i',m',i) + 1$.

Nach Definition ist $r(i,t,k) = \min \{l \mid W_{it-1} \subseteq \overline{W}_{kl} \}$.

Da $W_{i'm'-1} \subseteq W_{it-1}$ ist, ist $r(i',m',k) =$

$\min \{ l \mid W_{i'm'-1} \subseteq \overline{W}_{kl} \} \leq r(i,t,k)$.

Da $s(i,s,k) = \max \{ l \mid W_{is} \subseteq \overline{W}_{kl} \}$ und $W_{i'm'} \subseteq \overline{W}_{is}$ ist, ist $s(i',m',k) = \max \{ l \mid W_{i'm'} \subseteq \overline{W}_{kl} \} \geq$

$s(i,s,k)$.

Wir folgern:

Für $r(i',m',i) < m \leq s(i',m',i)$ ist

$r(i',m',k) \leq r(i,m,k) \leq s(i,m,k) \leq s(i',m',k)$.

Dies bedeutet : Für $r(i',m',i) < m \leq s(i',m',i)$ ist

$V_{im} \cap \pi^{-1}(V_i \cap V_{i'}) \subseteq V_{i'm'}$.

Da schließlich $s(i',m',i) \geq r(i',m'+1,i)$ und

$r(i',2,i) = 1$ sowie $s(i',m_{i'},i) = m_i$ ist, liegt jedes m, $2 \leq m \leq m_i$, in einem Intervall $]r(i',m',i),s(i',m',i)]$, und die Behauptung iv) folgt.

v) Da $\xi_1^i \equiv 0$ und $\xi_{m_i}^i \equiv 1$ ist, ist v) erfüllt.

vi) Die $\mathfrak{U}$ definierenden Polynome $P_1, \ldots, P_r$ haben auf den Mengen W_{ik} und $T_{ik} := \{(x,t) \mid x \in B_i, \xi_{k-1}^i(x) < t < \xi_k^i(x)\}$ konstantes Vorzeichen. Jede dieser Mengen muß deshalb in einer Menge der Überdeckung $\mathfrak{U}$ und, falls $B_i \subseteq A$ ist, sogar in einer Menge der Überdeckung $\mathfrak{U}'$ enthalten sein. Sei nun $V_i \in \mathfrak{B}$ und $2 \leq j \leq m_i$. Nach Definition ist $V_{ij}(i) = \{(x,t) \mid x \in B_i, \xi_{j-1}^i(x) \leq t \leq \xi_j^i(x)\}$. Nach Wahl der ξ_k^i kann mindestens eine der beiden Funktionen ξ_{j-1}^i, ξ_j^i nicht Nullstelle eines der definierenden Polynome P_k, für die $P_k|B_i \times R \not\equiv 0$ ist, sein. Sei z.B. ξ_{j-1}^i keine Wurzel.(Der andere Fall läßt sich genauso behandeln). Wähle $U_l \in \mathfrak{U}$ mit $W_{ij} \subseteq U_l$, falls $B_i \subseteq A$ ist, wähle U_l sogar in $\mathfrak{U}'$. U_l hat die Form
$\{ y \in M \times I \mid P_{j_1}(y) > 0, \ldots, P_{j_s}(y) > 0 \}$.
Da zwischen ξ_{j-1}^i und ξ_j^i keine Nullstelle der Polynome P_k liegt und $P_k(x,\xi_{j-1}^i(x)) \neq 0$ für $x \in B_i$ ist, ist ganz $V_{ij}(i)$ in U_l enthalten. Aus Stetigkeitsgründen liegen dann $W_{kr(i,j,k)}$ und $W_{ks(i,j,k)}$ auch in U_l, wobei wir ein festes k mit $B_k \subseteq St(B_i)$ betrachten.

<u>2. Hilfssatz im Hilfssatz :</u>

Keines der Polynome $P_{j_1}, \dots , P_{j_s}$ hat in

$$T_k := \left\{ (x,t) \mid x \in B_k,\ \xi^k_{r(i,j,k)}(x) \leq t \leq \xi^k_{s(i,j,k)}(x) \right\}$$

eine Nullstelle.

Beweis : Sei $r(i,j,k) \leq l \leq s(i,j,k)$ und $P_{j_m}(x,\xi^i_l(x)) = 0$ für $x \in B_k$. Da P_{j_m} über B_i nicht identisch null ist, ist jeder Punkt in $\overline{W}_{k\,l} \cap \pi^{-1}(B_i)$ der Gestalt $(x,\xi^i_t(x))$ mit $x \in B_i$ und geeignetem t. Wir sehen wie im Hilfssatz 2 im Beweis des Triangulierungssatzes (Theorem 2.2), daß $\overline{W}_{kl} \cap \pi^{-1}(B_i) = W_{it}$ mit geeignetem t ist. Da $P_{j_m}(x,\xi^i_t(x)) = 0$ ist, ist $t \neq j,\ j-1$. Angenommen $t > j$. Wähle nach dem Kurvenauswahlsatz (Theorem 2.6) einen Weg ϑ von $(x,\xi^i_j(x))$ nach $W_{ks(i,j,k)}$. Sei $\alpha := \pi\circ\vartheta$ und $\vartheta =: (\alpha,\rho)$. Für alle $u \in]0,1]$ ist $\xi^k_l(\alpha(u)) \leq \xi^k_{s(i,j,k)}(\alpha(u)) = \rho(u)$. Der Abschluß $\overline{L}$ von $L := \left\{ (\alpha(u),\xi^k_l(\alpha(u))) \mid u \in]0,1] \right\}$ muß deshalb in der abgeschlossenen Menge $\left\{(\alpha(u),w) \mid u \in [0,1], w \leq \rho(u)\right\}$ enthalten sein. Über x muß ein Punkt von $\overline{L}$ liegen, dieser kann nur $(x,\xi^i_t(x))$ sein. Wir erhalten den Widerspruch $\xi^i_t(x) \leq \rho(0) = \xi^i_j(x)$. Den Fall $t < j-1$ behandelt man genauso $\square$

Die Polynome $P_{j_1}, \dots , P_{j_s}$ haben nach diesem 2. Hilfssatz auf T_k konstantes Vorzeichen, d.h., sie sind auf T_k strikt positiv. Insbesondere ist $V_{ij}(k) \subseteq T_k \subseteq U_l$, und wir sehen, daß V_{ij} in U_l enthalten ist. Damit ist vi) nachgewiesen.

Hilfssatz 1 und damit Satz 7.2 sind nun vollständig gezeigt □

Korollar 7.3 : Sei M ein zusammenziehbarer affiner semialgebraischer Raum. Dann ist für alle $q > 0$

$$H^q(M, G_M) = 0 .$$

Es gilt folgende Verschärfung von Lemma 5.7 :

Lemma 7.4 : Sei $\Psi : X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i \xrightarrow{\sim} M$ eine gute Triangulierung des affinen semialgebraischen Raums M. Seien $e_o, \dots , e_q \in E(M)$ Ecken von M. $St(e_j)$ sei die Sternumgebung von e_j in M (bzgl. Ψ). Ist $\Psi^{-1}(\{e_o,\dots,e_q\})$ die Eckenmenge eines offenen Simplex S von $|K(X)|$, so ist $\Psi(S) \subseteq St(e_o) \cap \dots \cap St(e_q)$ und $St(e_o) \cap \dots \cap St(e_q)$ ist in jeden Punkt von $\Psi(S)$ zusammenziehbar. Andernfalls ist $St(e_o) \cap \dots \cap St(e_q) = \emptyset$.

Beweis : Wir können OE annehmen, daß $M = X$ und $\Psi = id$ ist. Seien $e_o, \dots , e_q$ die Ecken eines offenen Simplex S von $|K(X)|$. Dieser liegt in M (Ψ gute Triangulierung, vgl. Lemma 5.7). Es ist $St(e_o) \cap \dots \cap St(e_q) = \bigcup_{\substack{i \\ S \subseteq \bar{S}_i}} S_i$, also ist für jedes $x \in S$ und jedes $y \in St(e_o) \cap \dots \cap St(e_q)$ die Strecke $\{ u\cdot x + (1-u)\cdot y \mid u \in [0,1] \}$ in $St(e_o) \cap \dots \cap St(e_q)$ enthalten. Vermöge der Homotopie

$H(y,t) := t\cdot x + (1-t)\cdot y$ läßt sich dann $St(e_o) \cap \ldots \cap St(e_q)$ nach x zusammenziehen. Der Rest der Behauptung steht schon in Lemma 5.7 □

Da sich jeder semialgebraische Raum durch endlich viele affine offene semialgebraische Teilmengen überdecken läßt und für jeden affinen semialgebraischen Raum Sternüberdeckungen existieren, erhalten wir insbesondere

<u>Korollar 7.5 :</u> Jeder semialgebraische Raum M besitzt eine Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\ldots,n}$ durch offene, affine, semialgebraische und zusammenziehbare Teilmengen. Es ist $H^q(U_i,G) = 0$ für alle $q > 0$ und jedes $i = 1,\ldots,n$.

Weitere Anwendungen der Homotopieinvarianz der semialgebraischen Kohomologie werden wir in den nächsten Abschnitten geben.

§ 8 Simpliziale Kohomologie und Homologie

Wir werden die Homotopieinvarianz ausnützen und die Kohomologie eines affinen semialgebraischen Raums mit konstanten Koeffizienten als die Kohomologie eines abstrakten simplizialen Komplexes interpretieren. Dieses Ergebnis wird es uns erlauben, in vernünftiger Weise auch die Homologiegruppen eines affinen semialgebraischen Raums zu definieren.

Definition 1 : Sei $K = (E(K), S(K))$ ein abstrakter simplizialer Komplex und A eine Teilmenge von $E(K)$. Dann heißt $(A, \{ S \in S(K) \mid S \subseteq A \})$ der von A erzeugte abstrakte Unterkomplex von K .

G sei immer eine feste abelsche Gruppe.

$A \subseteq M$ sei ein Paar affiner semialgebraischer Räume.

Definition 2 :

Eine Triangulierung von (M,A) ist ein Tupel (X,K,L,Ψ), bestehend aus einem geometrischen simplizialen Komplex $X = \bigcup_{i=1}^{r} S_i$, abstrakten simplizialen Komplexen K, L und einem semialgebraischen Isomorphismus $\Psi : X \xrightarrow{\sim} M$ mit folgenden Eigenschaften :

i) Ψ induziert gute Triangulierungen von M und A (vgl.

Def. 1 in § 5).

ii) K ist der von den Ecken von K(X), die in X liegen, erzeugte Unterkomplex des abstrakten Komplexes K(X) (zur Def. von K(X) vgl. § 2).

iii) L ist der abstrakte Unterkomplex von K(X), der von den in X liegenden Ecken, die durch Ψ nach A abgebildet werden, erzeugt wird.

Streng unserem bisherigen Sprachgebrauch folgend, müßte (X,K,L,Ψ) eine gute Triangulierung von (M,A) heißen. Aufgrund unserer Schreibweise sollten aber keine Verwechslungen mit der früheren Definition einer Triangulierung (Def. 5 in § 2) möglich sein.
Definition 1 ist speziell den Bedürfnissen dieses Abschnitts angepasst, der Begriff der Triangulierung eines Paares wird fast ausschließlich hier gebraucht.

Wir betrachten nun eine feste Triangulierung (X,K,L,Ψ) von (M,A) , die nach dem Triangulierungssatz 2.2 und Lemma 5.6 immer existiert, und identifizieren bis auf weiteres M vermöge Ψ mit X, d.h., wir nehmen an, daß $M = X$ und $\Psi = id$ ist. $|K|$ ist dann der größte abgeschlossene, in M enthaltene, $|L|$ der größte abgeschlossene, in A enthaltene geometrische Unterkomplex von $|K(X)|$. Die Realisierungen von L, K, $K(X)$ seien selbstverständlich so gewählt, daß $|L| \subseteq |K| \subseteq X \subseteq |K(X)|$ ist.

$E(K(X))$, $E(K)$, $E(L)$ sei jeweils die Menge der Ecken von $|K(X)|$, $|K|$, $|L|$.

Lemma 8.1 : $|K|$ ist starker Deformationsretrakt von M, $|L|$ ist starker Deformationsretrakt von A, d.h., es gibt semialgebraische Abbildungen $\chi : M \to |K|$ und $\Psi : A \to |L|$ und semialgebraische Homotopien $H : M \times I \to M$ von χ nach id_M und $H' : A \times I \to A$ von Ψ nach id_A , so daß für alle $t \in I$ $H(-,t) \mid |K| = id_{|K|}$ und $H'(-,t) \mid |L| = id_{|L|}$ ist.

Beweis : Es genügt, M und $|L|$ zu betrachten. Sei S ein offener Simplex von $M = X$, der nicht in $|K|$ enthalten ist. Da die Triangulierung von M gut ist, ist $\bar{S} \cap |K| = \bar{T}$ der Abschluß eines offenen Simplex T. $e_o, \ldots , e_r$ seien die Ecken von T, $e_o, \ldots , e_r, e_{r+1}, \ldots , e_s$ die Ecken von S.

Dann ist

$$T = \left\{ \sum_{i=0}^{r} t_i e_i \mid 0 < t_i < 1 \, , \sum_{i=0}^{r} t_i = 1 \right\} \quad \text{und}$$

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{s} t_i e_i \mid 0 < t_i < 1 \, , \sum_{i=0}^{s} t_i = 1 \right\} .$$

$$p_{S|T} : \overline{S}(T) := \left\{ \sum_{i=0}^{s} t_i e_i \in \overline{S} \mid \sum_{i=0}^{r} t_i > 0 \right\} \to \overline{T} \, ,$$

$$\sum_{i=0}^{s} t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^{r} t_i e_i \Big/ \sum_{i=0}^{r} t_i$$

ist eine semialgebraische Abbildung, die S nach T abbildet und deren Einschränkung auf T die Identität ist.

Wir setzen $\chi \mid |K| = id_{|K|}$ und $\chi \mid S = p_{S|T} \mid S$, S durchlaufe alle Simplizes in $M - |K|$. Offenbar ist dann χ eine Abbildung von M nach $|K|$ mit semialgebraischem Graph.

Sind S' und S Simplizes in $M - |K|$ und ist $S' \subset \overline{S}$, so ist $S' \subset \overline{S}(T)$ und $p_{S'|T'} \mid S' = p_{S|T} \mid S'$, also ist χ auch stetig. Durch $H_t(x) := (1-t)\cdot\chi(x) + t\cdot x$ wird eine semialgebraische Homotopie mit den gewünschten Eigenschaften von χ nach id_M gegeben und Lemma 8.1 ist gezeigt □

<u>Korollar 8.2 :</u> Für die Alexander-Spanier-Kohomologie gilt :

$$\overline{H}^q(|K|,|L|,G) \cong \overline{H}^q(M,A,G) \quad \text{für alle } q \geq 0 .$$

Beweis : Betrachte die semialgebraische Abbildung $(M,|L|) \to (M,A)$, gegeben durch id_M . i : $|L| \to A$ sei die

Inklusion. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert folgenden kommutativen Doppelkomplex, dessen Zeilen exakt sind :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\dots \to & \overline{H}^{q-1}(M,G) & \to & \overline{H}^{q-1}(A,G) & \to & \overline{H}^{q}(M,A,G) & \to & \overline{H}^{q}(M,G) & \to \dots \\
& \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow i^* & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & \\
\dots \to & \overline{H}^{q-1}(M,G) & \to & \overline{H}^{q-1}(|L|,G) & \to & \overline{H}^{q}(M,|L|,G) & \to & \overline{H}^{q}(M,G) & \to \dots
\end{array}$$

i^* ist ein Isomorphismus, da i eine Homotopieäquivalenz ist, also ist nach dem 5er-Lemma $\overline{H}^q(M,A,G) \to \overline{H}^q(M,|L|,G)$ ein Isomorphismus. Ebenso sehen wir, daß M durch $|K|$ ersetzt werden kann □

Ist $e \in E(K)$, so sei $St(e)$ die Sternumgebung von e in M.
Für $e \in E(L)$ ist $St(e) \cap A$ dann die Sternumgebung von e in A. $\{St(e)\}_{e\in E(K)}$ und $\{St(e) \cap A\}_{e\in E(L)}$ sind Überdeckungen von M bzw. A.

