

Faut-il mettre le poêle au centre de la pièce ?

Virginie BONNAILLIE-NOËL

IRMAR, Université Rennes 1 et ENS Cachan, antenne de Bretagne

APMEP, Grenoble



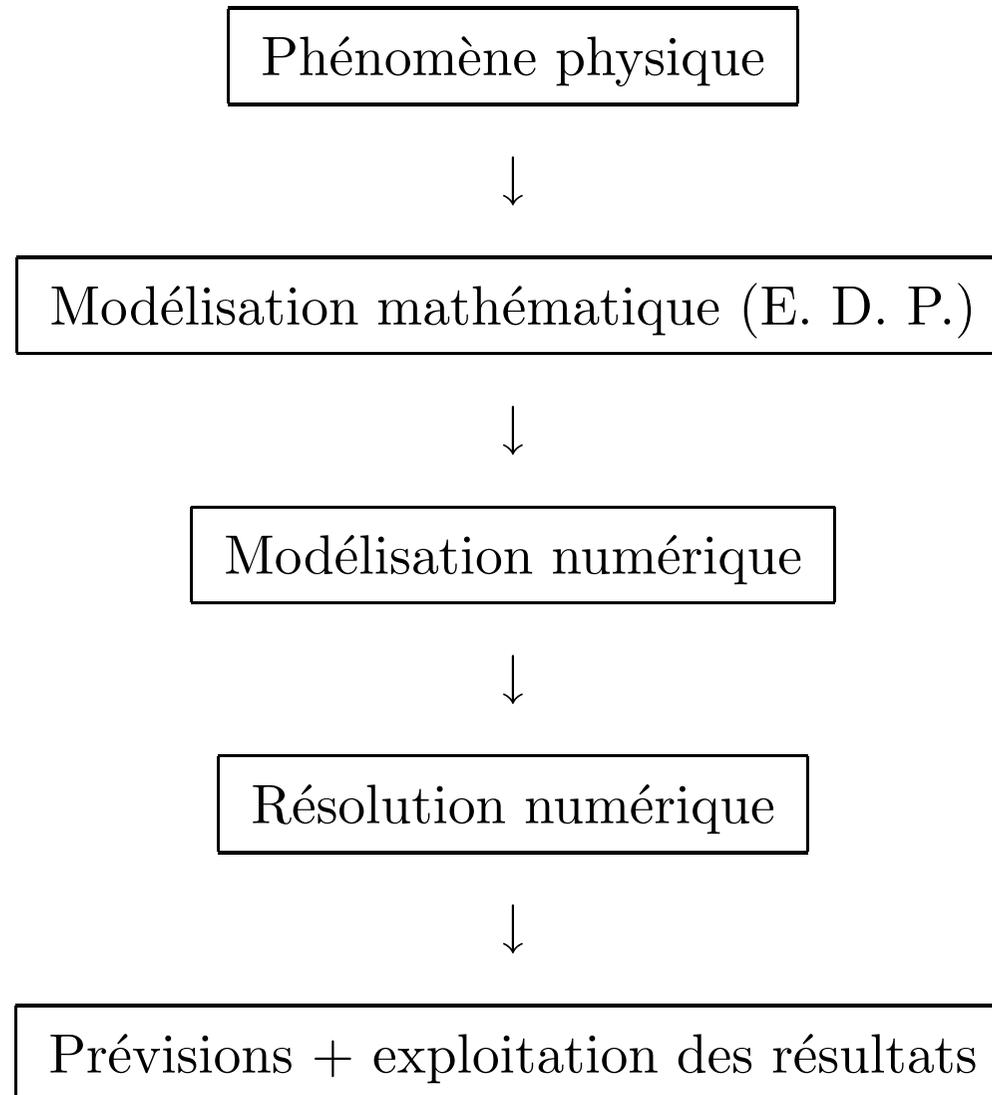
22 mars 2006



Plan de l'exposé

1. Les mathématiques au service de la physique
2. Équation de la chaleur en dimension 1
 - (a) Modélisation
 - (b) Résolution explicite
 - (c) Fourier et ses séries...
 - (d) La méthode des différences finies
3. Équation de la chaleur en dimension 2
 - (a) Problème physique
 - (b) Modélisation mathématique
 - (c) Modélisation numérique
4. Quelques mots sur la supraconductivité

Les mathématiques au service de la physique



Équation de la chaleur en dimension 1

Modélisation

Expérience

- deux barres métalliques (acier et cuivre) de même section et de même longueur
- On chauffe à la température constante T_0 une extrémité de ces barres
- On attend que les températures en tout endroit de la barre se stabilisent

Constatations

- Les températures aux autres extrémités de la barre, T_1 et T_2 , sont inférieures à T_0
- La température de la barre en cuivre T_1 est supérieure à celle de la barre en acier T_2

Explications

- La chaleur se propage de l'extrémité chaude de la barre vers l'autre extrémité par *conduction*
- Une partie de la chaleur est évacuée par la surface latérale de la barre par *convection* et *rayonnement*

⇒ les températures T_1 et T_2 sont inférieures à T_0

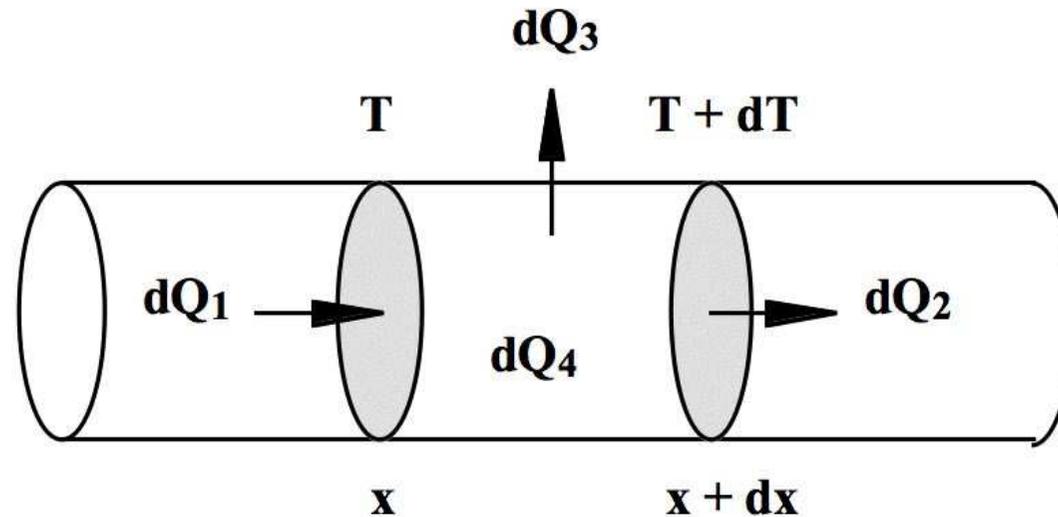
- À convection et rayonnement identiques, tous les matériaux n'ont pas la même *conductivité thermique*

⇒ les températures T_1 et T_2 sont différentes

Autre expérience

- On suppose que la température T_0 varie au cours du temps (de façon périodique)
- La température en un point de la barre aura également une *variation périodique* mais *amortie*
- La vitesse de propagation de "l'onde de chaleur" dépend de la *diffusivité thermique*

Mise en équation



On place la barre dans l'air ambiant à la température T_0

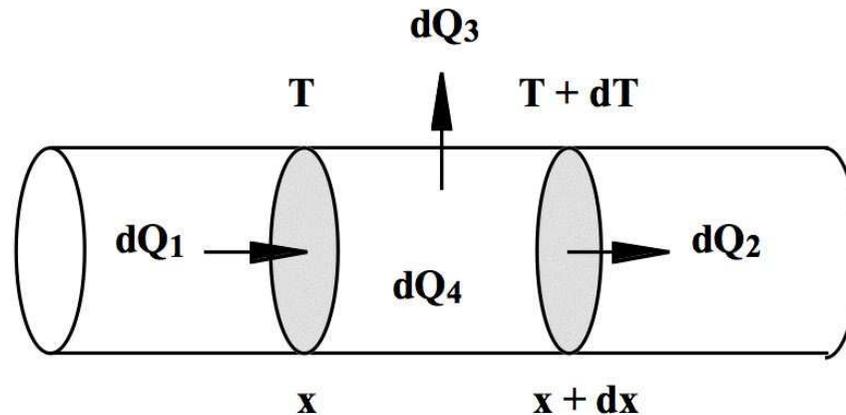
S section de la barre

P périmètre de la section

$T(x)$ température à l'abscisse x

Simplification : on suppose que la température est uniforme dans la section droite de la barre (la longueur de la barre est grande devant son diamètre)

Bilan thermique



- tranche de la barre entre les abscisses x et $x + dx$
- bilan thermique de cette tranche :
pendant le temps dt ,
 - une quantité de chaleur dQ_1 entre en x ,
 - une quantité de chaleur dQ_2 sort en $x + dx$,
 - une quantité de chaleur dQ_3 sort par la paroi latérale

La quantité de chaleur $dQ_4 = dQ_1 - (dQ_2 + dQ_3)$ permet d'élever de dT la température de la tranche

Conduction

Loi de Fourier : la densité de flux de chaleur est proportionnelle au gradient de température. Le transfert de chaleur a lieu spontanément d'une région de température élevée vers une région de température plus basse.

k conductivité thermique

$$dQ_1 = -kS \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x dt, \quad dQ_2 = -kS \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} dt$$

Convection et rayonnement

h coefficient d'échange de surface

$$dQ_3 = h P dx(T - T_0) dt$$

Diffusion

C chaleur massique

quantité d'énergie nécessaire pour élever 1 kg de substance de 1 degré

ρ masse volumique

$$dQ_4 = \rho C S dx \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt$$

Bilan thermique

$$dQ_1 = dQ_2 + dQ_3 + dQ_4$$

$$-kS \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x dt = -kS \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} dt + h P dx (T - T_0) dt + \rho C S dx \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dt$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\rho C} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_x}{dx} = \frac{P}{S} \frac{h}{\rho C} (T - T_0) + \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)$$

Posons $u = T - T_0$ et $D = \frac{k}{\rho C}$ (diffusivité thermique), alors

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{S} \frac{h}{\rho C} u$$

Discussion sur les conditions

On néglige la convection et le rayonnement.