Lemma 8.3 : Sei A in M abgeschlossen und seien $e_o, \dots , e_q \in E(K)$.

i) Es ist

$$G_{M,A}(St(e_o) \cap \dots \cap St(e_q)) = \begin{cases} G & \text{falls } e_o,\dots, e_q \text{ die Ecken eines Simplex } S \subseteq |K|,\ S \not\subseteq |L| \text{ sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

ii) Für alle $q > 0$ ist $H^q(St(e_o) \cap \dots \cap St(e_q), G_{M,A}) = 0$, m.a.W., $\{St(e)\}_{e\in E(K)}$ ist eine Leray-Überdeckung für $G_{M,A}$.

Beweis : Setze $U := St(e_o) \cap \ldots \cap St(e_q)$. $i : A \to M$ sei die Inklusion. Die exakte Garbensequenz

$$0 \to G_{M,A} \to G_M \to i_* G_A \to 0$$

(vgl. § 6) induziert eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$0 \to H^o(U,G_{M,A}) \to H^o(U,G_M) \to H^o(U,i_* G_A) \to H^1(U,G_{M,A}) \to$$
$$H^1(U,G_M) \to \ldots\ldots \to H^{q-1}(U,i_* G_A) \to H^q(U,G_{M,A}) \to H^q(U,G_M) \to \ldots$$

Der Funktor i_* ist exakt (Satz 4.4). Aus der Leray-Spektralsequenz für i folgt daher : $H^q(U,i_* G_A) = H^q(U \cap A,G_A)$ für alle $q \geqslant 0$.

U und $U \cap A$ sind entweder leer oder zusammenziehbar (Lemma 7.4). Deshalb ist $H^q(U,G_M) = 0$ und $H^q(U,i_* G_A) = 0$ für alle $q > 0$ (Korollar 7.3), also auch $H^q(U,G_{M,A}) = 0$ für $q > 1$.

Ist eine Ecke e_k , $k \in \{0,\ldots,q\}$, nicht in $|L|$ enthalten, so ist $St(e_k) \cap A = \emptyset$, da A in M abgeschlossen ist. Insbesondere ist dann $U \cap A = \emptyset$. Aus $U \cap A = \emptyset$ folgt aber $H^o(U,i_* G_A) = 0$ und, falls $U \neq \emptyset$ ist, $G_{M,A}(U) = G$.

Mit der langen Sequenz schließen wir in diesem Fall, daß $H^1(U,G_{M,A}) = 0$ ist.

Sei nun $U \cap A \neq \emptyset$. Dann sind e_o, ... , e_q die Ecken eines Simplex von $|L|$. U und $U \cap A$ sind zusammenziehbar. Insbesondere ist $G_{M,A}(U) = 0$ und die ersten Terme der langen Sequenz lauten :

$$0 \to 0 \to G \xrightarrow{id} G \to H^1(U,G_{M,A}) \to 0 \to \dots .$$

Wiederum schließen wir : $H^1(U,G_{M,A}) = 0$, und die Behauptung ist gezeigt □

Wir können nun die Kohomologie von (M,A) mit Koeffizienten in G als die simplizialen Kohomologiegruppen des Paares (K,L) abstrakter simplizialer Komplexe interpretieren.

Theorem 8.4 : Die relative Alexander-Spanier-Kohomologie $\overline{H}^q(M,A,G)$ ist gleich der simplizialen Kohomologie $H^q(K,L,G)$ für alle $q \geqslant 0$.

Ist überdies A in M abgeschlossen, so erhält man für alle $q \geqslant 0$:

$$H^q(K,L,G) = \overline{H}^q(M,A,G) = H^q(M,G_{M,A}) = \check{H}^q(M,G_{M,A}) .$$

Beweis : Da $\overline{H}^q(M,A,G) = \overline{H}^q(M,|L|,G)$ ist (Korollar 8.2), können wir annehmen, daß A in M abgeschlossen ist. Lemma 8.3 i) besagt dann, daß der Čech-Komplex $C^*(\{St(e)\}_{e\in E(K)},G_{M,A})$ und der geordnete Kokettenkomplex $C^*(K,L,G)$ des Paares (K,L) mit Koeffizienten in G gleich sind. Also ist $H^q(K,L,G) = H^q(\{St(e)\},G_{M,A})$ für alle $q \geqslant 0$. Da $\{St(e)\}_{e\in E(K)}$ eine Leray-Überdeckung für $G_{M,A}$ ist (Lemma 8.3 ii)), ist $H^q(\{St(e)\},G_{M,A}) = H^q(M,G_{M,A})$ ([T] I.3.4.6; [A] II.3.1). Auf affinen semialgebraischen Räumen stimmen Čech- und Grothendieck-Kohomologie überein

(Theorem 5.2). Theorem 8.4 folgt nun, da $\overline{H}^q(M,A,G) = H^q(M,G_{M,A})$ ist (Theorem 6.11) □

<u>Korollar 8.5 :</u> Die Kohomologiegruppen $H^q(M,\mathbb{Z}_M) = \overline{H}^q(M,\mathbb{Z})$ eines affinen semialgebraischen Raums M und die Kohomologiegruppen $\overline{H}^q(M,A,\mathbb{Z})$ eines Paares $A \subseteq M$ affiner semialgebraischer Räume sind endlich erzeugte abelsche Gruppen.

Außerdem lesen wir aus Theorem 8.4 ab, daß die simplizialen Kohomologiegruppen $H^q(K,L,G)$ nicht von der Triangulierung von (M,A) abhängen. Dies wollen wir etwas genauer untersuchen.

<u>Definition 3 :</u> Eine Triangulierung (X',K',L',Ψ') von (M,A) heißt Verfeinerung von (X,K,L,Ψ), wenn $\Psi' : X' \xrightarrow{\sim} M$ gute Triangulierungen von $\Psi(|K|)$ und $\Psi(|L|)$ induziert und jeden offenen Simplex S' von X' in das Bild $\Psi(S)$ eines (eindeutig bestimmten) offenen Simplex S von X, den wir den Träger supp(S') von S' nennen wollen, abbildet.

Nach dem Triangulierungssatz 2.2 und Lemma 5.6 besitzen je zwei Triangulierungen von (M,A) eine gemeinsame Verfeinerung.

Sei (X',K',L',Ψ') eine Verfeinerung von (X,K,L,Ψ).

Ist e eine Ecke von K' (L'), so liegt mindestens eine Ecke von supp(e) in K (L).

Wir definieren eine simpliziale Abbildung

$\mu : (K',L') \to (K,L)$:

Wähle zu jeder Ecke $e \in E(K')$ eine Ecke $\mu(e) \in K$ von supp(e) die, falls $e \in E(L')$ ist, in L liegt.

Für $e' \in E(K')$ sei $St'(e')$ die Sternumgebung von $\Psi'(e)$ in M bezüglich Ψ', d.h. $St'(e') = \bigcup_{\substack{e' \in \overline{S}' \\ S' \text{ Simplex von } X'}} \Psi'(S')$.

Wie oben identifizieren wir M vermöge Ψ mit X, d.h., nehmen an, daß $M = X$ und $\Psi = id$ ist.

<u>Hilfssatz :</u>

i) μ ist eine simpliziale Abbildung von (K',L') nach (K,L).

ii) Für alle $e \in E(K')$ ist $St'(e) \subseteq St(\mu(e))$.

Beweis :

i) Sei $(e_o,\dots,e_q)$ ein Simplex von K' und $\overline{S}$ seine Realisierung in $|K'|$. Dann ist für $k = 0, \dots, q$ $supp(e_k) \subseteq \overline{supp(S)}$. Also sind $\mu(e_o), \dots, \mu(e_q)$ die Ecken einer Seite T von supp(S), d.h., sie bilden einen Simplex von K.

ii) Sei S ein Simplex von X' mit $e \in \overline{S}$. Dann ist $supp(e) \subseteq \overline{supp(S)}$. Insbesondere ist $\Psi'(S) \subseteq supp(S) \subseteq St(\mu(e))$ □

Als simpliziale Abbildung induziert μ einen Homomorphismus $\mu^{\bullet} : C^*(K,L,G) \to C^*(K',L',G)$ der geordneten Kokettenkomplexe und damit für alle $q \geqslant 0$ Homomorphismen

$\mu^* : H^q(K,L,G) \to H^q(K',L',G)$.

μ^* hängt nicht von der speziellen Wahl von μ , d.h. nicht von der speziellen Auswahl der Ecken $\mu(e)$ von $\mathrm{supp}(e)$, $e \in E(K')$, ab. Ist nämlich μ' eine weitere wie oben definierte simpliziale Abbildung von (K',L') nach (K,L), so bilden μ und μ' jeden Simplex von K' in denselben Simplex von K ab, d.h., μ und μ' sind simplizial homotop. Sie induzieren deshalb kokettenhomotope Abbildungen $\mu^{\bullet}$, $\mu'^{\bullet}$ ([G] I.3.7.3).

<u>Satz 8.6 :</u> $\mu^* : H^q(K,L,G) \to H^q(K',L',G)$ ist für alle $q \geqslant 0$ ein Isomorphismus.

Beweis : Sei zunächst A abgeschlossen in M. μ ist nach Teil ii) des Hilfssatzes eine Verfeinerungsabbildung von $\{St'(e')\}_{e' \in E(K')}$ nach $\{St(e)\}_{e \in E(K)}$: $St'(e') \subseteq St(\mu(e'))$. μ induziert deshalb einen Homomorphismus $\tilde{\mu}$ zwischen den entsprechenden Čech-Komplexen mit Koeffizienten in $G_{M,A}$. Wir erhalten folgendes kommutatives Diagramm (vgl. den Beweis von Theorem 8.4) :

$$\begin{tikzcd} C^*(K,L,G) \arrow[d, "\mu^\bullet"'] \arrow[r, phantom, "="] & C^*(\{St(e)\}, G_{M,A}) \arrow[d, "\tilde{\mu}"] \\ C^*(K',L',G) \arrow[r, phantom, "="] & C^*(\{St'(e')\}, G_{M,A}) \end{tikzcd}$$

Da beide Überdeckungen Leray-Überdeckungen für $G_{M,A}$ sind, induziert $\tilde{\mu}$ und damit $\mu^\bullet$ in der Kohomologie Isomorphismen.

Wir lassen nun die Voraussetzung, daß A in M abgeschlossen ist, weg. L'' sei der von den Ecken $e \in E(L')$, die durch Ψ' nach $|L|$ abgebildet werden, erzeugte abstrakte Unterkomplex von L'. Da Ψ' eine gute Triangulierung von $|L|$ induziert (vgl. die Def. der Verfeinerung), ist $\Psi'^{-1}(|L|) = |L''|$.

Sei $\alpha : (K',L'') \to (K',L')$ die Inklusion und $\upsilon := \mu\cdot\alpha$. $\alpha^\bullet$ und $\upsilon^\bullet$ seien die in den geordneten Kokettenkomplexen, α^* und υ^* die in der Kohomologie induzierten Homomorphismen. Die Diagramme

$$\begin{tikzcd} & C^*(K,L,G) \arrow[dl, "\mu^\bullet"'] \arrow[dd, "\upsilon^\bullet"] \\ C^*(K',L',G) \arrow[dr, "\alpha^\bullet"'] & \\ & C^*(K',L'',G) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & H^*(K,L,G) \arrow[dl, "\mu^*"'] \arrow[dd, "\upsilon^*"] \\ H^*(K',L',G) \arrow[dr, "\alpha^*"'] & \\ & H^*(K',L'',G) \end{tikzcd}$$

sind kommutativ. Da $|L|$ in M abgeschlossen ist, wissen wir aus dem oben behandelten Fall (setze $A = |L|$), daß υ^* ein Isomorphismus ist. Also genügt es zu zeigen, daß α^* ein Isomorphismus ist.

Aus der langen exakten Sequenz zu dem Tripel $L'' \subseteq L' \subseteq K'$ abstrakter simplizialer Komplexe

$$\ldots \to H^q(K',L',G) \xrightarrow{\alpha^*} H^q(K',L'',G) \to H^q(L',L'',G) \to H^{q+1}(K',L',G) \ldots$$

lesen wir ab, daß es genügt, $H^q(L',L'',G) = 0$ für alle q zu zeigen.

Nach Theorem 8.4 ist $H^q(L',L'',G) = \bar{H}^q(|L'|,|L''|,G) = \bar{H}^q(\Psi'(|L'|),\Psi'(|L''|),G) = \bar{H}^q(\Psi'(|L'|),|L|,G)$.

Die exakte Sequenz

$$0 \to \bar{C}^*(A,\Psi'(|L'|),G) \to \bar{C}^*(A,|L|,G) \to \bar{C}^*(\Psi'(|L'|),|L|,G) \to 0$$

von Kokettenkomplexen liefert die lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \bar{H}^q(A,\Psi'(|L'|),G) \to \bar{H}^q(A,|L|,G) \to \bar{H}^q(\Psi'(|L'|),|L|,G)$$
$$\to \bar{H}^{q+1}(A,\Psi'(|L'|),G) \to \ldots \quad .$$

Da nach Lemma 8.1 sowohl $\Psi'(|L'|)$ als auch $|L|$ ein Deformationsretrakt von A ist, folgert man aus der langen exakten Kohomologiesequenz von $(A,\Psi'(|L'|))$ bzw. $(A,|L|)$, daß für alle q $\bar{H}^q(A,\Psi'(|L'|),G) = \bar{H}^q(A,|L|,G)=0$ ist.

Damit ist für alle q auch $\bar{H}^q(\Psi'(|L'|),|L|,G) = 0$ □

Die simpliziale Abbildung $\mu : (K',L') \to (K,L)$ induziert auch Homomorphismen $\mu_* : H_q(K',L',G) \to H_q(K,L,G)$ zwischen den simplizialen Homologiegruppen von (K',L') und (K,L). μ_* ist aus denselben Gründen wie μ^* nicht von der speziellen Wahl von μ abhängig. Sind (X,K,L,Ψ) und (X',K',L',Ψ') zwei Triangulierungen von (M,A), so sei $(X,K,L,\Psi) \leqslant (X',K',L',\Psi')$ genau dann, wenn (X',K',L',Ψ') eine Verfeinerung von (X,K,L,Ψ) ist. Die Menge aller Triangulierungen ist vermöge $\leqslant$ induktiv geordnet.

Definition 4 : Für alle $q \geqslant 0$, $q \in \mathbb{N}$, heißt

$$H_q(M,A,G) := \varprojlim_{(X,K,L,\Psi)} H_q(K,L,G)$$

die q-te Homologiegruppe von (M,A) mit Koeffizienten in G.

Der projektive Limes wird dabei über die Menge aller Triangulierungen von (M,A) gebildet.

Satz 8.7 : Sei (X',K',L',Ψ') eine Verfeinerung der Triangulierung (X,K,L,Ψ) von (M,A) und $\mu : (K',L') \to (K,L)$ die oben definierte simpliziale Abbildung. Dann ist der induzierte Homomorphismus $\mu_* : H_q(K',L',G) \to H_q(K,L,G)$ für alle $q \geqslant 0$ ein Isomorphismus. Insbesondere ist also der kanonische Homomorphismus

$$H_q(M,A,G) \to H_q(K,L,G)$$

ein Isomorphismus.

Beweis : $\{C_q(K,L,G)\}_{q \geqslant 0}$ bzw. $\{C_q(K',L',G)\}_{q \geqslant 0}$ seien die geordneten Kettenkomplexe mit Koeffizienten in G der gegebenen Paare abstrakter simplizialer Komplexe. Nach

Satz 8.6 induziert μ Isomorphismen $H^q(K,L,G) \to H^q(K',L',G)$. Da $C^*(K,L,\mathbb{Z}) := \mathrm{Hom}\,(C_*(K,L,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ und $C^*(K',L',\mathbb{Z})$ freie Kokettenkomplexe sind, ist der von μ induzierte Homomorphismus $\mu^\cdot : C^*(K,L,\mathbb{Z}) \to C^*(K',L',\mathbb{Z})$ eine Homotopieäquivalenz von Kokettenkomplexen ([DO] II.4.3). $C_*(K,L,\mathbb{Z})$ und $C_*(K',L',\mathbb{Z})$ sind die zu $C^*(K,L,\mathbb{Z})$ und $C^*(K',L',\mathbb{Z})$ dualen Kettenkomplexe. Der von μ induzierte Homomorphismus $\mu_\cdot : C_*(K,L,\mathbb{Z}) \to C_*(K',L',\mathbb{Z})$ ist die zu $\mu^\cdot$ duale Abbildung und deshalb eine Homotopieäquivalenz von Kettenkomplexen. Insbesondere ist also μ_* für $G = \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.
Sei nun G beliebig. Dann ist $C_*(K,L,G) = C_*(K,L,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ und $C_*(K',L',G) = C_*(K',L',\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ und μ_* wird durch $\mu_\cdot \otimes \mathrm{id}_G$ gegeben. Mit $\mu_\cdot$ ist aber auch $\mu_\cdot \otimes \mathrm{id}_G$ eine Homotopieäquivalenz, und die Behauptung folgt auch im allgemeinen Fall □

Die hier definierte Homologietheorie ist funktoriell :
Sei $f : (M,A) \to (N,B)$ eine semialgebraische Abbildung und (X_1,K_1,L_1,Ψ_1) eine Triangulierung von (N,B). Nach dem Triangulierungssatz gibt es eine Triangulierung (X,K,L,Ψ) von (M,A) mit folgender Eigenschaft :
Jeder offene Simplex S von X wird unter f in einen offenen Simplex supp f(S) von X_1 abgebildet. (Dabei haben wir M mit

X und N mit X_1 identifiziert). Wie bei der Definition von μ ordnen wir jeder Ecke $e \in E(K)$ eine Ecke $g(e) \in E(K_1)$ von supp $f(e)$ zu, die, falls $e \in E(L)$ ist, in L_1 liegt. g ist eine "simpliziale Approximation" von f. Wie im Hilfssatz zeigt man, daß g eine simpliziale Abbildung von (K,L) nach (K_1,L_1) ist. g induziert also einen Homomorphismus

$g_* : H_q(M,A,G) = H_q(K,L,G) \to H_q(K_1,L_1,G) = H_q(N,B,G)$.

<u>Lemma 8.8 :</u> g_* hängt nur von f, d.h. nicht von den gewählten Triangulierungen und der speziellen Wahl der Ecke $g(e)$ von supp $f(e)$ ab.

Beweis : Sei zunächst g' eine andere simpliziale Approximation von f zu den Triangulierungen (X,K,L,Ψ), (X_1,K_1,L_1,Ψ_1). Dann bilden g und g' jeden Simplex von K in denselben Simplex von K_1 ab, d.h., die Abbildungen g und g' sind simplizial homotop und induzieren deshalb denselben Homomorphismus in der Homologie ([GO] I.3.7.3). g_* hängt also nicht von der Auswahl der Ecken $g(e)$ ab.
Sei (X',K',L',Ψ') eine Verfeinerung von (X,K,L,Ψ) und μ der weiter oben definierte Morphismus $(K',L') \to (K,L)$ simplizialer Komplexe. Da $g\circ\mu$ eine simpliziale Approximation von f bezüglich der neuen Triangulierungen ist, zeigt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_q(K,L,G) \arrow[r, "g_*"] & H_q(K_1,L_1,G) \\ H_q(K',L',G) \arrow[u, "\mu_*"] \arrow[ur, "(g\circ\mu)_*"'] & \end{tikzcd}$$

daß g_* nicht von der Triangulierung von (M,A) abhängt.

Sei schließlich (X_1',K_1',L_1',Ψ_1') eine Verfeinerung von (X_1,K_1,L_1,Ψ_1). Durch Übergang zu einer Verfeinerung von (X,K,L,Ψ) können wir annehmen, daß jeder Simplex von $X = M$ in einen Simplex von X_1' abgebildet wird. Sei $g' : (K,L) \to (K_1',L_1')$ eine simpliziale Approximation von f und $\mu_1 : (K_1',L_1') \to (K_1,L_1)$ die oben definierte "Verfeinerungsabbildung" zwischen den beiden Triangulierungen von B. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_q(K,L,G) \arrow[r, "g_*'"] \arrow[dr, "(\mu_1\circ g')_*"'] & H_q(K_1',L_1',G) \arrow[d, "\mu_{1*}"] \\ & H_q(K_1,L_1,G) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ und $\mu_1\circ g'$ eine simpliziale Approximation von f bezüglich (X,K,L,Ψ) und (X_1,K_1,L_1,Ψ_1). Wir sehen, daß g auch nicht von der Triangulierung von (N,B) abhängt $\square$

Die nur von f abhängige Abbildung g_* sei der von f in der Homologie induzierte Homomorphismus f_*.

Satz 8.9 : Seien (M,A) und (N,B) Paare affiner semialgebraischer Räume und $f, g : (M,A) \to (N,B)$ homotope semialgebraische Abbildungen. Dann induzieren f und g für alle $q \geq 0$ denselben Homomorphismus

$$f_* = g_* : H_q(M,A,G) \to H_q(N,B,G)$$

in der Homologie.

Beweis : Da Satz 8.9 nur für die Abbildungen i_o, i_1 : $M \to M \times [0,1]$, $i_o(x) = (x,0)$, $i_1(x) = (x,1)$ zu zeigen ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus der simplizialen Beschreibung der Homologie in Satz 8.7 □

Zu jedem Paar $A \subseteq M$ affiner semialgebraischer Räume hat man selbstverständlich eine lange exakte Homologiesequenz. Außerdem kann man ausschneiden und hat Mayer-Vietoris-Sequenzen. Dies folgt aus der klassischen singulären Theorie über den reellen Zahlen. Aus dem Triangulierungssatz 2.2 folgt nämlich, daß man immer geeignete Triangulierungen finden kann, um die Probleme in Fragestellungen umzuformulieren, die nur noch abstrakte simpliziale Komplexe beinhalten, die man auch über $\mathbb{R}$ realisieren kann.

Ebenso wie bei der Kohomologie ergibt sich für die Homologie in der 0-ten Dimension :

$$H_o(M,G) = \prod_{\pi_o(M)} G \quad .$$

Bemerkung 8.10 :

Es ist naheliegend, auch singuläre Homologie- und Kohomologiegruppen $H_{q\ sing}(M,G)$ und $H^q_{sing}(M,G)$ zu definieren: Man wähle als singuläre q-Simplizes die semialgebraischen Abbildungen vom Standard-q-Simplex nach M. Allerdings ergeben sich größere Schwierigkeiten, die Gleichheit der singulären Homologiegruppen $H_{q\ sing}(M,G)$ mit den hier definierten simplizialen Homologiegruppen bzw. die Gleichheit von $H^q_{sing}(M,G)$ mit $H^q(M,G_M)$ zu zeigen. Die üblicherweise benützten Methoden der simplizialen Approximation oder der kleinen Simplizes lassen sich nicht ohne weiteres übertragen, da die Technik der baryzentrischen Unterteilung über einem nichtarchimedischen Körper R versagt. Simplizes werden nämlich durch "geradliniges Unterteilen" nicht "beliebig klein".

§ 9 Grundkörpererweiterung

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, was beim Übergang zu einem größeren reell abgeschlossenen Grundkörper passiert.

Sei $\tilde{R} \supseteq R$ ein weiterer reell abgeschlossener Körper.

Jede semialgebraische Teilmenge M von R^n ist von der Form

$$M = \bigcup_{i=1}^{m} \{ x \in R^n \mid g_i(x) = 0 , f_{ij}(x) > 0, j = 1,\dots,r \}$$

mit Polynomen f_{ij}, $g_i \in R[X_1,\dots,X_n]$.

Diesselben Gleichungen und Ungleichungen definieren eine semialgebraische Teilmenge $M_{\tilde{R}} = \tilde{M}$ von $\tilde{R}^n$:

$$\tilde{M} = M_{\tilde{R}} = \bigcup_{i=1}^{m} \{ x \in \tilde{R}^n \mid g_i(x) = 0, f_{ij}(x) > 0, j = 1,\dots,r\}.$$

Offenbar ist $\tilde{M} \cap R^n = M$.

Das Tarski-Prinzip lehrt uns, daß $\tilde{M}$ nur von M, nicht von der polynomialen Beschreibung von M abhängt.

Lemma 9.1 : Seien $M \subseteq R^n$ und $N \subseteq R^m$ semialgebraische Mengen. $f : M \to N$ sei eine semialgebraische Abbildung mit dem Graph G(f).

Dann gilt :

i) $\widetilde{G(f)}$ ist der Graph einer semialgebraischen Abbildung $\tilde{f} : \tilde{M} \to \tilde{N}$.

ii) f ist genau dann injektiv (surjektiv, offen, abgeschlossen, ein Isomorphismus), wenn $\tilde{f}$ es ist.

iii) Ist $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ semialgebraisch, so gilt :

$$\tilde{f}(\tilde{A}) = f(A)^{\sim}\ , \ \tilde{f}^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(B)^{\sim}, \quad (\widetilde{f|A}) = \tilde{f}|\tilde{A}\ .$$

Der Beweis von Lemma 9.1 ergibt sich unmittelbar aus dem Tarski-Prinzip, indem man beachtet, daß sich alle Aussagen elementar formulieren lassen.

<u>Theorem 9.2 :</u> Es gibt einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten kovarianten Funktor E von der Kategorie SAS(R) der semialgebraischen Räume über R in die Kategorie SAS($\tilde{R}$) der semialgebraischen Räume über $\tilde{R}$ mit den folgenden Eigenschaften :

i) Für semialgebraische Teilmengen M von R^n ist $E(M) = \tilde{M}$.

ii) Ist $M \subseteq R^n$ und $N \subseteq R^m$ semialgebraisch und $f : M \to N$ eine semialgebraische Abbildung, so ist $E(f) = \tilde{f}$.

iii) Ein Morphismus f zwischen semialgebraischen Räumen über R ist genau dann injektiv (surjektiv, offen, abgeschlossen), wenn E(f) es ist.

iv) E erhält gefaserte Produkte.

v) Ist $\{U_k\}_{k=1,\ldots,r}$ eine Überdeckung des semialgebraischen Raums X über R durch offene semialgebraische Teilmengen, und ist $i_k : U_k \to X$ die Inklusion, so ist $\{E(i_k)(E(U_k))\}_{k=1,\ldots,r}$ eine offene Überdeckung von E(X).

Sei i die Inklusion von SAS(R) in die Kategorie der Mengen und $\tilde{i}$ die Inklusion von SAS($\tilde{R}$) in die Kategorie der Mengen.

vi) Es gibt eine natürliche Transformation

$\alpha = (\alpha_X)_{X \in Ob(SAS(R))}$ von i nach $\tilde{i} \circ E$, so daß gilt:

a) $\alpha_X : X \to E(X)$ ist injektiv.

b) Für jede semialgebraische Teilmenge M von R^n ist

$\alpha_M : M \to E(M) = \tilde{M}$ die Inklusion.

(vi) besagt, daß wir jeden semialgebraischen Raum X über R in kanonischer Weise als Teilmenge von E(X) auffassen können.)

Beweis : Wir konstruieren zunächst einen Funktor E mit den gewünschten Eigenschaften. Wähle zu jedem affinen semialgebraischen Raum M über R einen festen Isomorphismus χ_M von M auf eine eingebettete semialgebraische Menge, d.h., auf eine semialgebraische Teilmenge eines R^n . Ist M schon eingebettet, so sei χ_M die Identität. Setze $E(M) := \widetilde{\chi(M)}$.

Für jeden affinen semialgebraischen Raum M über R bezeichnen wir mit M' die eingebettete semialgebraische Menge, auf die M durch χ_M isomorph abgebildet wird. Zu jedem nichtaffinen semialgebraischen Raum X über R wählen wir eine feste Überdeckung $\{M_i(X)\}_{i \in I(X)}$ von X durch affine offene semialgebraische Teilmengen. Die Isomorphismen $\alpha_{ij}(X)$ (i,j $\in$ I(X)) seien durch das folgende (kommutative) Diagramm definiert :

$$\begin{tikzcd}
 & M_i(X) \cap M_j(X) \arrow[dl, "\chi_{M_i(X)}"', "\sim"] \arrow[dr, "\chi_{M_j(X)}", "\sim"'] & \\
M'_{ij}(X) \arrow[rr, "\alpha_{ij}(X)", "\sim"'] & & M'_{ji}(X)
\end{tikzcd}$$

$$:= \chi_{M_i(X)}(M_i(X) \cap M_j(X)) \qquad\qquad := \chi_{M_j(X)}(M_i(X) \cap M_j(X))$$

Da $M'_{ij}(X)$ offen in $M_i(X)'$ ist, ist nach dem Tarski-Prinzip $\tilde{M}'_{ij}(X)$ offen in $\tilde{M}_i(X)'$. Nach Lemma 9.1 ist $\tilde{\alpha}_{ij}(X)$ ein Isomorphismus. Die affinen semialgebraischen Räume $\tilde{M}_i(X)'$ über $\tilde{R}$ lassen sich nun offenbar vermöge der Isomorphismen $\tilde{\tilde{\alpha}}_{ij}(X)$ längs der offenen Teilmengen $\tilde{M}'_{ij}(X)$ zu einem semialgebraischen Raum $E(X)$ über $\tilde{R}$ zusammenkleben.

Es gibt dann für alle $i \in I(X)$ eine kanonische offene Immersion $p_{Xi} : E(M_i(X)) = \tilde{M}_i(X)' \to E(X)$ und

$$E(X) = \bigcup_{i \in I(X)} p_{Xi}(E(M_i(X))) .$$

Für jeden Morphismus $f : M \to N$ zwischen affinen semialgebraischen Räumen sei $E(f) := (\chi_N \circ f \circ \chi_M^{-1})^{\sim} : E(M) = \tilde{M}' \to \tilde{N}' = E(N)$.

Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus zwischen beliebigen semialgebraischen Räumen über R. Sei $N_{kj} := M_k(X) \cap f^{-1}(M_j(Y))$.

Dann erhält man das Bild $E(f)$ von f auf naheliegende Weise durch Verkleben der Morphismen $p_{Yj} \circ E(f|N_{kj})$.