1. Résolution avec condition initiale

On connaît les températures en tout point de la barre à l'instant initial, $u(x, 0)$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Résolution avec condition au bord

On fixe la température à un endroit de la barre.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) = f(t), & t > 0. \end{cases}$$

3. Problème mixte

On fixe la température aux extrémités de la barre et on connaît la température en chaque point de la barre initialement.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1. \end{array} \right.$$

Théorème. On suppose que la solution est régulière, alors

$$\int_0^1 u^2(x, t) dx \leq e^t \left(\int_0^1 u_0^2(x) dx + \int_0^t \int_0^1 f^2(x, s) dx ds \right), \quad \forall 0 < t < T.$$

Lemme de Gronwall. Soit ϕ une fonction positive définie sur \mathbb{R}^+ et soit A et B deux réels positifs tels que

$$\phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Alors, $\phi(t) \leq Ae^{Bt}$, pour tout $t \geq 0$.

Preuve : Posons $\psi(t) = A + B \int_0^t \phi(s) ds$. Alors

$$\psi(t) \geq \phi(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Dérivons :

$$\psi'(t) = B\phi(t) \leq B\psi(t) \quad \Rightarrow \quad \psi'(t) - B\psi(t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Multiplions par e^{-Bt} et intégrons : $\int_0^t e^{-Bs}(\psi'(s) - B\psi(s)) ds \leq 0$.

Intégrons par parties :

$$\int_0^t e^{-Bs} \psi'(s) ds = B \int_0^t e^{-Bs} \psi(s) ds + e^{-Bt} \psi(t) - \psi(0)$$

$$\Rightarrow \quad \psi(t) \leq \psi(0)e^{Bt} = Ae^{Bt}.$$

Preuve du théorème : multiplions la relation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t)$$

par u et intégrons en x entre 0 et 1, alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2(x, t) dx + D \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x, t) dx = \int_0^1 f(x, t) u(x, t) dx.$$

Intégrons en t entre 0 et T

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(x, T) dx - \frac{1}{2} \int_0^1 u_0^2(x) dx + D \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2(x, t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 f(x, t) u(x, t) dx dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 f^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 u^2(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

On applique le Lemme de Gronwall avec

$$\phi(t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx, \quad A = \int_0^1 u_0^2(x) dx + \int_0^T \int_0^1 f^2(x, t) dx dt, \quad B = 1$$

Résolution explicite

Problème mixte

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0, \quad (CL) \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1. \quad (CI) \end{array} \right.$$

On suppose $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

Méthode : séparation des variables

On cherche une solution de la forme

$$u(x, t) = f(x) g(t).$$

L'équation de la chaleur se réécrit

$$f(x) g'(t) = f''(x) g(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = \lambda \quad \text{constante}$$

Si $\lambda \geq 0$, alors $f(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x}$.

(CL) $\Rightarrow u(x, t) = 0$.

Si $\lambda < 0$, alors $f(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x)$ avec $\omega^2 = -\lambda$.

(CL) $\Rightarrow B = 0$ et $\omega = \omega_n = n\pi$.

$$u(x, t) = e^{-\omega_n^2 t} \sin(\omega_n x).$$

Température oscillante

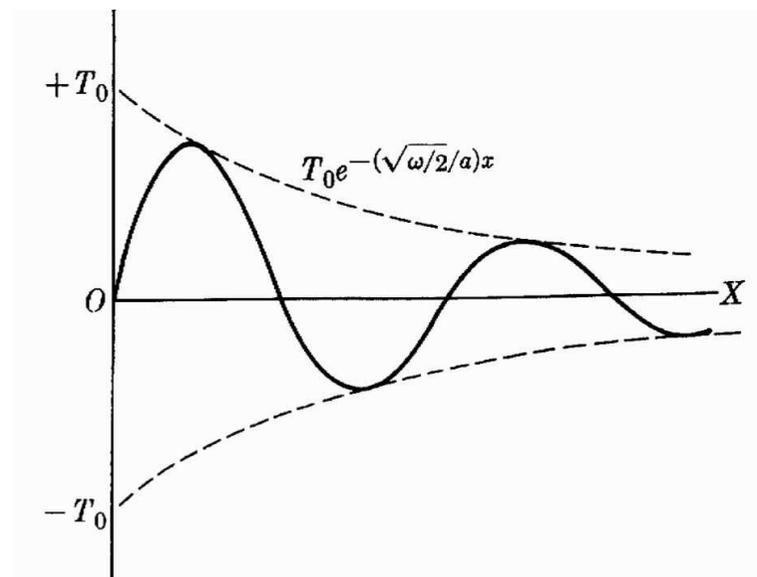
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) = T_0 \exp(-i\omega t), & t > 0. \end{cases}$$

Solution générale de la forme $u(x, t) = T_0 f(x) \exp(-i\omega t)$. Alors

$$f'' + i\frac{\omega}{D}f = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \exp(-\alpha x), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1 - i)$$

Ainsi

$$u(x, t) = T_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right) \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}x\right)$$



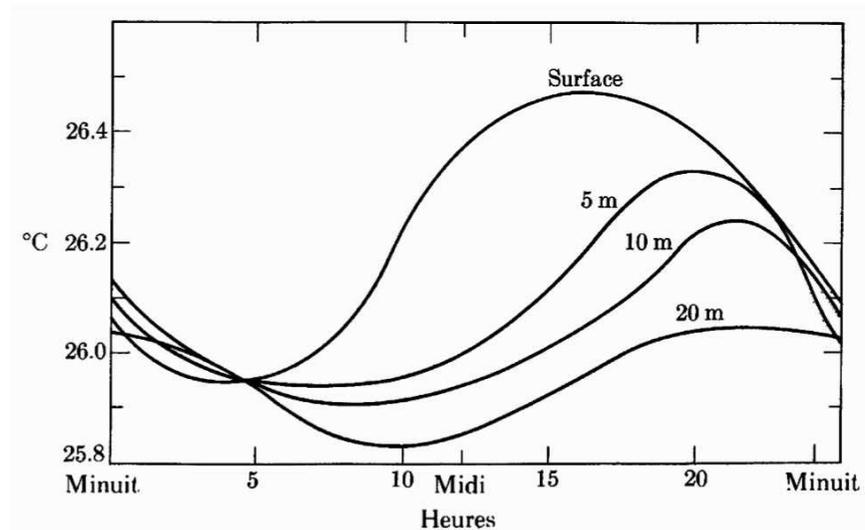
Application

À la surface du globe, les températures oscillent.

$1/\alpha$: profondeur caractéristique du sol au-delà de laquelle les variations seront amorties.

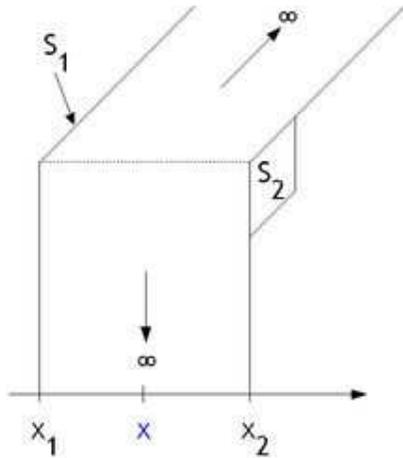
(ex : épaisseur de la partie gelée d'un sol)

Pour l'océan : variations importantes jusqu'à 20m.



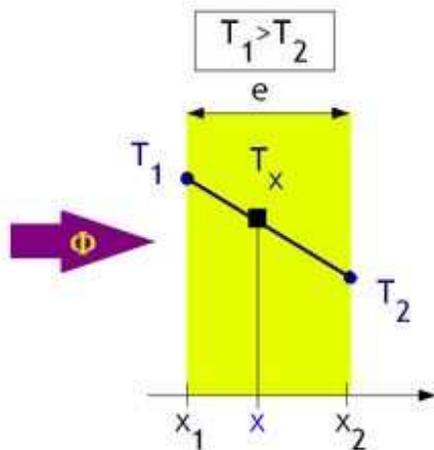
Effet d'un isolant

1. Cas d'un mur simple



Mur = milieu conducteur thermiquement limité par deux plans parallèles.

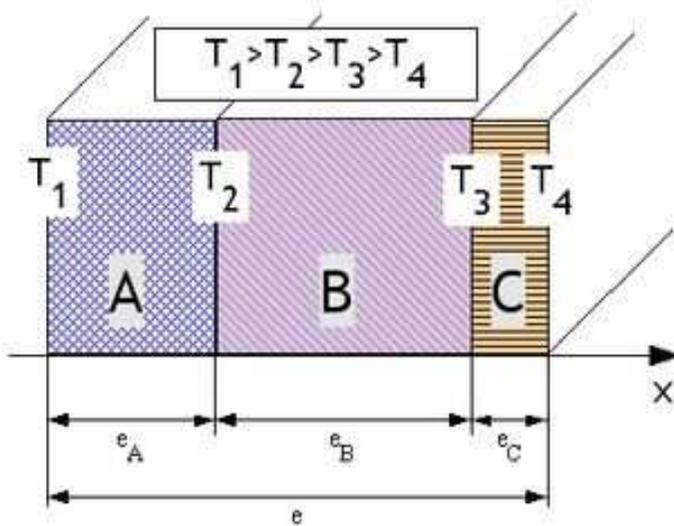
Température homogène sur toute la surface.



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{const.} = \frac{-\phi}{k}, \quad \phi \text{ densité de flux}$$

$$\Rightarrow T = T_1 - \frac{\phi}{k}(x - x_1) \quad \text{variation linéaire}$$

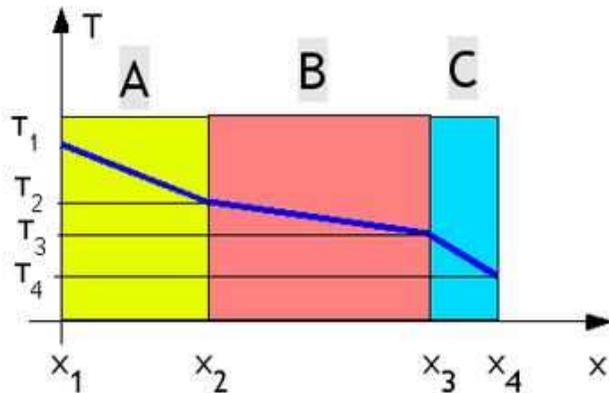
2. Mur composé série



$$T_1 - T_2 = \frac{e_A}{k_A} \phi$$

$$T_2 - T_3 = \frac{e_B}{k_B} \phi$$

$$T_3 - T_4 = \frac{e_C}{k_C} \phi$$



Comportement linéaire dans chaque couche.

Conductivité faible (matériau isolant)

⇒ pente forte

Fourier et ses séries...

Fourier (1768-1830) s'intéressa à l'étude de la chaleur

1811 : il reçoit un prix pour sa théorie mathématique des lois de propagation de la chaleur et sa vérification expérimentale

1822 : publication de la "théorie analytique de la chaleur"

Développement en série de Fourier d'une fonction continue

$f(x, t)$ fonction continue et périodique en temps, de période T

$$f(x, t) = a_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(x) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) + b_n(x) \sin \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) \right),$$

avec

$$a_0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt$$

$$a_n(x) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x, t) \cos \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt, \quad b_n(x) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x, t) \sin \left(\frac{2\pi n}{T} t \right) dt$$

La fonction, définie sur un intervalle **fini**, possède un nombre **infini** de coefficients.

Résolution de l'équation de diffusion

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{S} \frac{h}{\rho C} u$$

On choisit une solution à variable séparées $u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(x) \exp(in\omega t)$.

On reporte dans l'équation

$$D \frac{\partial^2 c_n(x)}{\partial x^2} = \left(\frac{P}{S} \frac{h}{\rho C} + in\omega \right) c_n(x).$$

Solution :

$$c_n(x) = c_n(0) e^{-(\gamma_n + i\phi_n)x}, \quad \gamma_n \geq 0, \phi_n \geq 0, \gamma_n^2 - \phi_n^2 = \frac{1}{D} \frac{h}{\rho C} \frac{P}{S}, \gamma_n \phi_n = \frac{1}{2} \frac{n\omega}{D}$$

Solution globale

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(0) e^{-\gamma_n x} e^{i(n\omega t - \phi_n x)}$$

$e^{-\gamma_n x}$ terme d'amortissement

$e^{i(n\omega t - \phi_n x)}$ terme de propagation avec déphasage avec une vitesse $v = \frac{n\omega}{\phi_n}$.

La méthode des différences finies

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1. \end{array} \right.$$

On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en I intervalles de même longueur h

$$x_i = ih, \quad 0 \leq i \leq I, \quad h = \frac{1}{I}.$$

On subdivise l'intervalle $[0, T]$ en N intervalles de même longueur τ

$$t^n = n\tau, \quad 0 \leq n \leq N, \quad \tau = \frac{T}{N}.$$

L'équation de la chaleur se réécrit aux points de la grille (x_i, t^n) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i, t^n) = f(x_i, t^n), \quad 1 \leq i \leq I - 1, \quad 1 \leq n \leq N, \\ u(x_0, t^n) = u(x_I, t^n) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \\ u(x_i, t^0) = u_0(x_i), \quad 1 \leq i \leq I - 1. \end{array} \right.$$

Principe de la méthode :

Approcher les dérivées par des quotients différentiels.

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\begin{aligned}\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in]a, b[, \quad f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f''(x) \sim \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Schéma explicite pour l'équation de la chaleur

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (x_i, t^n) = f(x_i, t^n), \quad 1 \leq i \leq I-1, 1 \leq n \leq N, \\ u(x_0, t^n) = u(x_I, t^n) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \\ u(x_i, t^0) = u_0(x_i), \quad 1 \leq i \leq I-1. \end{array} \right.$$

$$\forall 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq n \leq N, \quad f_i^n = f(x_i, t^n)$$

On cherche des valeurs approchées de la solution aux points de la grille

$$\forall 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq n \leq N, \quad u_i^n \sim u(x_i, t^n)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) \sim \frac{u(x_i, t^n + \tau) - u(x_i, t^n)}{\tau} \sim \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau}$$

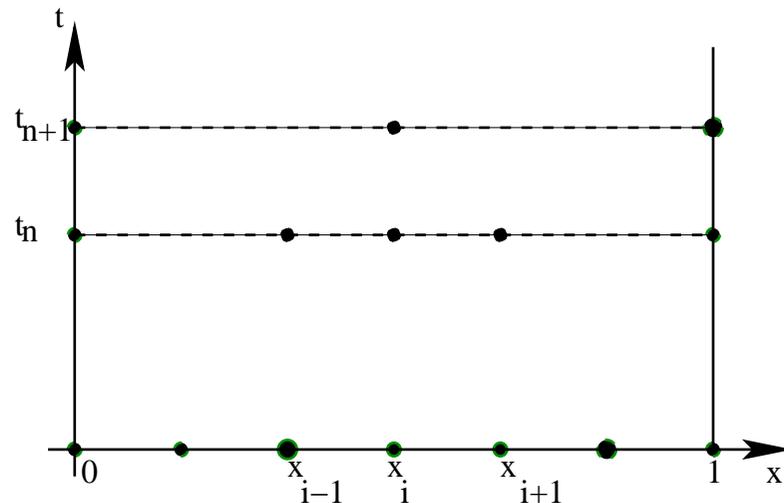
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) \sim \frac{u(x_i + h, t^n) - 2u(x_i, t^n) + u(x_i - h, t^n)}{h^2} \sim \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}$$

Solution discrète

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - D \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} = f_i^n, \quad 1 \leq i \leq I-1, 1 \leq n \leq N, \\ u_0^n = u_I^n = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad 1 \leq i \leq I-1. \end{array} \right.$$

Calcul direct de la solution :

$$u_i^{n+1} = \tau f_i^n + \lambda(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + (1 - 2\lambda)u_i^n, \quad \lambda = D \frac{\tau}{h^2}$$



Précision du calcul

On suppose que la solution exacte est régulière. On applique les formules de Taylor, alors

$$u(x_i, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \mathcal{O}(\tau^2)$$

$$u(x_{i+1}, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$u(x_{i-1}, t^{n+1}) = u(x_i, t^n) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t^n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t^n) + \mathcal{O}(h^4)$$

Donc, pour tout $1 \leq i \leq I - 1$, $0 \leq n \leq N - 1$,

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{\tau} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^n) + \mathcal{O}(\tau), \\ \frac{u(x_{i+1}, t^n) - 2u(x_i, t^n) + u(x_{i-1}, t^n))}{h^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t^n) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Erreur de troncature

$$\begin{aligned}\epsilon_i^{n+1} &= \frac{u(x_i, t^{n+1}) - u(x_i, t^n)}{\tau} - D \frac{u(x_{i+1}, t^n) - 2u(x_i, t^n) + u(x_{i-1}, t^n))}{h^2} - f(x_i, t^n) \\ &= \mathcal{O}(\tau) + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Erreur de discrétisation