E ist dann ein Funktor $SAS(R) \to SAS(\tilde{R})$, der offensichtlich die Eigenschaften i) und ii) hat. iii) folgert man aus oder wie in Lemma 9.1. Sind $f : M \to N$ und $g : L \to N$ Morphismen zwischen eingebetteten semialgebraischen Mengen über R, so ist

$M \times_N L = \{(x,y) \in M \times N \mid f(x) = g(y)\}$.

Also ist $E(M \times_N L) = (\widetilde{M \times_N L}) = \{(x,y) \in \tilde{M} \times \tilde{N} \mid \tilde{f}(x) = \tilde{g}(y)\}$ $= \tilde{M} \times_{\tilde{N}} \tilde{L}$. Vom affinen kann man auf den nicht-affinen Fall schließen, wir sehen deshalb, daß E gefaserte Produkte erhält.

Ist M eine eingebettete semialgebraische Menge über R und $\{U_i\}_{i=1,\dots,r}$ eine offene Überdeckung von M, so folgt aus dem Tarski-Prinzip, daß $\bigcup_{i=1}^{r} \tilde{U}_i = \tilde{M}$ ist. Aus dieser Tatsache und der Konstruktion von E folgt unmittelbar, daß auch v) erfüllt ist.

Da für jede semialgebraische Teilmenge M von R^n $\tilde{M} \cap R^n = M$ ist, ergibt sich die Existenz einer natürlichen Transformation $(\alpha_X)_{X \in Ob(SAS(R))}$ von i nach $i \circ E$ mit den Eigenschaften a) und b) direkt aus der Definition von E.

Sei nun E' ein weiterer Funktor mit diesen Eigenschaften. Für jeden affinen semialgebraischen Raum X über R erhalten wir den Isomorphismus $\Psi(X) : E'(X) \xrightarrow{E'(\chi_X)} E'(X') = \tilde{X}' = E(X)$.

Ist $X = \bigcup_{k \in I(X)} M_k(X)$ ein beliebiger semialgebraischer Raum und $i_k : M_k(X) \to X$ die Inklusion, so ist nach v) $\{E'(i_k)\,(E'(M_k(X)))\}_{k\in I(X)}$ eine offene Überdeckung von $E'(X)$. Die Eigenschaften ii) und iv) von E' gestatten es uns, die Isomorphismen $\Psi(M_k(X))$ zu einem Isomorphismus $\Psi(X) : E'(X) \to E(X)$ zu verkleben.

Ist $f : M \to N$ eine semialgebraische Abbildung zwischen affinen semialgebraischen Räumen über R, so ist folgendes Diagramm kommmutativ :

$$\begin{tikzcd} E'(M) \arrow[r, "\Psi(M) = E'(\chi_M)"] \arrow[d, "E'(f)"'] & E(M) \arrow[d, "{E(f) = (\chi_N \circ \tilde{f} \circ \chi_M^{-1}) \overset{ii)}{=} E'(\chi_N \circ f \circ \chi_M^{-1})}"] \\ E'(N) \arrow[r, "\Psi(N) = E'(\chi_N)"] & E(N) \end{tikzcd}$$

Mit Hilfe dieses Diagramms kann man sich leicht davon überzeugen, daß durch die Familie $\{\Psi(X)\}_{X \in Ob(SAS(R))}$ ein Isomorphismus $E' \to E$ von Funktoren gegeben wird.

Der Funktor E ist deshalb durch die Eigenschaften i) - vi) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt □

Wir fixieren nun einen Funktor $E : SAS(R) \to SAS(\tilde{R})$, wie er in Theorem 9.2 beschrieben wurde und schreiben kurz $\tilde{M}$ oder $M_{\tilde{R}}$ statt $E(M)$ und $\tilde{f}$ statt $E(f)$. Da E bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, sind diese Bezeichnungen gerechtfertigt.

Ist U eine (offene, abgeschlossene) semialgebraische Teilmenge von M, so können wir $\tilde{U}$ in kanonischer Weise als (offene, abgeschlossene) semialgebraische Teilmenge von $\tilde{M}$ betrachten (Theorem 2 iii)).

Sei V eine R-Varietät. Dann können wir $\widetilde{V(R)}$ mit $V \otimes_R \tilde{R}(\tilde{R})$ identifizieren. Ist $f : V \to V'$ ein algebraischer Morphismus von R-Varietäten und $f_R : V(R) \to V'(R)$ die induzierte semialgebraische Abbildung, so ist $\widetilde{(f_R)}$ gleich $(f \otimes id_{\tilde{R}})_{\tilde{R}}$: $V \otimes_R \tilde{R}(\tilde{R}) \to V' \otimes_R \tilde{R}(\tilde{R})$. M sei eine semialgebraische Teilmenge der R-Varietät V. Dann wird $\tilde{M}$, als semialgebraische Teilmenge von $V \otimes_R \tilde{R}$ betrachtet, auf den über R definierten offenen affinen Teilen von $V \otimes_R \tilde{R}$ durch diesselben Gleichungen und Ungleichungen wie M gegeben.

$A \subseteq M$ sei nun ein Paar affiner semialgebraischer Räume über R. Dann ist $\tilde{A} \subseteq \tilde{M}$ ein Paar affiner semialgebraischer Räume über $\tilde{R}$. (X,K,L,ψ) sei eine Triangulierung von (M,A) (vgl. Def. 1 , § 8). Wir können die abstrakten simplizialen Komplexe sowohl über R als auch über $\tilde{R}$ realisieren. Für jeden endlichen abstrakten simplizialen Komplex P sei $|P|_R$ die geometrische Realisierung über R, $|P|_{\tilde{R}}$ die über $\tilde{R}$. Offenbar ist $|P|_{\tilde{R}}$ kanonisch isomorph zu $\widetilde{|P|}_R$. Wir nehmen daher an : $|P|_{\tilde{R}} = \widetilde{|P|}_R$. Der Isomorphismus $\psi : X \to M$ liefert einen Isomorphismus $\tilde{\psi} : \tilde{X} \to \tilde{M}$ und wir erhalten :

$(\tilde{X},K,L,\tilde{\Psi})$ ist eine Triangulierung von $(\tilde{M},\tilde{A})$.

Da die Kohomologie bzw. die Homologie von (M,A) und $(\tilde{M},\tilde{A})$ mit der simplizialen Kohomologie bzw. Homologie übereinstimmt, folgt (G sei wie immer eine abelsche Gruppe)

Theorem 9.3 : $A \subseteq M$ sei ein Paar affiner semialgebraischer Räume über R. Dann gilt für alle $q \geqslant 0$:

$$\bar{H}^q(M,A,G) = \bar{H}^q(\tilde{M},\tilde{A},G) \quad ,$$

$$H_q(M,A,G) = H_q(\tilde{M},\tilde{A},G) \quad .$$

Da $\prod_{\pi_0(M)} G = \bar{H}^0(M,G) = \bar{H}^0(\tilde{M},G) = \prod_{\pi_0(\tilde{M})} G$ ist, erhalten wir

Korollar 9.4 : M sei ein affiner semialgebraischer Raum über R. Dann ist M genau dann zusammenhängend, wenn $\tilde{M}$ es ist.

Theorem 9.3 läßt sich noch etwas verallgemeinern.

Für einen semialgebraischen Raum M über R ist die Abbildung ϵ_M , die jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von M die offene semialgebraische Teilmenge $\tilde{U}$ von $\tilde{M}$ zuordnet, nach Theorem 9.2, iv), v) ein Morphismus von der semialgebraischen Topologie M_{sa} von M in die semialgebraische Topologie $\tilde{M}_{sa}$ von $\tilde{M}$ (vgl. [T] I.1.2.2 ; [A] II.4.5).

Wir erinnern kurz an einige Definitionen :

Sei allgemein $\epsilon : T' \to T$ ein Morphismus von (Grothendieck-) Topologien. Dann kann man jeder Garbe $\mathcal{G}$ auf T' in funktorieller Weise eine Garbe $\epsilon_s\mathfrak{G}$ auf T zuordnen : $\epsilon_s\mathfrak{G}$ sei die zur Prägarbe $\epsilon_p\mathfrak{G}$, die jedem Objekt V in Cat T $\varinjlim_{I_V^o} \mathfrak{G}(U)$ zuordnet, assoziierte Garbe. I_V^o ist dabei die duale Kategorie von I_V, die Objekte von I_V sind die Paare (U,χ), bestehend aus einem Objekt U von Cat T' und einem Morphismus $\chi : V \to \epsilon(U)$ in Cat T, die Morphismen in I_V sind in naheliegender Weise definiert.

Ist speziell $\mathfrak{G}$ eine Garbe auf dem semialgebraischen Raum M über R, so ist $(\epsilon_M)_p\mathfrak{G}(V) = \varinjlim \mathfrak{G}(U)$, wobei der induktive Limes über alle offenen semialgebraischen Teilmengen U von M mit $V \subseteq \tilde{U}$ gebildet wird. Für die konstante Garbe G_M auf M ist deshalb $(\epsilon_M)_s G_M = G_{\tilde{M}}$.

Ebenso kann man zu jeder Garbe $\mathfrak{F}$ auf T in funktorieller Weise eine Garbe $\epsilon^s\mathfrak{F}$ auf T' bilden : $\epsilon^s\mathfrak{F}(U) := \mathfrak{F}(\epsilon(U))$.

Für die konstante Garbe $G_{\tilde{M}}$ auf $\tilde{M}$ erhalten wir $(\epsilon_M)^s G_{\tilde{M}} = G_M$. Dies folgt aus Korollar 9.4, da man zum Beweis nur den affinen Fall betrachten muß.

Ist ϵ der durch eine semialgebraische Abbildung von M nach N gegebene Morphismus von Topologien, so entspricht ϵ^s der Bildung des direkten Bildes, ϵ_s der Bildung des Urbilds (vgl. § 4).

ϵ_s ist immer rechtsexakt, ϵ^s immer linksexakt.

Der Funktor $(\epsilon_M)_s$ ist sogar exakt, da ϵ_M gefaserte Produkte erhält und $\epsilon_M(M) = \tilde{M}$ ist ([T] I.3.6.7; [A] II.4.14).

<u>Theorem 9.5 :</u> Sei M ein semialgebraischer Raum über R. $\mathfrak{F}$ sei eine lokal konstante Garbe auf M.

Dann gilt :

i) $(\epsilon_M)_s\mathfrak{F}$ ist lokal konstant und $(\epsilon_M)^s((\epsilon_M)_s\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$.

ii) Für alle $q \geq 0$ ist der kanonische Homomorphismus

$$H^q(M,\mathfrak{F}) \rightarrow H^q(\tilde{M},(\epsilon_M)_s\mathfrak{F})$$

ein Isomorphismus.

Beweis : Sei $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch so gewählt, daß $\mathfrak{F}|U = G_U$ konstant ist. Dann ist $(\epsilon_M)_s\mathfrak{F}|\tilde{U} = G_{\tilde{U}}$. Also ist auch $(\epsilon_M)_s\mathfrak{F}$ lokal konstant. Außerdem ist $(\epsilon_M)^s((\epsilon_M)_s\mathfrak{F})|U = (\epsilon_U)^s G_{\tilde{U}} = G_U$, woraus $(\epsilon_M)^s((\epsilon_M)_s\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ folgt. Der kanonische Homomorphismus in ii) ist ein Eckenmorphismus in der Leray-Spektralsequenz ([T] I.3.7 ; [A] II.4.11)

$$E_2^{pq} = H^p(M,R^q(\epsilon_M)^s((\epsilon_M)_s\mathfrak{F})) \Rightarrow E^{p+q} = H^{p+q}(\tilde{M},(\epsilon_M)_s\mathfrak{F}) \quad .$$

$R^q(\epsilon_M)^s((\epsilon_M)_s\mathfrak{F})$ ist die zu $U \mapsto H^q(\tilde{U},(\epsilon_M)_s\mathfrak{F})$ assoziierte Garbe ([T] I.3.7.1; [A] II.4.7).

Sei $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch. Dann gibt es eine Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\dots,r}$ von U durch offene zusammenziehbare semialgebraische Teilmengen, so daß $\mathfrak{F}|U_i$ konstant ist. (Man überdecke z.B U durch affine offene Teilmengen V_j und wähle die Sternüberdeckungen von V_j zu geeigneten Triangulierungen.) Dann ist $(\epsilon_M)_s\mathfrak{F}|\tilde{U}_i$ konstant. Außerdem ist auch $\tilde{U}_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, zusammenziehbar. Aus der Homotopieinvarianz der Kohomologie folgt deshalb, daß $H^q(\tilde{U}_i,(\epsilon_M)_s\mathfrak{J}) = 0$ für alle $q > 0$ ist (Korollar 7.4), und wir schließen, daß $R^q(\epsilon_M)^s((\epsilon_M)_s\mathfrak{J}) = 0$ für $q > 0$ ist. Insbesondere ist $E_2^{pq} = 0$ für $q > 0$, d.h., die Spektralsequenz zerfällt und die Eckenmorphismen sind Isomorphismen □

<u>Korollar 9.6 :</u> Sei M ein semialgebraischer Raum über R. Dann ist M genau dann zusammenhängend, wenn $\tilde{M}$ zusammenhängend ist. Ist $M = M_1 \cup \ldots \cup M_r$ die Zerlegung von M in seine Komponenten, so ist $\tilde{M} = \tilde{M}_1 \cup \ldots \cup \tilde{M}_r$ die Zerlegung von $\tilde{M}$ in seine Komponenten.

Beweis : Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der ersten. Diese läßt sich wie in Korollar 9.4 begründen □

Sei nun M ein semialgebraischer Raum über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Die starke Topologie auf M können wir in der üblichen Weise als Situs interpretieren. Diesen Situs bezeichnen wir mit M_{cl} und nennen ihn die klassische Topologie von M. Die mittels der klassischen Topologie berechneten (Ko-)Homologiegruppen seien $H_{q\ cl}(\ldots)$ und $H^q_{cl}(\ldots)$.

<u>Theorem 9.7 :</u> Sei $A \subseteq M$ ein Paar affiner semialgebraischer Räume über $\mathbb{R}$. Dann gilt für alle $q \geqslant 0$:

$$\overline{H}^q(M,A,G) = H^q_{cl}(M,A,G)$$

$$H_q(M,A,G) = H_{q\ cl}(M,A,G) \quad .$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Beschreibung der (Ko-)Homologie durch abstrakte simpliziale Komplexe.

Offenbar haben wir eine Inklusion $\iota : M_{sa} \to M_{cl}$ von Topologien. ι ordnet jeder offenen semialgebraischen Teilmenge U von M sich selbst, als offene Menge in der starken Topologie betrachtet, zu.

<u>Theorem 9.8 :</u> Sei M ein semialgebraischer Raum über R und $\mathfrak{F}$ eine lokal konstante Garbe auf M_{sa}. Dann ist $\iota_s\mathfrak{F}$ lokal konstant und für alle $q \geqslant 0$ ist der kanonische Homomorphismus

$$H^q(M,\mathfrak{F}) \to H^q_{cl}(M,\iota_s\mathfrak{F})$$

ein Isomorphismus.