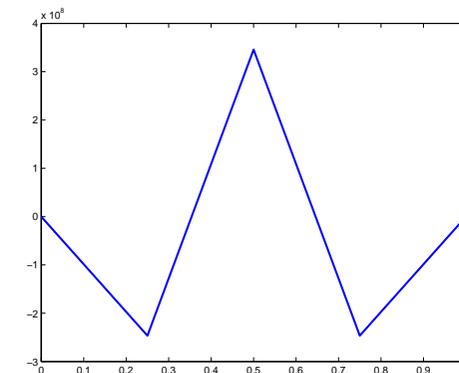
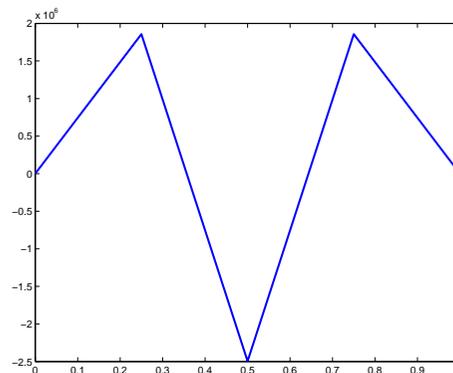
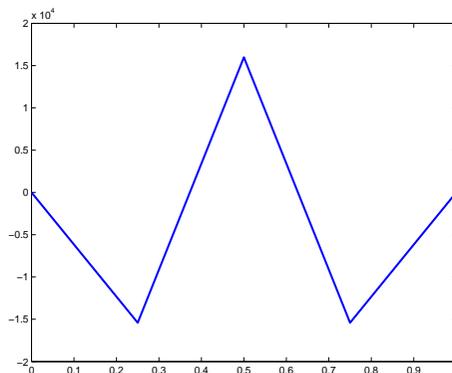
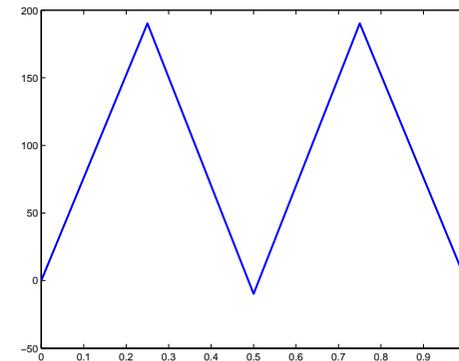
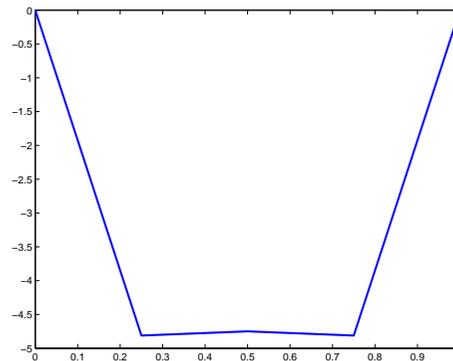
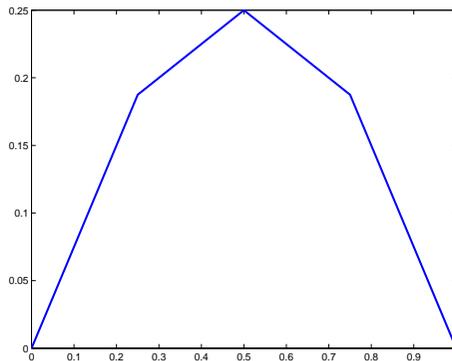
$$e_i^n = u(x_i, t^n) - u_i^n \leq C(\tau + h^2)$$

Condition de stabilité

$$u_i^{n+1} = \tau f_i^n + \lambda(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) + (1 - 2\lambda)u_i^n, \quad \lambda = D \frac{\tau}{h^2}$$

Exemple :

$$D = 1, \quad f = 0, \quad u_0(x) = x(1 - x), \quad h = 0.25, \quad \tau = 2.5 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 40$$



Condition de stabilité

$$\lambda = D \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Exemple :

$$D = 1, \quad f = 0, \quad u_0(x) = x(1 - x), \quad h = 0.25, \quad \tau = 0.025 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.4$$

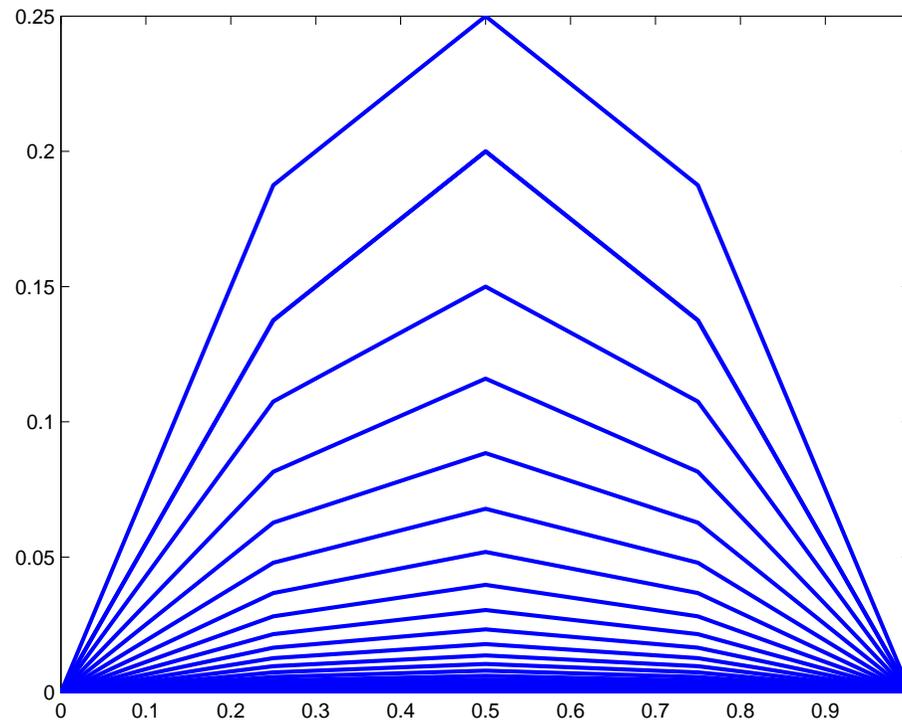


Schéma implicite

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - D \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = f_i^{n+1}, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ u_0^n = u_I^n = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad 1 \leq i \leq I-1. \end{array} \right.$$

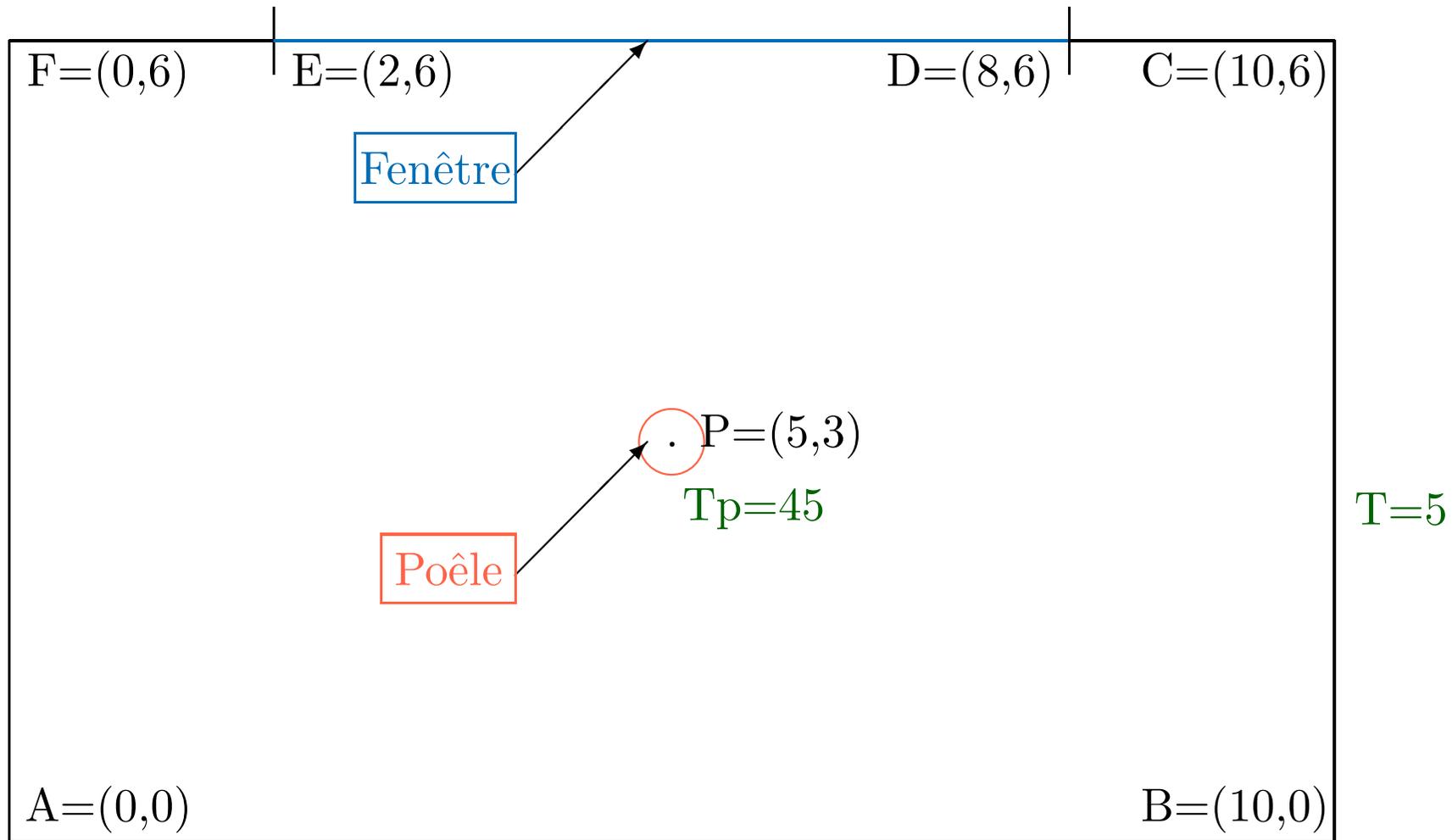
Beaucoup plus lourd!

Résolution d'un système linéaire à chaque itération

Stable

Equation de la chaleur en dimension 2

Problème physique



But : Déterminer l'évolution de la température à chaque endroit de la salle de classe.

Conditions :

- Température initiale de la classe : $T=5^{\circ}$.
- Température de poêle maintenue à $T_p=45^{\circ}$.
- Murs totalement isolants
 \Rightarrow aucun flux de chaleur avec l'extérieur.
- Fenêtre très peu isolante
 \Rightarrow reste à la température extérieure.

Modélisation mathématique

Notations :

(x, y) : coordonnées des points,

t : temps

$u(x, y, t)$: température au point de coordonnées (x, y) et à l'instant t .

Équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right).$$

Conditions initiales :

$u(x, y, 0) = 45$ pour le poêle,

$u(x, y, 0) = 5$ pour le reste de la salle.

Conditions de bord :

$$u(x, y, t) = 45 \quad \text{pour le poêle,}$$

(température constante du poêle)

$$u(x, y, t) = 5 \quad \text{pour la fenêtre,}$$

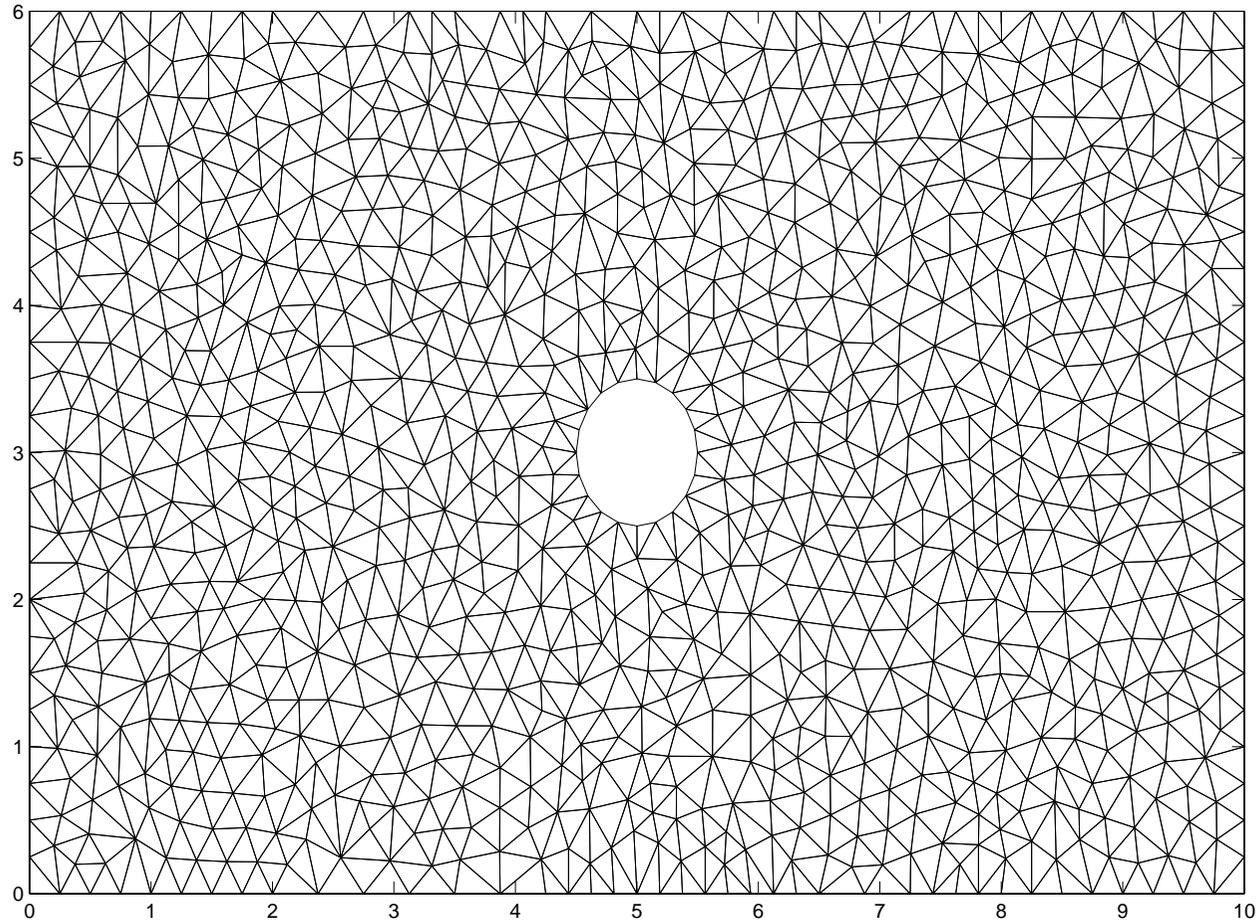
(température extérieure)

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} = 0 \quad \text{pour les murs,}$$

(pas de flux de chaleur avec l'extérieur).