Beweis : Sei $U \subseteq M$ offen und semialgebraisch so gewählt, daß $\mathfrak{F}|U = G_U$ konstant ist. Dann ist $\iota_s\mathfrak{F}|U = G_{Ucl}$ und $\iota^s(\iota_s\mathfrak{F})|U = \iota^s(G_{Ucl}) = G_U$, also ist $\iota_s\mathfrak{F}$ lokal konstant und $\mathfrak{F} = \iota^s(\iota_s\mathfrak{F})$. Der kanonische Homomorphismus ist ein Eckenmorphismus in der Leray-Spektralsequenz

$$E_2^{pq} = H^p(M, R^q \iota^s(\iota_s \mathfrak{F})) \quad \Rightarrow \quad E^{p+q} = H_{cl}^{p+q}(M, \iota_s \mathfrak{F}) .$$

Die klassische Kohomologie mit konstanten Koeffizienten ist homotopieinvariant. Wie im Beweis von Theorem 9.5 schließt man, daß die Spektralsequenz zerfällt □

Die Invarianz von Homologie und Kohomologie bei Erweiterung des Grundkörpers sowie Theorem 9.7 und Theorem 9.8 erlauben es uns, die (Ko-)Homologiegruppen mancher semialgebraischer Räume mit der klassischen Theorie zu bestimmen.

$\overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{R}$ sei der in allen reell abgeschlossenen Körpern enthaltene reelle Abschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$.

<u>Satz 9.9 :</u> $A \subseteq M$ sei ein Paar affiner semialgebraischer Räume über $\overline{\mathbb{Q}}$. Dann gilt für alle $q \geqslant 0$:

$$\overline{H}^q(M_R, A_R, G) = H_{cl}^q(M_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}}, G)$$

$$H_q(M_R, A_R, G) = H_{q\ cl}(M_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}}, G) .$$

<u>Beispiel :</u>

Sei $S_R^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in R^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$

die n-Sphäre über R und

$E_R^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\right\}$

die Einheitskreisscheibe über R.

Dann ist

$$\overline{H}^q(S_R^n,G) = \begin{cases} G & q = 0,\ n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_q(S_R^n,G) = \begin{cases} G & q = 0,\ n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\overline{H}^q(E_R^n,S_R^{n-1},G) = \begin{cases} G & q = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_q(E_R^n,S_R^{n-1},G) = \begin{cases} G & q = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

§ 10 Die Dualitätssätze und der Jordansche Kurvensatz

Ich werde in diesem Abschnitt erläutern, daß die klassischen Dualitätssätze auch über beliebigen reell abgeschlossenen Körpern richtig sind. Als Beispiel erhalten wir den Jordanschen Kurvensatz.
Als Referenz sei das Buch von Maunder ([M]) über algebraische Topologie genannt.
Wie immer ist R unser reell abgeschlossener Körper. Alle vorkommenden semialgebraischen Räume sind, falls nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt ist, Räume über R.
Ist bei (Ko-)Homologiegruppen keine Koeffizientengruppe angegeben, so sei immer (Ko-)Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ gemeint.

Bezeichnungen : Sei $|K|$ ein vollständiger simplizialer Komplex und $x \in |K|$. Dann sei $N_K(x)$ die Vereinigung der abgeschlossenen Simplizes von $|K|$, die x enthalten, und $Lk_K(x)$ die Vereinigung der abgeschlossenen Simplizes von $N_K(x)$, die x nicht enthalten. ($N_K(x) - Lk_K(x)$ ist gerade die Sternumgebung $St(x)$ von x in $|K|$).

Definition 1 : M sei ein affiner vollständiger semialgebraischer Raum. M heißt homologische n-Mannigfaltigkeit, wenn eine Triangulierung $\Psi : |K| \xrightarrow{\sim} M$ von M existiert, so daß für alle $x \in |K|$ und alle $q \geq 0$ $H_q(Lk_K(x)) = H_q(S_R^{n-1})$ ist, d.h. $H_q(Lk_K(x)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q = 0, n-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Definition 2 : Ein semialgebraischer Raum M heißt n-Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt $x \in M$ eine Umgebung besitzt, die semialgebraisch isomorph zu einer offenen Teilmenge von R^n ist.

Diesselben Argumente wie in [M], 5.3, zeigen, daß die erste Definition nicht von der Wahl der Triangulierung Ψ abhängt und jede affine vollständige n-Mannigfaltigkeit eine homologische n-Mannigfaltigkeit ist.(Man beachte, daß die Beweise von Theorem 2.4.5 und Prop. 3.4.3 in [M] auch über einem beliebigen reell abgeschlossenen Körper richtig sind).

Lemma 10.1 : V sei eine glatte n-dimensionale R-Varietät und $U \subseteq V(R)$ eine nichtleere offene semialgebraische Teilmenge von V(R). Dann ist U eine n-Mannigfaltigkeit.

Beweis : Sei $x \in U$. Da V glatt ist, gibt es eine Zariski-Umgebung W von x in V und einen etalen Morphismus $\Psi : W \to A_R^n$. Nach dem Satz über implizite Funktionen wird eine Umgebung U' von x in U durch Ψ_R semialgebraisch isomorph auf eine offene semialgebraische Teilmenge von R^n abgebildet (Theorem 1.11; man vgl. auch Satz 11.1) □

Beispiel : Ist V eine glatte projektive n-dimensionale R-Varietät, so ist V(R) eine homologische n-Mannigfaltigkeit.

Beweis : V(R) ist ein vollständiger affiner semialgebraischer Raum (Lemma 1.1 und Theorem 1.7) und eine n-Mannigfaltigkeit.□

Definition 3 : Eine zusammenhängende homologische n-Mannigfaltigkeit M heißt orientierbar, wenn $H_n(M) = \mathbb{Z}$ ist. Allgemeiner heißt eine homologische n-Mannigfaltigkeit orientierbar, wenn alle Komponenten orientierbar sind.

Bemerkung : Sei $\Psi : |K| \xrightarrow{\sim} M$ eine Triangulierung der homologischen n-Mannigfaltigkeit M. Da sich für alle $x \in |K|$ $H_q(Lk_K(x))$ als die Homologie des $Lk_K(x)$ zugrundeliegenden abstrakten simplizialen Komplexes berechnet, ist die Realisierung $|K|_{\mathbb{R}}$ von K über $\mathbb{R}$ auch eine homologische n-Mannigfaltigkeit. Aus $H_q(M) = H_q(K) = H_q(|K|_{\mathbb{R}})$ folgert man weiter, daß M genau dann orientierbar ist, wenn $|K|_{\mathbb{R}}$ im üblichen Sinn orientierbar ist. Für zusammenhängendes M ist $H_n(M)$ entweder gleich 0 oder gleich $\mathbb{Z}$, $H_n(M, \mathbb{Z}/_2)$ ist immer gleich $\mathbb{Z}/_2$. Dies liest man z.B. aus [M] 5.3.6 ab.

Bezeichnungen : Sei $|K|$ ein vollständiger simplizialer Komplex und $|L|$ ein Unterkomplex von $|K|$. Mit $|K'|$ bezeichnen wir die baryzentrische Unterteilung von $|K|$. $\overline{L}$ sei der abstrakte Unterkomplex von K', der aus den Simplizes besteht, die keine Ecke in L' haben (Bezeichnungen wie in [M]).

<u>Theorem 10.2</u> (Alexander-Poincaré-Dualität) :

Sei $\Psi : |K| \xrightarrow{\sim} M$ die Triangulierung einer homologischen n-Mannigfaltigkeit. $L_1 \subseteq K_1$ sei ein Paar von abstrakten Unterkomplexen von K.

Ist M orientierbar, so gibt es für alle $q \geqslant 0$ einen Isomorphismus

$$H^q(K_1,L_1) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(\overline{L}_1,\overline{K}_1) \quad .$$

Immer gibt es für alle $q \geqslant 0$ einen Isomorphismus

$$H^q(K_1,L_1,\mathbb{Z}/2) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(\overline{L}_1,\overline{K}_1,\mathbb{Z}/2) \quad .$$

(Für $q < 0$ sei selbstverständlich $H_q(\ldots) = 0$ gesetzt).

Beweis : $|K|_{\mathbb{R}}$ ist eine homologische n-Mannigfaltigkeit, die, falls M orientierbar ist, orientierbar ist. Die Behauptung ergibt sich dann unmittelbar aus [M] 5.3.13, 5.3.15 □

Wir merken noch an, daß die von Maunder im Beweis von 5.3.13 verwendeten Schlüsse auch über einem beliebigen reell abgeschlossenen Körper gültig sind, da fast nur mit abstrakten simplizialen Komplexen gearbeitet wird, d.h., Theorem 10.2 ist direkt und ohne Übergang nach $\mathbb{R}$ beweisbar.

Sei nun M eine homologische n-Mannigfaltigkeit und $B \subseteq A$ ein Paar semialgebraischer Teilmengen von M. $\Psi : |K| \xrightarrow{\sim} M$ sei eine Triangulierung von M, die gute Triangulierungen von B und A induziert. Wir identifizieren M vermöge Ψ mit $|K|$. K_1 sei der von den in A liegenden, L_1 der von den in B liegenden Ecken von $|K|$ erzeugte abstrakte Unterkomplex von K. $|K_1|$ ist der größte in A enthaltene, $|L_1|$ der größte in B enthaltene abgeschlossene Unterkomplex von $|K|$. Mit den Bezeichnungen aus § 8 ist $(|K|,K,K_1,\Psi)$ eine Triangulierung des Paars (M,A), $(|K|,K,L_1,\Psi)$ eine Triangulierung des Paars (M,B). Nach Lemma 8.1 ist $|K_1|$ ein starker Deformationsretrakt von A, $|L_1|$ ein starker Deformationsretrakt von B. Insbesondere ist wegen der Homotopieinvarianz $\overline{H}^q(A,B) = H^q(K_1,L_1)$ für alle $q \geqslant 0$. $\tilde{K}_1$ sei der Unterkomplex von K, bestehend aus den abstrakten Simplizes ohne Ecke in K_1, $\tilde{L}_1$ sei der aus den Simplizes ohne Ecke in L_1 bestehende Unterkomplex von K. Wieder nach Lemma 8.1 ist $|\tilde{K}_1|$ ein Retrakt von $|K| - |K_1|$ und $|\tilde{L}_1|$ ein Retrakt von $|K| - |L_1|$. (Man beachte, daß $(|K| - |L_1|, \tilde{L}_1, \tilde{K}_1, \mathrm{id})$ eine Triangulierung von $(|K| - |L_1|, |K| - |K_1|)$ im Sinne von § 8 ist). Die in Lemma 8.1 definierten Retraktionen induzieren Retraktionen von $|\overline{K}_1|$ nach $|\tilde{K}_1|$ und von $|\overline{L}_1|$

nach $|\tilde{L}_1|$. Nochmalige Anwendung von Lemma 8.1 zeigt schließlich, daß $|\tilde{K}_1|$ Retrakt von $M - A$ und $|\tilde{L}_1|$ Retrakt von $M - B$ ist. Da die Homologie homotopieinvariant ist (Satz 8.9), erhalten wir mit der langen exakten Homologiesequenz eines Paares und dem 5er-Lemma :

$$H_q(\bar{L}_1,\bar{K}_1) = H_q(|\bar{L}_1|,|\bar{K}_1|) = H_q(|\tilde{L}_1|,|\tilde{K}_1|) = H_q(M-B,M-A) .$$

All dies ist natürlich bei beliebiger Koeffizientengruppe richtig.

Theorem 10.2 erhält nun folgende Gestalt :

<u>Theorem 10.2'</u> (Alexander-Poincaré-Dualität) :

Sei M eine homologische n-Mannigfaltigkeit und $B \subseteq A$ ein Paar semialgebraischer Teilmengen von M.

Ist M orientierbar, so gibt es für alle $q \geq 0$ einen Isomorphismus

$$H^q(A,B) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(M-B,M-A) .$$

Immer existiert für alle $q \geq 0$ ein Isomorphismus

$$H^q(A,B,\mathbb{Z}/_2) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(M-B,M-A,\mathbb{Z}/_2) .$$

Speziell erhalten wir

<u>Theorem 10.3</u> (Poincaré-Dualität) :

Sei M eine homologische n-Mannigfaltigkeit und $\Psi : |K| \xrightarrow{\sim} M$ eine Triangulierung von M.

Ist M orientierbar, so gibt es für alle $q \geqslant 0$ einen Isomorphismus

$$H^q(M) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(M) \quad ,$$

genauer, einen Isomorphismus

$$H^q(K) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(K') \quad .$$

Immer existieren Isomorphismen

$$H^q(M,\mathbb{Z}/_2) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(M,\mathbb{Z}/_2) \quad \text{bzw.} \quad H^q(K,\mathbb{Z}/_2) \xrightarrow{\sim} H_{n-q}(K',\mathbb{Z}/_2) \ .$$

Da wir die (Ko-)Homologie mit konstanten Koeffizienten als die eines abstrakten simplizialen Komplexes beschreiben können, können wir auch die reduzierten (Ko-)Homologiegruppen $\tilde{H}^q(M)$ bzw. $\tilde{H}_q(M)$ eines affinen semialgebraischen Raums betrachten.

<u>Theorem 10.4</u> (Alexander-Dualität)

Sei A eine nichtleere semialgebraische Teilmenge der n-Sphäre S^n_R. Dann gibt es für alle $q \geqslant 0$ einen Isomorphismus

$$\tilde{H}^q(A) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}_{n-q-1}(S^n_R - A) \ .$$

Beweis : Sei $(|K|,K,L,\Psi)$ eine Triangulierung von (S^n_R,A). L ist nicht leer und $|L|$ ist ein Retrakt von A. Sei a eine Ecke von L. Da S^n_R eine orientierbare homologische n-Mannigfaltigkeit ist, folgt aus Theorem 10.2' :

$$\tilde{H}^q(A) \cong \tilde{H}^q(L) \cong H^q(L,a) \cong H^q(A,a) \cong H_{n-q}(S^n_R - a, S^n_R - A) \ .$$

$S^n_R - a$ ist aber (vermöge einer Projektion mit Zentrum a)

semialgebraisch isomorph zu R^n, also zusammenziehbar.
Deshalb ist für alle q $\tilde{\tilde{H}}_q(S_R^n - a) = 0$ und aus der exakten reduzierten Homologiesequenz folgt :

$$H_{n-q}(S_R^n - a, S_R^n - A) \cong \tilde{\tilde{H}}_{n-q-1}(S_R^n - A) \qquad \square$$

Wir merken noch an, daß in allen Dualitätssätzen statt $\mathbb{Z}$ ein beliebiger Ring als Koeffizientenring gewählt werden kann.

Auch die Lefschetz-Dualität für berandete Mannigfaltigkeiten läßt sich sinngemäß übertragen.

Aus den Dualitätssätzen lassen sich wie im klassischen Fall einige Folgerungen ziehen.

<u>Satz 10.5 :</u> Sei M eine nicht orientierbare homologische n-Mannigfaltigkeit. Dann läßt sich M nicht in S_R^{n+1} einbetten.

Beweis : Wir können annehmen, daß M zusammenhängend ist. Angenommen, M läßt sich nach S_R^{n+1} einbetten. Dann liefert die Alexander-Dualität $\tilde{\tilde{H}}^0(S_R^{n+1} - M) \cong \tilde{\tilde{H}}_n(M) = 0$ (M ist nicht orientierbar), woraus $\tilde{\tilde{H}}_0(S_R^{n+1} - M) = 0$ folgt. Aus Alexander- und Poincare-Dualität erhalten wir schließlich den Widerspruch (man beachte, daß $n > 0$ ist) :

$$0 = \tilde{\tilde{H}}_0(S_R^{n+1} - M, \mathbb{Z}/2) \cong \tilde{\tilde{H}}^n(M, \mathbb{Z}/2) \cong H^n(M, \mathbb{Z}/2) \cong \tilde{\tilde{H}}_0(M, \mathbb{Z}/2) \cong \mathbb{Z}/2 \qquad \square$$

<u>Theorem 10.6 :</u> Sei M eine semialgebraische Teilmenge von S_R^{n+1} ($n \geq 1$). M sei eine homologische n-Mannigfaltigkeit mit k Zusammenhangskomponenten.

Dann hat $S_R^{n+1} - M$ k+1 <u>Zusammenhangskomponenten</u>

Beweis : Nach Satz 10.5 ist M orientierbar. Aus der Alexander-Dualität erhalten wir

$$\tilde{H}_o(S_R^{n+1} - M) \cong \tilde{H}^n(M) \cong H^n(M) \quad .$$

Andererseits ist $H^n(M) \cong H_o(M)$ (Poincaré-Dualität). Hieraus folgt die Behauptung □

<u>Korollar 10.7</u> (Verallgemeinerter Jordanscher Kurvensatz) : Sei M eine zu S_R^n semialgebraisch isomorphe semialgebraische Teilmenge von S_R^{n+1} ($n \geq 1$). Dann hat $S_R^{n+1} - M$ zwei Zusammenhangskomponenten C_1, C_2 . M ist sowohl der Rand von C_1 als auch der Rand von C_2 .

Beweis : Es ist nur noch zu zeigen, daß $M = \mathrm{Rd}\ C_1 = \mathrm{Rd}\ C_2$ ist. Sei $x \in M$. Angenommen, x liegt nicht im Rand $\mathrm{Rd}\ C_1$ von C_1. Dann muß $x \in \mathrm{Rd}\ C_2$ sein, und eine einfache Überlegung zeigt, daß $S_R^{n+1} - (M - \{x\})$ aus den beiden Zusammenhangskomponenten C_1 und $C_2 \cup \{x\}$ besteht. Aus der Alexander-Dualität folgt : $\tilde{H}_o(S_R^{n+1} - (M - \{x\})) \cong \tilde{H}^n(M - \{x\})$.

Da $M - \{x\}$ isomorph zu R^n, also zusammenziehbar ist und $n \geq 1$ ist, ist $\tilde{H}^n(M - \{x\}) = 0$. Damit ist $S_R^{n+1} - (M - \{x\})$

zusammenhängend, und wir erhalten einen Widerspruch □

§ 11 Reell-etale Topologie

V sei eine algebraische R-Varietät. In diesem Abschnitt soll das reelle Analogon der Etaltopologie von V, die reell-etale Topologie V_{ret}, definiert und gezeigt werden, daß die Kategorie der abelschen Garben auf V_{ret} äquivalent zur Kategorie der abelschen Garben in der semialgebraischen Topologie $V(R)_{sa}$ von V(R) ist. Insbesondere läßt sich die Kohomologie $H^q(V(R),\mathfrak{F})$ von V mit Werten in einer beliebigen Garbe $\mathfrak{F}$ auf rein algebraischem Wege gewinnen.

M.F. Coste-Roy und M. Coste beweisen dies in etwas allgemeinerem Zusammenhang mit logischen und Topos-theoretischen Methoden: Sie definieren das reelle Spektrum $Spec_R A$ eines kommutativen Rings A und weisen nach, daß die Topoi zur reell-etalen Topologie von A bzw. zum reellen Spektrum von A gleich sind. Ist A der Koordinatenring der affinen R-Varietät V, so besteht V(R) aus den Punkten von $Spec_R A$ mit Restklassenkörper R und die auf V(R) induzierte Topologie ist die semialgebraische Topologie (vgl. [CRC], [C]).
Unser Beweis ist sehr einfach und geometrisch. Er stützt sich im wesentlichen auf die Tatsache, daß etale Morphismen lokale Homöomorphismen in der semialgebraischen Topologie induzieren und jede offene semialgebraische Teilmenge von V(R) das Bild der reellen Punkte einer etalen

V-Varietät V' ist.

<u>Definition 1 :</u> Sei $f : M \to N$ ein Morphismus zwischen semialgebraischen Räumen. f heißt lokaler Homöomorphismus, wenn es eine Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\dots,r}$ von M durch offene semialgebraische Teilmengen gibt, so daß für jedes i U_i durch f isomorph auf eine offene semialgebraische Teilmenge von N abgebildet wird.

<u>Satz 11.1 :</u> Sei $\Psi : V' \to V$ ein etaler Morphismus zwischen den R-Varietäten V' und V. Dann ist Ψ_R ein lokaler Homöomorphismus.

Beweis : Der Struktursatz über die lokale Gestalt etaler Morphismen (SGA 1, I, 7.6) lehrt uns, daß es genügt, die Behauptung für folgende Situation zu zeigen :

$$V = A^n_R \quad , \qquad V' = \mathrm{Spec}\left(R[X_1,\dots,X_n,T]/(f)\right)_{\frac{\partial f}{\partial T}} \quad ,$$

f ist ein in T normiertes Polynom ohne mehrfache irreduzible Faktoren, Ψ wird durch die Projektion $A^{n+1}_R \to A^n_R$ auf die ersten n Koordinaten induziert.

Wir wählen eine Zerlegung $R^n = \bigcup_{i=1}^{s} B_i$ von $R^n \equiv R^n \times \{0\} \subseteq R^{n+1}$ in disjunkte semialgebraische Teilmengen und semialgebraische Funktionen ξ^i_k auf B_k mit den Eigenschaften wie in Lemma 2.5. Dabei sei $M = R^n$, $\{P_1,\dots,P_r\} = \{f\}$, $N_j = \emptyset$ und $C_1 \equiv -\infty$, $C_2 = +\infty$ gesetzt. Aufgrund des Triangulierungssatzes 2.2 können wir annehmen, daß es eine Triangulierung $\kappa : \bigcup_{i=1}^{s} S_i \xrightarrow{\sim} R^n$ mit $\kappa(S_i) = B_i$ gibt, d.h., daß die Mengen B_i " offene Simplizes" sind. Aus Lemma 2.5 folgt : f besitzt, als Polynom in T betrachtet, über B_i eine konstante Anzahl einfacher reeller Nullstellen $\mu_1^i < \mu_2^i < \ldots < \mu_{m_i}^i$. Die μ_k^i sind semialgebraische Funktionen($\{\mu_1^i,\ldots,\mu_{m_i}^i\} \subseteq \{\xi_1^i,\ldots,\xi_{r_i}^i\}$). Ist B_i eine "Seite" von B_j, d.h., ist $B_i \subseteq \overline{B}_j$, so liegt $T_{ik} := \{(x,\mu_k^i(x)) \mid x \in B_i\}$ im Abschluß genau einer einfachen Wurzel über B_j, d.h., es gibt genau ein l, $1 \leq l \leq m_j$, mit $T_{ik} \subseteq \overline{T}_{jl}$. Dies folgt aus Lemma 2.5 und dem impliziten Funktionentheorem. Offenbar ist $V'(R) = \bigcup_{i,k} T_{ik}$.

$St(B_i) = \bigcup_{B_i \subseteq \overline{B}_j} B_j$ sei die Sternumgebung von B_i . Für $B_j \subseteq St(B_i)$ sei $l(k,j)$ das eindeutig bestimmte l mit $T_{ik} \subseteq \overline{T}_{jl}$.

Definiere die Abbildung $s_{ik} : St(B_i) \to V'(R)$ wie folgt :

Für $x \in B_j \subseteq St(B_i)$ sei $s_{ik}(x) := (x,\mu^j_{l(k,j)}(x))$.

s_{ik} ist ein Schnitt von Ψ_R und besitzt einen semialgebraischen Graph. Ist $B_i \subseteq \overline{B}_{j'} \subseteq \overline{B}_j$, so muß $T_{j'l(k,j')}$ in $\overline{T}_{jl(k,j)}$ liegen, da T_{ik} sowohl in $\overline{T}_{j'l(k,j')}$ als auch in $\overline{T}_{jl(k,j)}$ enthalten ist. Mit dem impliziten Funktionentheorem folgt, daß s_{ik} auch stetig ist, d.h., s_{ik} ist eine semialgebraische Abbildung.

$U_{ik} := \{s_{ik}(x) \mid x \in St(B_i)\}$ ist offen und semialgebraisch in $V'(R)$. $\Psi_R| U_{ik}$ ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung s_{ik}. Da $V'(R)$ durch die Mengen U_{ik} überdeckt wird, folgt die Behauptung □

<u>Satz 11.2 :</u> Sei V eine R-Varietät und U eine offene semialgebraische Teilmenge von $V(R)$.

Dann gilt :

i) Es gibt einen etalen Morphismus $\Psi : V' \to V$ mit

$\Psi(V'(R)) = U$.

ii) Ist V affin und U von der Gestalt

$\{x \in V(R) \mid f_1(x) > 0, \dots , f_r(x) > 0\}$

mit $f_1,\dots,f_r \in \Gamma(V,\mathcal{O}_V)$, so gibt es einen etalen Morphismus $\Psi : V' \to V$ mit folgender Eigenschaft :

Ψ_R ist eine 2^r-blättrige triviale Überlagerung von U, d.h., $V'(R)$ besitzt 2^r Komponenten B_i, $1 \leq i \leq 2^r$, und jede Komponente B_i wird semialgebraisch isomorph auf U abgebildet.

Beweis : Da sich jede offene semialgebraische Teilmenge U von $V(R)$ durch endlich viele Mengen der in ii) angegebenen Form überdecken läßt (Theorem 3.3), genügt es, ii) zu zeigen. Sei $V = \mathrm{Spec}(A)$ und $U = \{x \in V(R) | \ f_i(x) > 0, i=1,\dots,r\}$ mit Elementen f_i aus der endlich erzeugten R-Algebra A.

Setze

$$V_1 := \mathrm{Spec}({}^{A[T_1,\dots,T_r]}/_{(T_1^2 = f_1,\dots,T_r^2 = f_r)}).$$

$\chi : V_1 \to V$ sei der durch die Inklusion

$A \to A[T_1,\dots,T_r]/(T_1^2 = f_1,\dots,T_r^2 = f_r)$ induzierte Morphismus und V' die offene Untervarietät der Punkte von V_1, in denen χ etal ist. Dann ist offenbar

$$V'(R) = \left\{(x,t_1,\dots,t_r) \mid x \in V(R),\ f_i(x) \geq 0,\ i = 1,\dots,r,\ t_i = \pm\sqrt{f_i(x)}\right\}$$

und die Einschränkung $\Psi := \chi | V' : V' \to V$ hat die gewünschten Eigenschaften □

Sei V eine R-Varietät. Wir betrachten die Kategorie Et/V der etalen V-Schemata . Et/V besitzt endliche gefaserte Produkte, V ist ein finales Objekt in Et/V.

Wir nennen eine <u>endliche</u> Familie $\{V_i' \xrightarrow{f_i} V'\}$ von Morphismen in Et/V <u>reell-surjektiv</u> , wenn $V'(R) = \bigcup_i f_i(V_i'(R))$ ist.

Man stellt fest, daß die Menge aller endlichen reell-surjektiven Familien von Morphismen in Et/V den drei Überdeckungsaxiomen eines Situs genügt (vgl. [T] I.1.2.1 ; [A] I.0.1) und definiert die <u>reell-etale Topologie</u> V_{ret} von V durch :

i) Die Kategorie Cat V_{ret} von V_{ret} sei Et/V .

ii) Die Menge Cov(V_{ret}) der Überdeckungen bestehe aus den endlichen reell-surjektiven Familien von Morphismen in Et/V.

Um den nachfolgenden Vergleichssatz formulieren zu können, müssen wir statt der semialgebraischen Topologie $V(R)_{sa}$

den Situs $V(R)'_{sa}$ der lokalen semialgebraischen Homöomorphismen nach $V(R)$ betrachten :

Die Kategorie $Cat(V(R)'_{sa})$ besitze als Objekte alle lokalen Homöomorphismen $\Psi : M \to V(R)$ von semialgebraischen Räumen nach $V(R)$. Morphismen in $Cat(V(R)'_{sa})$ seien alle mit den Strukturmorphismen verträglichen semialgebraischen Abbildungen, d.h. $Hom\ (\ M \xrightarrow{\Psi} V(R),\ M' \xrightarrow{\Psi'} V(R)\ ) =$
$\left\{\ f\ :\ M \to M'\ \middle|\ f \text{ semialgebraisch, } \Psi' \circ f = \Psi\ \right\}$.

Überdeckungen in $V(R)'_{sa}$ seien alle <u>endlichen</u> Familien $\left\{M_i \xrightarrow{f_i} M\right\}$ von Morphismen mit $\bigcup_i f_i(M_i) = M$.

Man hat einen natürlichen Morphismus $\iota\ :\ V(R)_{sa} \to V(R)'_{sa}$ von Topologien : $U \mapsto (U \xrightarrow{incl} V(R))$. Dieser erfüllt die Voraussetzungen für das Vergleichslemma von Siten ([T] I.3.9.1; [A] III.1.3), woraus folgt :

ι_s und ι^s sind zueinander quasiinverse Äquivalenzen zwischen den Kategorien $\widetilde{V(R)}_{sa}$ und $\widetilde{V(R)}'_{sa}$ der abelschen Garben auf $V(R)_{sa}$ bzw. $V(R)'_{sa}$. Für die Kohomologietheorie abelscher Garben kann man deshalb $V(R)_{sa}$ durch $V(R)'_{sa}$ ersetzen.

Aus Satz 11.1 folgt, daß

$$\begin{aligned} \epsilon\ :\ V_{ret} \quad &\to \quad V(R)'_{sa} \\ (V' \xrightarrow{\Psi} V) &\mapsto (V'(R) \xrightarrow{\Psi_R} V(R)) \end{aligned}$$

ein Morphismus von Topologien ist. (Man beachte, daß ϵ gefaserte Produkte erhält.)

<u>Theorem 11.3</u> (Vergleichssatz) :

Sei V eine R-Varietät. Dann sind ϵ_s und ϵ^s zueinander quasiinverse Äquivalenzen zwischen den Kategorien $\widetilde{V}_{ret}$ und $\widetilde{V(R)}'_{sa}$ der abelschen Garben auf V_{ret} und $V(R)'_{sa}$. Insbesondere gilt für alle abelschen Garben $\mathfrak{F}$ auf $V(R)_{sa}$ und $\mathfrak{G}$ auf V_{ret} (und alle $q \geq 0$) :

$$H^q(V_{ret}, \epsilon^s \iota_s \mathfrak{F}) = H^q(V(R)_{sa}, \mathfrak{F}) \quad ,$$

$$H^q(V_{ret}, \mathfrak{G}) = H^q(V(R)_{sa}, \iota^s \epsilon_s \mathfrak{G}) \ .$$

Beweis : Wir zeigen, daß die Adjunktionsmorphismen

$$\rho : \mathrm{id} \to \epsilon^s \epsilon_s \quad ,$$

$$\mu : \epsilon_s \epsilon^s \to \mathrm{id}$$

Isomorphismen sind (vgl. [T] 0.1.1, 3.6.1).