Modélisation numérique

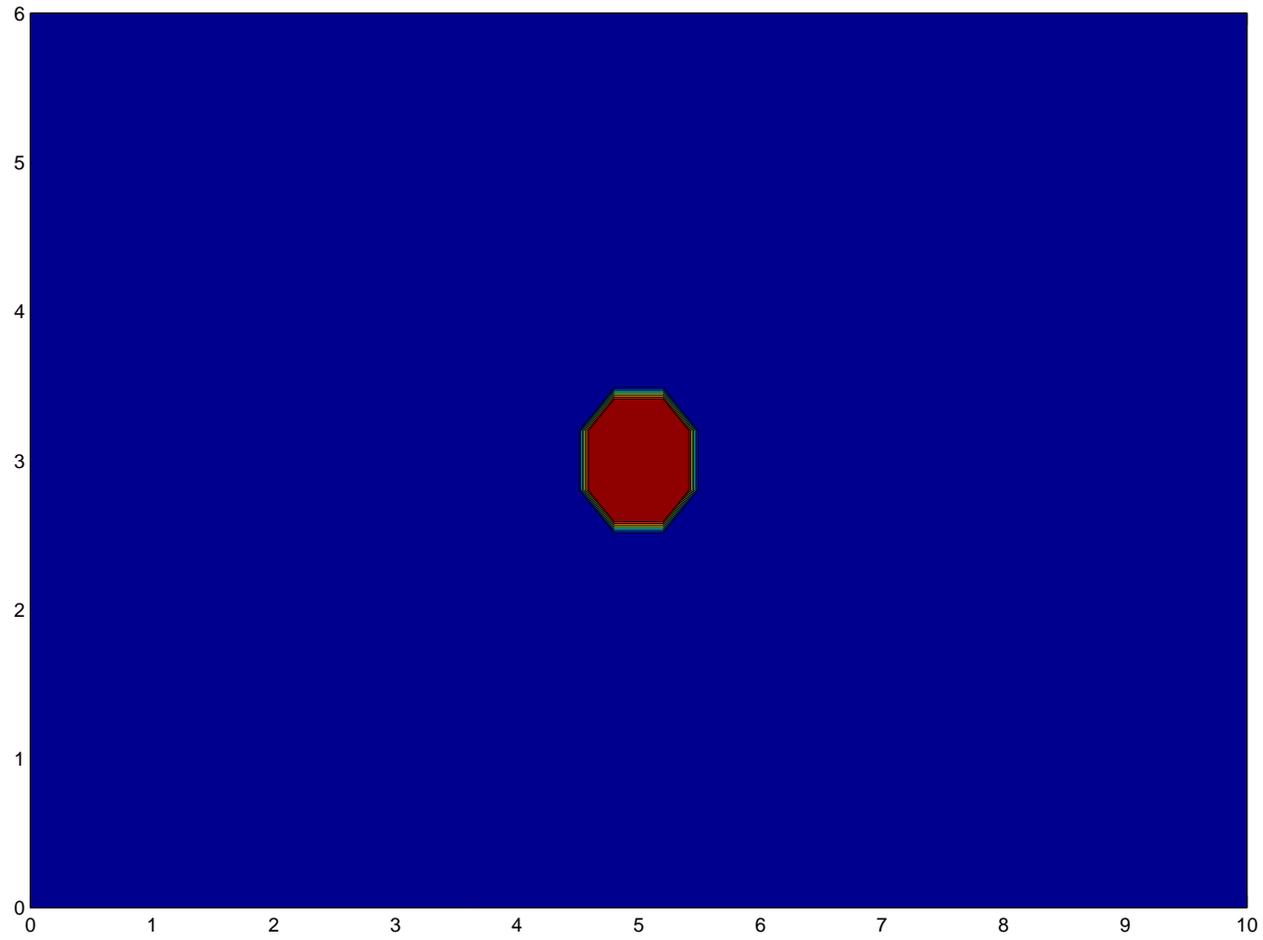
Maillage du domaine



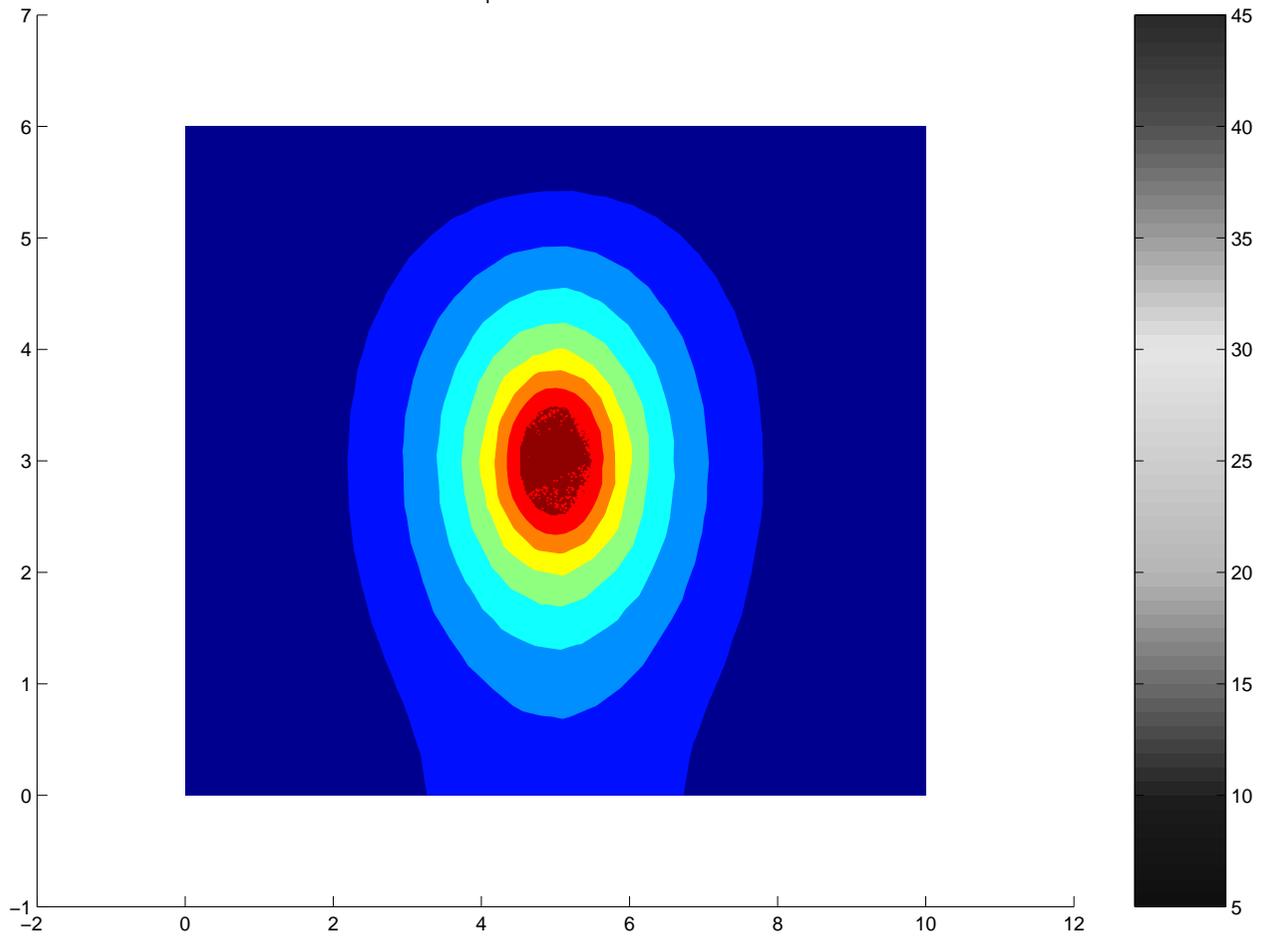
Principe de la méthode des éléments finis :

- Choix d'un maillage.
- Choix de "degrés de liberté" : on cherche la température uniquement aux sommets des triangles.
- Réécriture de l'E. D. P. de manière discrète
⇒ on écrit une relation entre les valeurs des températures entre deux instants consécutifs.
- Résolution.