$\mathfrak{F}$ sei eine Garbe auf V_{ret}. Der Homomorphismus $\rho_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \to \epsilon^s \epsilon_s \mathfrak{F}$ faktorisiert wie folgt ($V' \to V$ sei etal):

$$\rho_{\mathfrak{F}}(V'): \mathfrak{F}(V') \xrightarrow{(1)} (\epsilon_p \mathfrak{F})(V'(R)) \xrightarrow{(2)} (\epsilon_p \mathfrak{F})^{\#}(V'(R)) = \epsilon^s \epsilon_s \mathfrak{F}(V').$$

Dabei ist $(\epsilon_p \mathfrak{F})(V'(R)) = \varinjlim_{(W,\Phi)} \mathfrak{F}(W)$, der induktive Limes wird über die duale Kategorie $I^o_{V'(R)}$ der Kategorie $I_{V'(R)}$ der Paare (W, Φ), bestehend aus einem etalen V-Schema W und einem Morphismus $\Phi : V'(R) \to W(R)$ in $\mathrm{Cat}(V(R)'_{sa})$, gebildet. Zur Abkürzung schreiben wir V' statt $V' \to V$ und $V'(R)$ statt $V'(R) \to V(R)$. (1) ist der dem Paar

$(V', id_{V'(R)})$ entsprechende kanonische Homomorphismus $\mathfrak{J}(V') \to \epsilon_p\mathfrak{J}(V'(R))$. (2) ist der kanonische Homomorphismus von $\epsilon_p\mathfrak{J}$ in die assoziierte Garbe. Nun ist (V', id) ein finales Objekt in $I^o_{V'(R)}$ und es folgt aus der Definition des induktiven Limes : (1) ist ein Isomorphismus.

Es ist $(\epsilon_p\mathfrak{J})^{\#} = ((\epsilon_p\mathfrak{J})^+)^+$ und $(\epsilon_p\mathfrak{J})^+(V'(R)) =$ $\varinjlim \epsilon_p\mathfrak{J}(\{M_i\})$. Der induktive Limes wird gebildet über alle Überdeckungen $\{M_i \to V'(R)\}$ von $V'(R)$ in $V(R)'_{sa}$, $\epsilon_p\mathfrak{J}(\{M_i\}) =$ $= \{(s_i) \mid s_i \in \epsilon_p\mathfrak{J}(M_i),\ s_i|M_i \times_{V'(R)} M_j = s_j|M_i \times_{V'(R)} M_j\}$ sind die 0-Čech-Kozykel von $\epsilon_p\mathfrak{J}$ bezüglich der Überdeckung $\{M_i \to V'(R)\}$.

Wir betrachten nun eine Überdeckung $\{M_i \xrightarrow{\chi_i} V'(R)\}$ von $V'(R)$ in $V(R)'_{sa}$. Es gibt eine Überdeckung $\{M_{ij}\}_{j=1,\dots,r_i}$ von M_i durch offene semialgebraische Teilmengen, so daß χ_i jede der Mengen M_{ij} semialgebraisch isomorph auf eine offene semialgebraische Teilmenge W_{ij} von $V'(R)$ abbildet. Nach Satz 11.2 gibt es etale Morphismen $\Psi_{ij} : V_{ij} \to V'$ mit $(\Psi_{ij})_R(V_{ij}(R)) = W_{ij}$. Aus den kommutativen Diagrammen

$$\begin{tikzcd}
V_{ij}(R) \arrow[rr, "(\chi_i|M_{ij})^{-1}\circ(\Psi_{ij})_R"] \arrow[dr, "(\Psi_{ij})_R"'] & & M_i \arrow[dl, "\chi_i"] \\
& V'(R) &
\end{tikzcd}$$

lesen wir ab, daß $\{V_{ij}(R) \xrightarrow{(\Psi_{ij})_R} V'(R)\}_{i,j}$ eine Verfeinerung von $\{M_i \xrightarrow{\chi_i} V'(R)\}$ ist. Es folgt, daß es genügt, den induktiven Limes über die Überdeckungen $\{V_i(R) \xrightarrow{(\Psi_i)_R} V'(R)\}$ mit etalen Morphismen Ψ_i zu bilden :

$$(\epsilon_p\mathfrak{F})^+(V'(R)) = \varinjlim_{\{V_i \to V'\}} \epsilon_p\mathfrak{F}(\{V_i(R)\}) \; .$$

Oben haben wir aber bereits gesehen, daß für ein etales V'-Schema $\epsilon_p\mathfrak{F}(V_i(R)) = \mathfrak{F}(V_i)$ ist, also ist $(\epsilon_p\mathfrak{F})^+(V'(R)) = \varinjlim_{\{V_i \to V'\}} \mathfrak{F}(\{V_i\})$. Da $\mathfrak{F}$ eine Garbe auf V_{ret} ist, ist deshalb $(\epsilon_p\mathfrak{F})^+(V'(R)) = \mathfrak{F}(V')$. Eine Wiederholung desselben Arguments zeigt :

$$(\epsilon_p\mathfrak{F})^{\#}(V'(R)) = \mathfrak{F}(V') = \epsilon_p\mathfrak{F}(V'(R)).$$

Wir sehen, daß auch (2) und damit der Adjunktionsmorphismus ρ ein Isomorphismus ist.

Sei nun $\mathcal{G}$ eine Garbe auf $V(R)'_{sa}$. Wir müssen zeigen, daß $\mu_{\mathcal{G}} : \epsilon_s\epsilon^s\mathcal{G} \to \mathcal{G}$ ein Isomorphismus ist. Es ist $\epsilon_s\epsilon^s\mathcal{G} = (\epsilon_p\epsilon^s\mathcal{G})^{\#}$ und man weiß allgemein, daß für jeden lokalen Homöomorphismus $M \to V(R)$ (schreibe wieder kurz M) gilt :

$$\begin{tikzcd}
(\epsilon_p\epsilon^s\mathcal{G})^{\#}(M) \arrow[rr, "\mu_{\mathcal{G}}(M)"] & & \mathcal{G}(M) \\
\epsilon_p\epsilon^s\mathcal{G}(M) \arrow[u, "(2)"] \arrow[urr, "(3)"'] & &
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei (2) wieder der kanonische Homomorphismus einer Prägarbe in ihre assoziierte Garbe ist und die Abbildung

$$(\epsilon_p \epsilon^s \mathfrak{G})(M) = \varinjlim_{(W,\Phi)} \epsilon^s \mathfrak{G}(W) \xrightarrow{(3)} \mathfrak{G}(M)$$

($W \to V$ etal, $\Phi : M \to W(R)$ Morphismus in $\mathrm{Cat}(V(R)'_{sa}))$) durch die Restriktion $\epsilon^s\mathfrak{G}(W) = \mathfrak{G}(W(R)) \to \mathfrak{G}(M)$ induziert wird.

$V' \to V$ sei ein etales V-Schema. Da $\epsilon^s\mathfrak{G}$ eine Garbe auf V_{ret} ist, können wir die weiter oben festgestellten Tatsachen (für $\mathfrak{F} = \epsilon^s\mathfrak{G}$) anwenden : Für $M = V'(R)$ ist (2) ein Isomorphismus, ebenso (3), da (3) die zu $\mathfrak{G}(V'(R)) = \epsilon^s\mathfrak{G}(V') \to (\epsilon_p\epsilon^s\mathfrak{G})(V'(R))$ inverse Abbildung ist. Für $V' \xrightarrow{\text{etal}} V$ ist $\mu_{\mathfrak{G}}(V'(R))$ demnach ein Isomorphismus.

Sei nun $M \to V(R)$ ein beliebiger lokaler Homöomorphismus. Aus Satz 11.2 folgert man wieder, daß es Überdeckungen $\{V_i(R) \to M\}$ und $\{V_{ijk}(R) \to V_i(R) \times_M V_j(R)\}$ mit etalen V-Schemata V_i, V_{ijk} in $V(R)'_{sa}$ gibt. Für jede Garbe $\mathfrak{A}$ auf $V(R)'_{sa}$ ist

$$\mathfrak{A}(V_i(R) \times_M V_j(R)) \to \prod_k \mathfrak{A}(V_{ijk}(R))$$

injektiv. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \epsilon_s\epsilon^s\mathfrak{G}(M) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i \epsilon_s\epsilon^s\mathfrak{G}(V_i(R)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\cong"] & \prod_{i,j,k} \epsilon_s\epsilon^s\mathfrak{G}(V_{ijk}(R)) \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{G}(M) \arrow[r] & \prod_i \mathfrak{G}(V_i(R)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j,k} \mathfrak{G}(V_{ijk}(R))
\end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen folgt die Isomorphie von $\epsilon_s\epsilon^s\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$.

Theorem 11.3 ist damit bewiesen □

Wir merken noch an, daß man die Funktoren ϵ_s, ϵ^s, ι_s, ι^s auch für mengenwertige Garben definieren kann. Derselbe Beweis zeigt, daß Theorem 11.3 sogar für die Kategorien der Mengengarben richtig ist, d.h., der reell-etale Topos von V und der semialgebraische Topos von V sind äquivalent (vgl. [CRC]).

Wir hätten auch etwas allgemeiner statt V(R) eine offene semialgebraische Teilmenge U von V(R) betrachten können. Man darf dann nur etale Morphismen $V' \to V$ zulassen, die V'(R) nach U abbilden. An den Beweisen ändert sich nichts. Auch die Kohomologie abelscher Garben auf U läßt sich also "algebraisch" beschreiben. Ich habe auf diese allgemeinere Formulierung verzichtet, um eine "rein algebraische" Topologie V_{ret} zu erhalten, d.h., eine Topologie, in der von semialgebraischen Objekten keine Rede ist.

§ 12 Nashfunktionen

Wie im §11 sei V eine R-Varietät und V_{ret} die reell-etale Topologie von V. Man kann jede quasikohärente $\mathcal{O}_V$-Modulgarbe M auf V in der Zariski-Topologie etalisieren, d.h., man kann M in kanonischer Weise eine Garbe M_{et} auf dem etalen Situs V_{et} von V zuordnen: Ist $V' \xrightarrow{f} V$ ein etaler Morphismus, so ist $M_{et}(V') = \Gamma(V', M \otimes_V \mathcal{O}_{V'})$, wobei $M \otimes_V \mathcal{O}_{V'}$ das Urbild von M unter f in der Kategorie der Modulgarben bezeichne (vgl. [T],II,3.2 ; [MI] p. 48). Durch $(V' \to V) \mapsto M_{et}(V')$ wird aber auch eine Prägarbe auf dem reell-etalen Situs V_{ret} definiert, die assoziierte Garbe sei M_{ret}. Speziell interessieren wir uns für die "reell-etalisierte" Strukturgarbe $\mathcal{O}_{V\,ret}$ von V. $\mathcal{O}_{Vret}$ ist die zu $(V' \to V) \mapsto \Gamma(V', \mathcal{O}_{V'})$ assoziierte Garbe. Besitzt V' keine reellen Punkte, so ist $\mathcal{O}_{V\,ret}(V') = 0$. Der Funktor $i^s \varepsilon_s$ ist eine Äquivalenz zwischen den Kategorien der abelschen Garben auf V_{ret} bzw. auf $V(R)_{sa}$. Wir nennen die Garbe $\mathfrak{N}_V := i^s \varepsilon_s(\mathcal{O}_{V\,ret})$ die Garbe der <u>Nashfunktionen</u> auf V. $\mathfrak{N}_V$ ist die zu

$$U \mapsto \varinjlim_{I_U^o} \Gamma(V', \mathcal{O}_{V'})$$

assoziierte Garbe. I_U^o ist dabei die duale Kategorie zur Kategorie I_U der Paare (V',s) mit einem etalen V-Schema V' und einem semialgebraischen Schnitt $s : U \to V'(R)$:

$$\begin{tikzcd} & V'(R) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & V' \arrow[d] \\ U \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[ur, "s"] & V(R) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & V \end{tikzcd}$$

Morphismen von (V',s) nach (V'',s') in I_U sind die V-Morphismen $f: V' \to V''$ in der Kategorie der Schemata mit $f_R \circ s = s'$. Die Prägarbe $N_V: U \mapsto \varinjlim_{I_U^o} \Gamma(V',\mathcal{O}_{V'})$ ist separiert, so daß $\mathfrak{N}_V = N_V^+$ ist, d.h., $\mathfrak{N}_V(U) = \varinjlim_{\{U_i\}} N_V(\{U_i\})$, wobei der induktive Limes über alle Überdeckungen von U gebildet wird und $N_V(\{U_i\}) = \{(f_i) \mid f_i \in N_V(U_i),\ f_i|U_i \cap U_j = f_j| U_i \cap U_j\}$ ist. Jeder Schnitt $g \in N_V(U)$ und damit auch jeder Schnitt aus $\mathfrak{N}_V(U)$ kann wie folgt als Funktion auf U interpretiert werden : g ist das Bild eines Schnitts $f \in \Gamma(W,\mathcal{O}_W)$ unter dem kanonischen Homomorphismus $\Gamma(W,\mathcal{O}_W) \to \varinjlim \Gamma(V',\mathcal{O}_{V'})$, wobei $W \to V$ ein etales V-Schema ist und ein semialgebraischer Schnitt $s : U \to W(R)$ existiert. Die Funktion $\tilde{g} := f_R \circ s$ auf U hängt nur von g ab.

Allerdings ist $\tilde{g}$ durch g im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt : Besteht V(R) z.B. nur aus singulären Punkten von V, so gibt es i. a. Elemente $f \in \Gamma(V,\mathcal{O}_V)$, $f \neq 0$, mit $f_R = 0$. Das durch f definierte Element $g \in N_V(V(R))$ ist dann nicht null, während $\tilde{g}$ verschwindet. Setzen wir V als glatt voraus, so treten diese Schwierigkeiten nicht auf. Wir werden sehen, daß in diesem Fall schon N_V eine Garbe ist, d.h. insbesondere stimmt unsere Definition der Nashfunktion für den Spezialfall $V = \underline{\overline{A^n_{\mathbb{R}}}}$ mit der klassischen, wie sie von Artin und Mazur ([AM]) gegeben wurde, überein.

<u>Lemma 12.1 :</u> Sei V eine irreduzible R-Varietät und $f \in \Gamma(V,\mathcal{O}_V)$. f_R verschwinde auf einer offenen nichtleeren semialgebraischen Teilmenge U von $V_{reg}(R)$ (, wobei V_{reg} die offene Untervarietät der regulären Punkte von V bezeichne). Dann ist $f = 0$.

Beweis : Sei dim V = m. f verschwindet auf dem Zariski-Abschluß W von U in V. U ist aber eine semialgebraische Menge der Dimension m ([DK II]), d.h., es ist W =V □

Für jede offene semialgebraische Teilmenge U von V(R) sei $\tilde{N}_V(U)$ der Ring aller semialgebraischen Funktionen der Form $\tilde{g}$ auf U mit $g \in N_V(U)$. $\tilde{\mathfrak{N}}_V$ sei die zur Prägarbe $\tilde{N}_V$ assoziierte Garbe auf $V(R)_{sa}$.

Mit Lemma 1 können wir nun mühelos beweisen :

<u>Satz 12.2 :</u> Sei V eine R-Varietät. Dann ist

$$\mathfrak{N}_V \mid V_{reg}(R) = \tilde{\mathfrak{N}}_V \mid V_{reg}(R) \quad .$$

Beweis : Wir haben einen kanonischen surjektiven Prägarbenhomomorphismus $N_V \to \tilde{N}_V$. Ist $V' \xrightarrow{f} V$ etal, so ist $V'_{reg} = f^{-1}(V_{reg})$. Aus Lemma 12.1 und den Definitionen folgt des-ist, was man sich leicht überlegt, folgt : Für alle $x \in V(R)$ ist $\mathfrak{N}_{V,x} \cong \mathcal{O}^h_{V,x}$.

Wir setzen ab jetzt voraus, daß die R-Varietät V glatt ist, und werden zeigen, daß dann bereits N_V eine Garbe ist. Dabei verwenden wir die sogenannte

<u>kanonische Repräsentation</u>

(vgl. [AM]).