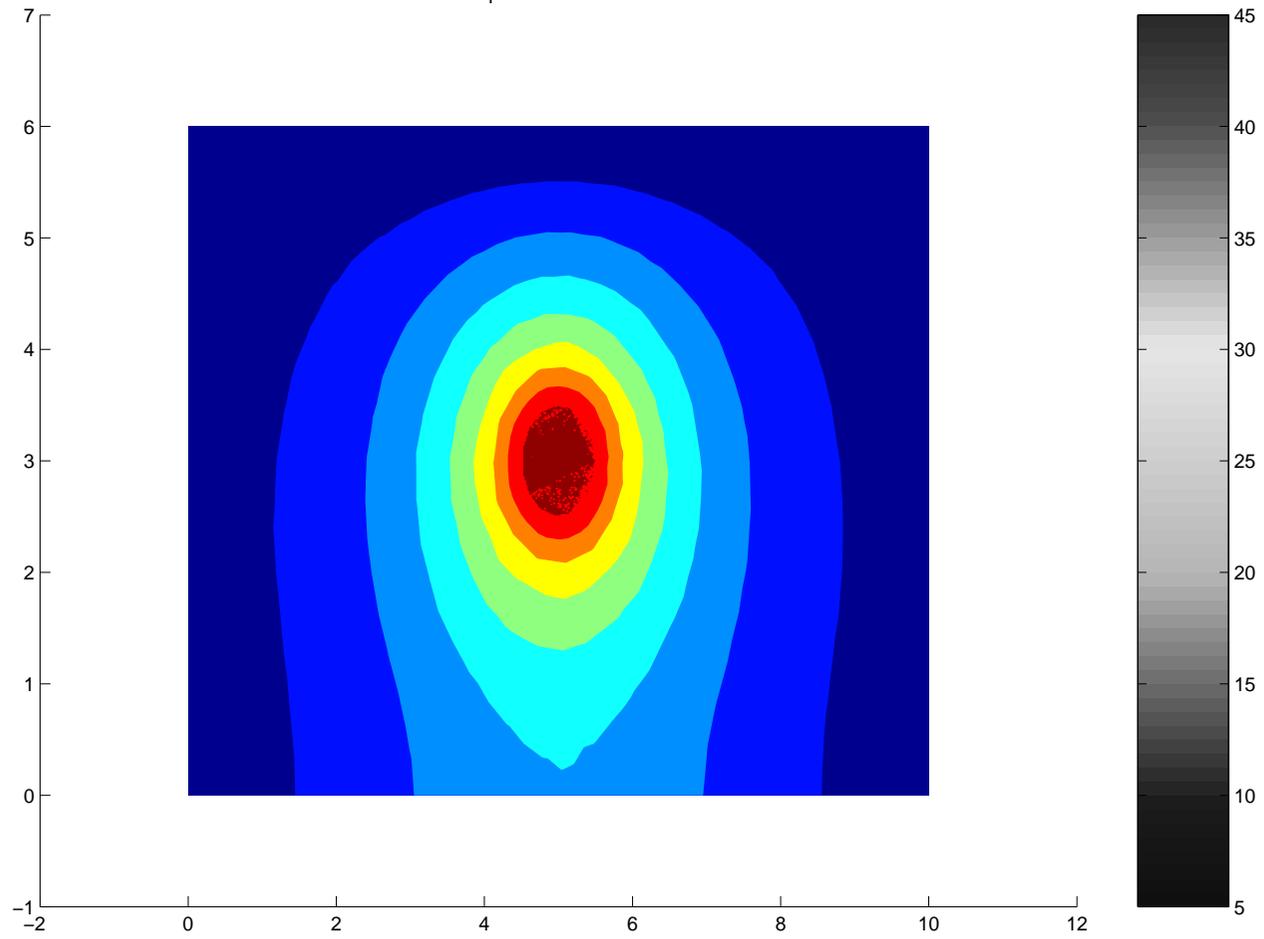
Condition initiale



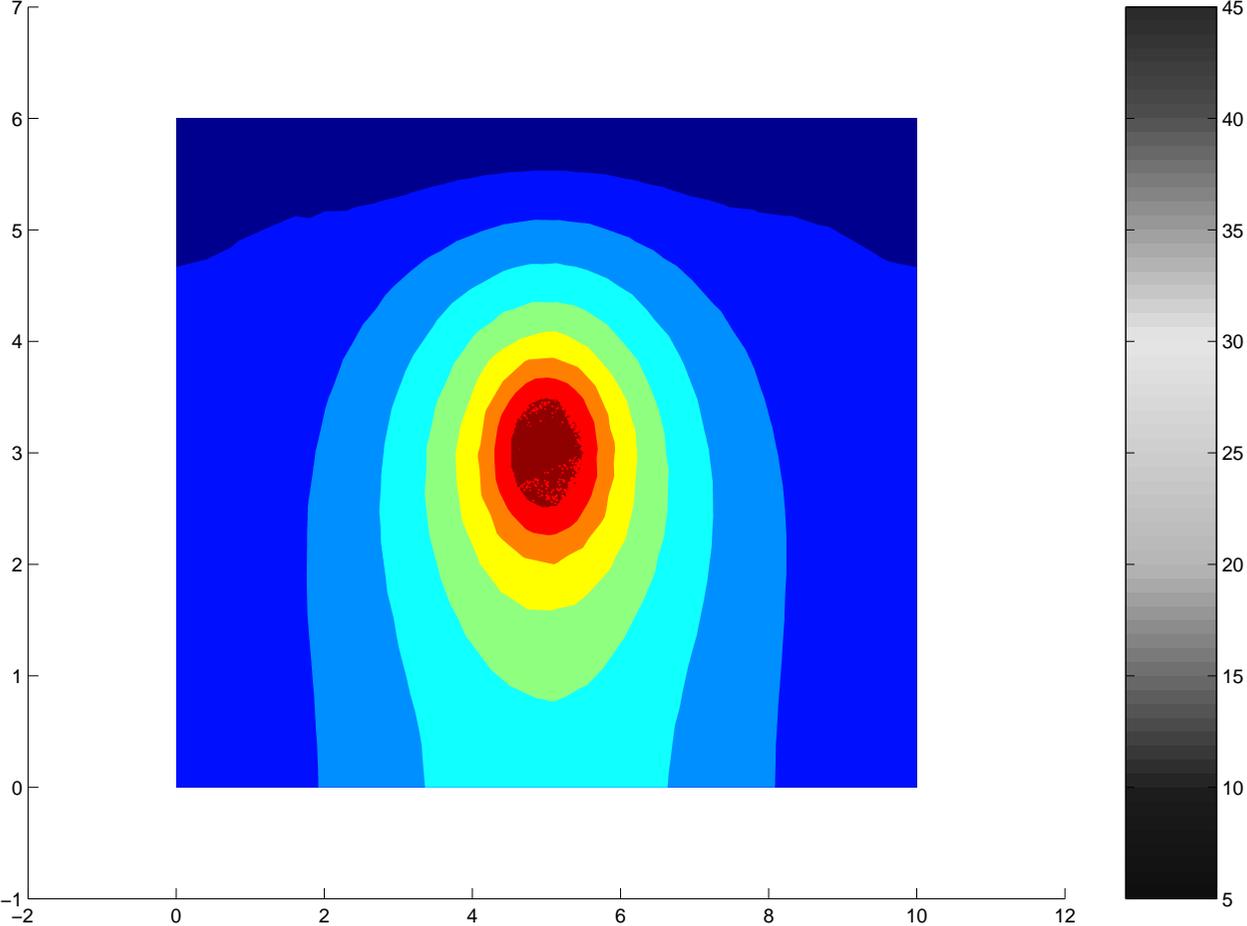
Profil de temperature dans la salle a T = 2



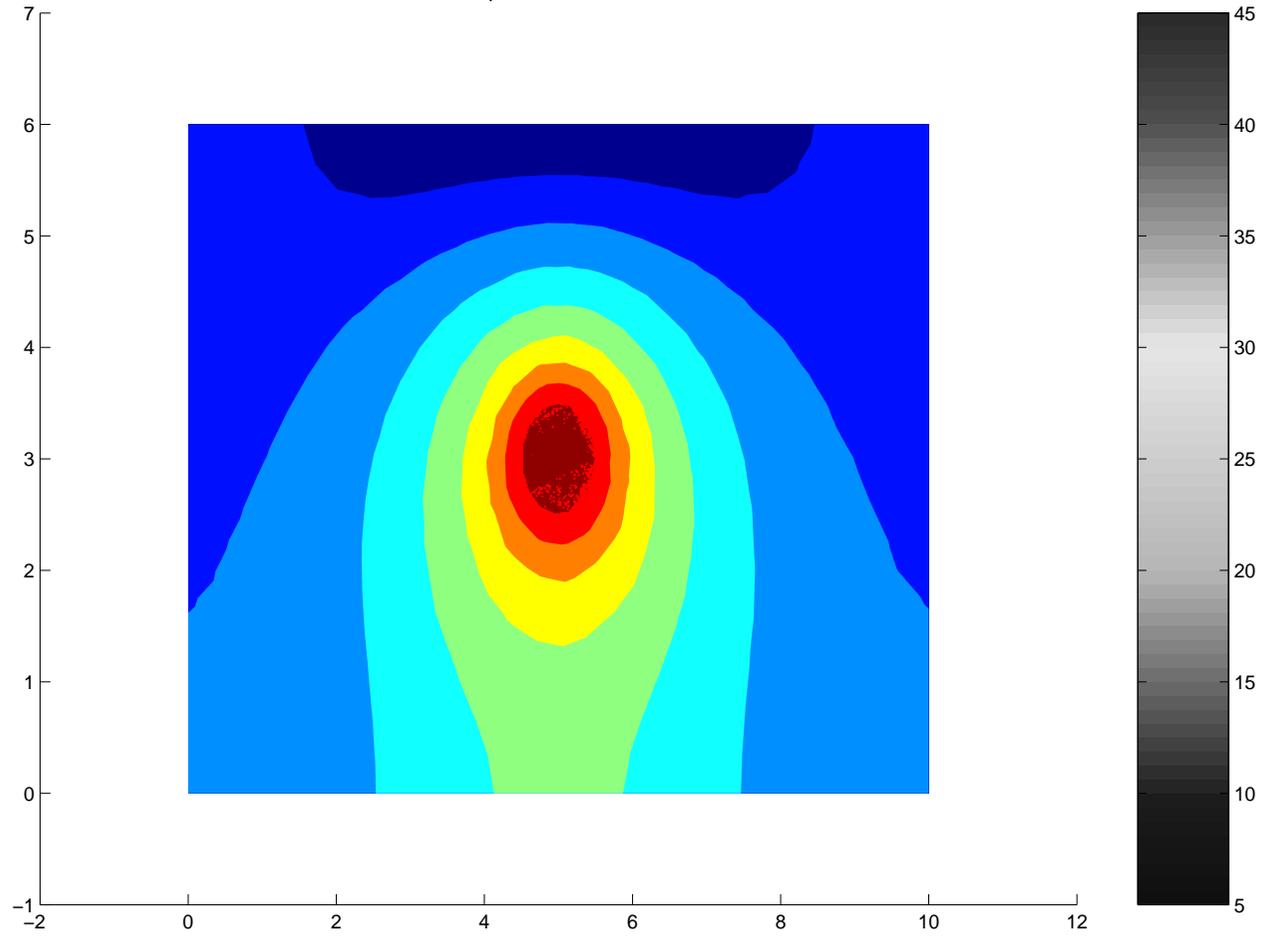
Profil de temperature dans la salle a T = 4