Sei U eine offene und zusammenhängende semialgebraische Teilmenge von V(R). $V' \xrightarrow{p} V$ sei ein etales V-Schema und $s : U \to V'(R)$ ein semialgebraischer Schnitt. Durch $f \in \Gamma(V',\mathcal{O}_{V'})$ wird eine "global definierte" Nashfunktion $\tilde{f} = f_R \circ s$ auf U gegeben. Die irreduziblen Komponenten von V und V' können sich nicht treffen, da beide Varietäten glatt sind. U und s(U) sind zusammenhängend und deshalb in jeweils einer irreduziblen Komponente von V bzw. V' enthalten, so daß wir ohne Einschränkung ab jetzt voraussetzen, daß V und V' irreduzibel sind. $G(\tilde{f}) = \{(x,\tilde{f}(x)) \mid x \in U\} \subseteq V(R) \times R$ sei der Graph von $\tilde{f}$, W sein Zariski-Abschluß in $V \times_R A^1_R$.

<u>Hilfssatz 1 :</u> Der Zariski-Abschluß des Bildes $p \times f\,(V')$ von V' unter dem Morphismus $p \times f : V' \to V \times_R A^1_R$ in $V \times A^1_R$ ist W. Es ist $\dim V = \dim V' = \dim W$.

Beweis : Sei $m = \dim V$. Dann ist auch $\dim V' = m$. Der Zariski-

Abschluß W' von $p \times f\ (V')$ ist eine irreduzible Varietät der Dimension $\leq m$. Die semialgebraische Menge $G(\tilde{f})$ hat die Dimension m und ist in W' enthalten. Deshalb ist $\dim W' = m$ und $W' = W$ $\square$

$\bar{W} \xrightarrow{\pi} W$ sei die Normalisierung von W. Da V' glatt ist, faktorisiert $p \times f$ in eindeutiger Weise über $\bar{W}$:

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "p \times f"'] & \bar{W} \arrow[d, "\pi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Sei $x \in U$, $y := s(x)$, $z := h(y)$, $t := h_R \circ s$.

$pr_1 : W \to V$ sei der durch die Projektion von $V \times_R A^1_R$ auf V induzierte Morphismus und $q := pr_1 \circ \pi$. Dann ist t ein semialgebraischer Schnitt von q .

<u>Hilfssatz 2 :</u> q ist in z etal .

Beweis : Sei $\hat{\mathcal{O}}_{\bar{W},z}$ die Komplettierung von $\mathcal{O}_{\bar{W},z}$ und $\hat{\mathcal{O}}_{V,x}$ die Komplettierung von $\mathcal{O}_{V,x}$. Es genügt zu zeigen, daß q einen Isomorphismus $\hat{\mathcal{O}}_{V,x} \to \hat{\mathcal{O}}_{\bar{W},z}$ induziert (SGA 1,I,4.4). Der etale Morphismus p induziert einen Isomorphismus $p^* : \mathcal{O}^h_{V,x} \to \mathcal{O}^h_{V',y}$. q^* sei der von q induzierte Homomorphismus $\mathcal{O}^h_{V,x} \to \mathcal{O}^h_{\bar{W},z}$ und h^* der von h induzierte $\mathcal{O}^h_{\bar{W},z} \to \mathcal{O}^h_{V',y}$. Wir zeigen, daß h^* ein Isomorphismus ist, woraus die Behauptung folgt. Die Gleichung $h^* \circ q^* \circ p^{*-1} = (q \circ h)^* \circ p^{*-1} = p^* \circ p^{*-1} = \mathrm{id}$ lehrt uns, daß h^* surjektiv ist. Der Kern Ker h^* von h^* ist ein Primideal von $\mathfrak{O}^h_{\overline{W},z}$. Da sowohl $\mathfrak{O}^h_{\overline{W},z}$ als auch $\mathfrak{O}^h_{V',y}$ ein Integritätsring der Dimension m ist, muß Ker $h^* = 0$ sein und h^* ist ein Isomorphismus $\square$

W' sei das offene Unterschema der Punkte von $\overline{W}$, in denen q etal ist. Nach Hilfssatz 2 bildet der Schnitt t die Menge U nach $W'(R)$ ab.

$pr_2 : W \to A^1_R$ sei der durch die Projektion von $V \times A^1_R$ nach A^1_R induzierte Morphismus. Dann ist $pr_2 \circ \pi \circ h = \tilde{f}$ und wir sehen, daß $pr_2 \circ \pi$ diesselbe Nashfunktion $\tilde{f}$ auf U wie f repräsentiert, d.h., für alle $x \in U$ ist $\tilde{f}(x) = (pr_2 \circ \pi) \circ t(x)$. Man sollte noch anmerken, daß der Schnitt t nur von $\tilde{f}$, d.h. nicht von der speziellen Wahl von V', s und f abhängt.

Die Darstellung von $\tilde{f}$ in der Form $pr_2 \circ \pi \circ t$ heißt die <u>kanonische Repräsentation von $\tilde{f}$</u>.

<u>Satz 12.3 :</u> Sei V eine glatte R-Varietät. Dann ist N_V bereits eine Garbe, d.h., N_V ist die Garbe der Nashfunktionen auf $V(R)$.

Beweis : U sei eine offene, zusammenhängende, semialgebraische Teilmenge von $V(R)$. $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$ sei eine Überdeckung von U durch zusammenhängende offene Teilmengen U_i. Es seien Schnitte $f_i \in N(U_i)$ mit $f_i|U_i \cap U_j = f_j|U_i \cap U_j$ gegeben. Zu zeigen ist, daß genau ein $f \in N(U)$ mit $f|U_i = f_i$ existiert. Die Eindeutigkeit ist klar. W_i sei der Zariski-Abschluß des Graphen

$G(f_i)$ von f_i in $V \times A^1_R$; $\bar{W}_i \xrightarrow{\pi_i} W_i$ eine Normalisierung, W_i' die offene Untervarietät von $\bar{W}_i$, auf der $q_i = pr_{1i} \circ \pi_i$ etal ist, $t_i : U_i \to W_i'$ der oben definierte semialgebraische Schnitt von q_i und $pr_{2i} \circ \pi_i \circ t_i$ die kanonische Repräsentation von f_i (alle Bezeichnungen analog wie oben). Dann ist $W_i = W_1$ für $i = 1,\dots,n$. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, daß $J := \{i \mid G(f_i) = W_i = W_1\} \neq \{1,\dots,n\}$ ist. Da U zusammenhängend ist, gibt es ein $i \in J$ und ein $i' \notin J$ mit $U_i \cap U_{i'} \neq \emptyset$. Die semialgebraische Menge $G(f_{i'} | U_i \cap U_{i'})$ hat die Dimension dim V und ist in W_i enthalten. Da nach Hilfssatz 1 W_i irreduzibel ist und dim W_i = dim V ist, ist W_i der Zariski-Abschluß von $G(f_{i'} | U_i \cap U_{i'})$ und damit im Zariski-Abschluß $W_{i'}$ von $G(f_{i'})$ enthalten. Aber auch W_i' ist irreduzibel und hat die Dimension dim V (Hilfssatz 1). Also ist $W_{i'} = W_i = W_1$, und wir erhalten einen Widerspruch.

Es ist also tatsächlich $W_i = W_1$ für $i = 1,\dots,n$, und wir können annehmen, daß $\bar{W}_i = \bar{W}_1$ und $\pi_i = \pi_1$ ist. Die Schnitte $t_i : U_i \to W_1'(R)$ setzen sich dann zu einem Schnitt t von U nach $W_1'(R)$ zusammen und wir erhalten die gesuchte Nashfunktion f durch $f := pr_2 \circ \pi_1 \circ t$ □

Es folgt der Identitätssatz für Nashfunktionen.

<u>Korollar 12.4 :</u> Sei U eine offene, zusammenhängende semialgebraische Teilmenge der glatten R-Varietät V. Die Nash-

funktion $f \in \mathfrak{N}_V(U)$ verschwinde auf der offenen Teilmenge U' von U. Dann ist $f = 0$.

Beweis : Nach Satz 11.3 ist $f \in N(U)$, d.h., es gibt ein etales V-Schema V', einen semialgebraischen Schnitt $s : U \to V'(R)$ und ein Element $g \in \Gamma(V', \mathcal{O}_{V'})$ mit $f = g_R \circ s$. Da $s(U)$ zusammenhängend und V' glatt ist, dürfen wir annehmen, daß V' irreduzibel ist. Es ist $g_R | s(U') = 0$ und wir folgern aus Lemma 12.1, daß $g = 0$ und damit $f = 0$ ist $\square$

<u>Bemerkung:</u> Aus dem Beweis des Triangulierungssatzes (Theorem 2.2) läßt sich ablesen, daß sich die dortige Behauptung folgendermaßen ergänzen läßt :

$\kappa | S_i : S_i \to \kappa(S_i)$ ist ein Nashisomorphismus, d.h.,die Komponenten von $\kappa | S_i$ und $\kappa^{-1} | S_i$ (als Abbildungen nach R^n betrachtet) sind Nashfunktionen.(Man beachte, daß sich S_i und $\kappa(S_i)$ als offene Teilmengen von glatten algebraischen Varietäten auffassen lassen.)

Überhaupt sind viele der in dieser Arbeit auftretenden semialgebraischen Abbildungen in Wahrheit sogar Nashabbildungen.

Für den Ring N(U) der Nashfunktionen auf einer offenen semialgebraischen Teilmenge U einer glatten R-Varietät V lassen sich viele Ergebnisse der klassischen Theorie über den reellen Zahlen ebenfalls beweisen. Ich will hier nur einige Resultate aufzählen. Auf Beweise muß ich leider verzichten, da dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Man kann sie aber ähnlich wie im klassischen Fall führen, nur muß man alle analytischen Beweisschritte ersetzen, was mit der kanonischen Repräsentation auch möglich ist.

Satz 12.5 : Die maximalen Ideale von N(U) entsprechen eineindeutig den Punkten von U .

Beweis wie in [E] .

Theorem 12.6 : N(U) ist noethersch .

Man vgl. [E], [R], [D] .

Mit Hilfe der Beschreibung abgeschlossener semialgebraischer Teilmengen in Theorem 3.4 läßt sich der Trennungssatz von Mostowski für den Fall $U = R^n$ wie in [E1], [D] und dann allgemein wie in [BE] beweisen :

Theorem 12.7 : Seien C_1 und C_2 abgeschlossene semialgebraische Teilmengen von U. Dann gibt es eine Nashfunktion $f \in N(U)$ mit $f(C_1) < 0$ und $f(C_2) > 0$.

Mit Hilfe des Trennungssatzes und der kanonischen Repräsentation läßt sich dann ähnlich wie in [E] bzw. [BE], allerdings noch etwas einfacher als dort (vgl. [D]), die Substitutionsformel zeigen :

Theorem 12.8 : Sei $\tilde{R} \supseteq R$ ein reell abgeschlossener Oberkörper von R und $\chi : N(U) \to \tilde{R}$ ein R-Homomorphismus. V sei eingebettet in A_R^n. $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$ seien die durch die Koordinaten von R^n auf U gegebenen Nashfunktionen.
Dann ist $\chi(\overline{x}) := (\chi(\overline{x}_1), \dots, \chi(\overline{x}_n))$ in $\tilde{U}$ (vgl. § 9) und es gilt für alle $f \in N(U)$:

$$\tilde{f}(\chi(\overline{x})) = \chi(f) .$$

Theorem 7 und Theorem 8 lassen sich selbstverständlich in der etwas allgemeineren Form wie in [BE] formulieren, ebenso wie die Null- und Positivstellensätze in N(U), die man in bekannter Weise (z.B. [D]) aus der Substitutionsformel bekommt. Als Beispiele seien genannt :

Theorem 12.9 : (Nullstellensatz) :
Sei I ein Ideal von N(U) und $Z(I) = \{x \in U \mid f(x)=0 \ \forall f \in I\}$.
Dann ist

$$\{g \in N(U) \mid g|Z(I) = 0\} = \{g \in N(U) \mid \text{Es gibt } f_i \in N(U) \text{ und } m \in \mathbb{N} \text{, so daß } g^{2m} + f_1^2 + \dots + f_s^2 \in I \text{ ist}\}.$$

Theorem 12.10 (Hilberts 17tes Problem) :

Eine Nashfunktion f auf U ist genau dann positiv definit, d.h., $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in U$, wenn es eine Darstellung

$$f^{2m+1} + \left(\sum_{i=1}^{s} h_i^2\right) \cdot f = \sum_{j=1}^{r} g_j^2$$

mit Elementen h_i, $g_j \in N(U)$ gibt.

Literatur

[A] M. Artin, Grothendieck Topologies, Harvard University, 1962 .

[AM] M. Artin und B. Mazur, On periodic points, Ann. of Math. 81 (1965), 82 - 99 .

[BE] J. Bochnak und G. Efroymson, Real algebraic geometry and the 17^{th} Hilbert Problem, Technical Report no. 359, Dep. of Math. and Stat., The University of New Mexico (1978) .

[B] G.W. Brumfiel, Partially ordered rings and semi-algebraic geometry, Cambridge University Press , 1979.

[CO] P.J. Cohen, Decision procedures for real and P-adic fields, Comm. Pure Appl. Math. 22 (1969), 131 - 151.

[C] M.F. Coste-Roy, Spectre réel d' un anneau et topos étale réel, Thèse, Université Paris Nord (1980).

[CRC] M.F. Coste-Roy und M. Coste, Le spectre étale réel d' anneau est spatial, C.R. Acad. Sci. Paris 290, (1980), 91 - 94 .

[D] H. Delfs, Null- und Positivstellensätze in Nash- und Polynomringen, Diplomarbeit, Regensburg (1978).

[DK] H. Delfs und M. Knebusch, Semialgebraic topology over a real closed field I, II , erscheint demnächst .

[DO] A. Dold, Lectures on algebraic topology, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972 .

[E] G. Efroymson, A Nullstellensatz for Nash rings, Pacific J. Math. 54 (1974), 101 - 112 .

[E_1] G. Efroymson, Substitution in Nash functions, Pacific J. Math. 63 (1976), 137 - 145 .

[EGA IV] A. Grothendieck und J. Dieudonné, Elements de Geometrie Algébrique IV, Publ. Math. I.H.E.S. .

[G] R. Godement, Théorie des faisceaux, Paris, Herrmann 1958 .

[GR] A. Grothendieck, Sur quelques points d' algèbre homologique, Tohoku Math. Journ. t. IX, 1957, 119 - 221.

[H] H. Hironaka, Triangulation of algebraic sets, Proc. Amer. Math. Soc. , Symp. in Pure Math. 29 (1975), 165 - 185 .

[M] C.R.F. Maunder, Algebraic topology, Van Nostrand Reinhold Company, London 1970 .

[MI] J.S. Milne, Étale cohomology, Princeton University Press, Princeton, New Yersey 1980.

[R] J. Risler, Sur l' anneau des fonctions de Nash globales, Ann. de l' Ecole Normale 8 (1975) , 365 - 378 .

[SE] A. Seidenberg , A new decision method for elementary algebra, Ann. of Math. 60 (1954), 365 - 374 .

[S] E.H. Spanier, Algebraic topology, Mc Graw Hill Book Company, New York, 1966.

[SGA 1] A. Grothendieck, Revêtements étales et groupe fondamentale, Springer, Lect. Notes in Math. 224.

[T] G. Tamme, Einführung in die etale Kohomologie, Vorlesung, Göttingen 1976; Der Regensburger Trichter 17, Fak. für Math., Universität, Regensburg 1980.

[W] H. Whitney, Elementary structure of real algebraic varieties, Ann. of Math. 66 (1957), 545 - 556 .