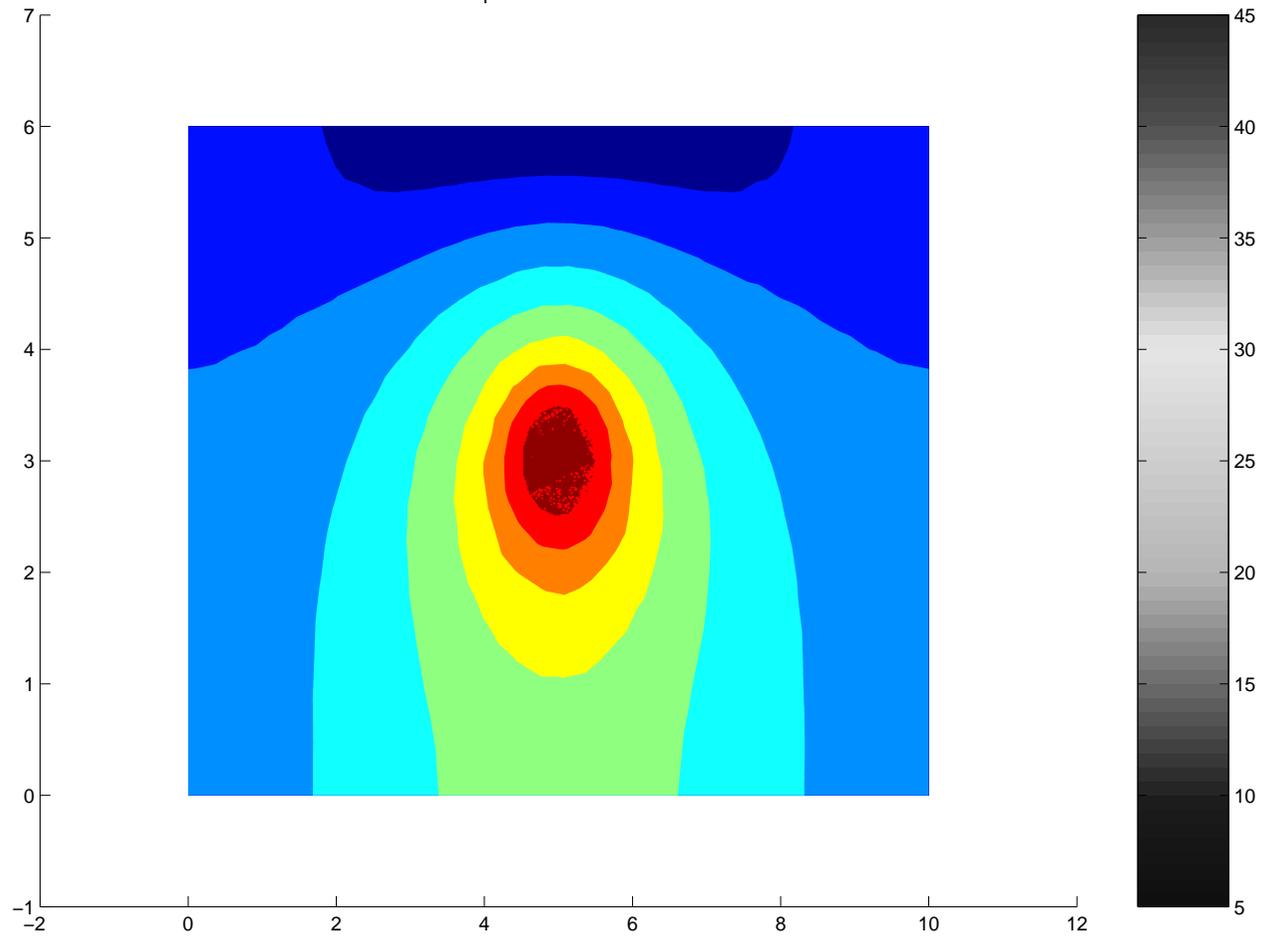
Profil de temperature dans la salle a T = 6



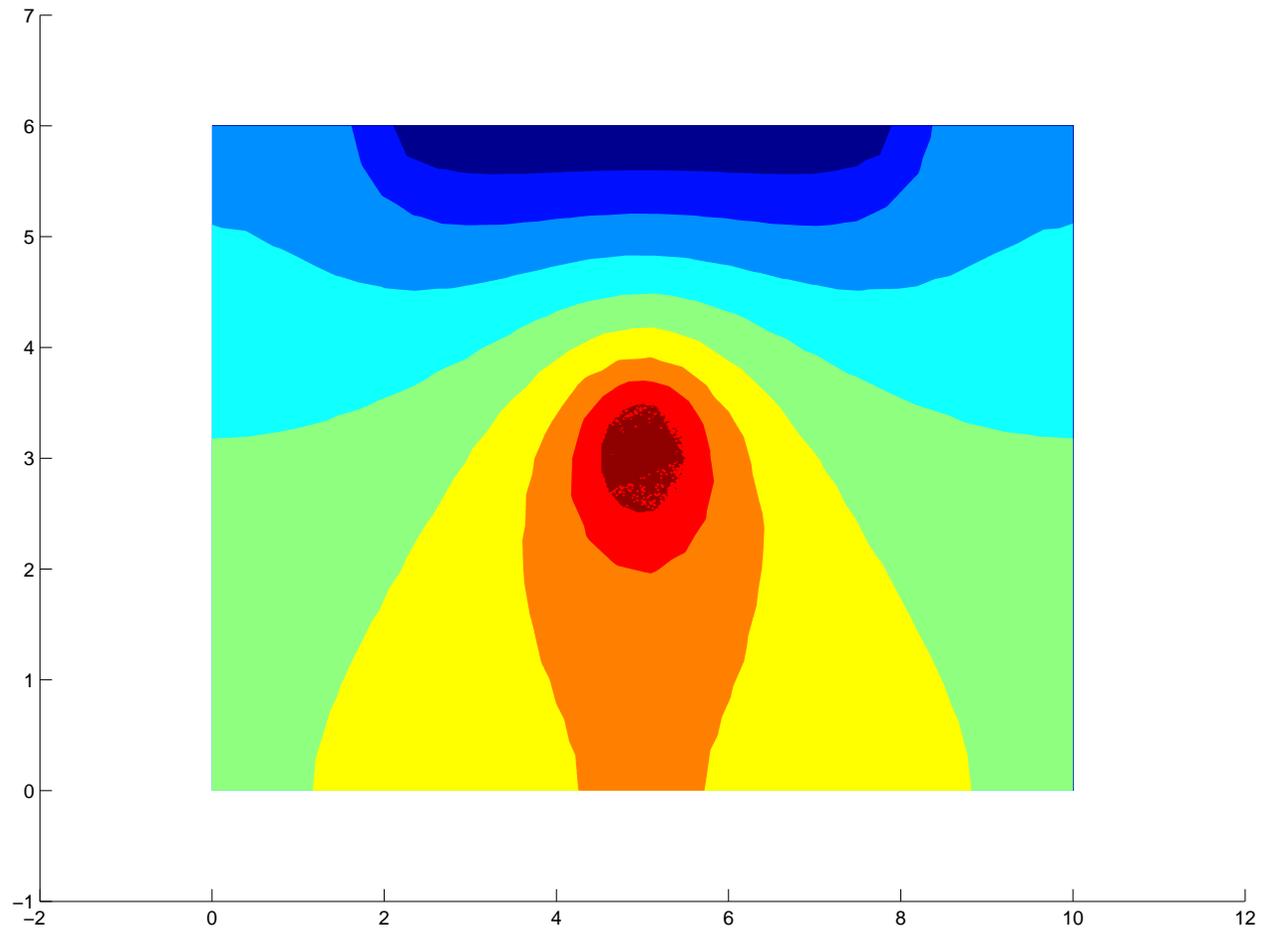
Profil de temperature dans la salle a T = 8



Profil de temperature dans la salle a T = 10



Solution stationnaire : $\Delta u = 0$

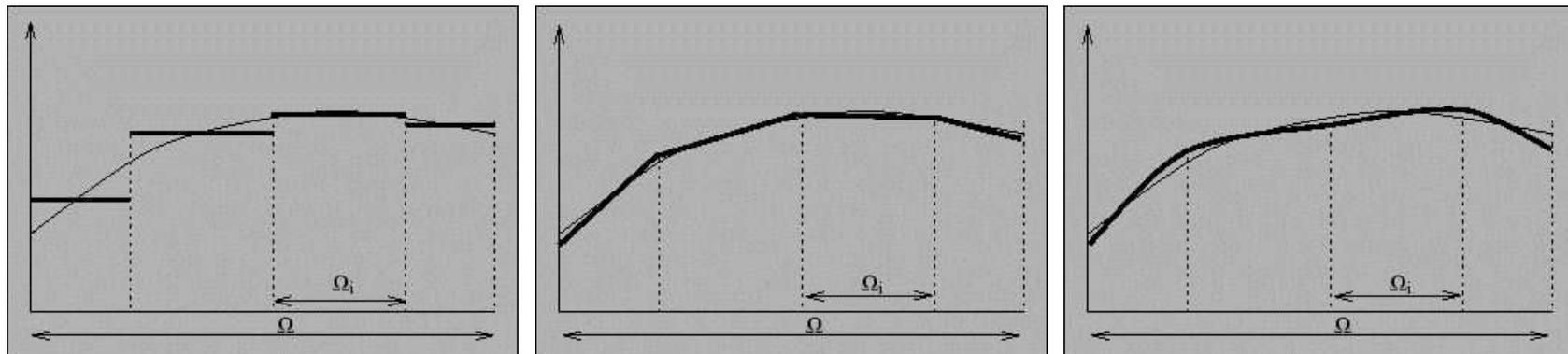


Ajoutons une porte d'entrée

Quelques mots sur la méthode des éléments finis

On cherche une solution approchée sous forme d'une fonction définie par morceaux sur des sous-domaines Ω_i disjoints de Ω .

La fonction dans Ω_i est déterminée par un nombre fini de valeurs en des points bien choisis (noeuds)



Principe

1. Problème physique sous forme d'une équation différentielle (ou EDP) à satisfaire en tout point d'un domaine Ω , avec des conditions aux bords $\partial\Omega$
2. Formulation intégrale : **formulation variationnelle**
3. Division de Ω en sous-domaines : **maillage**
4. **Choix des noeuds dans les sous-domaines et du degré de l'interpolation**
5. **Discrétisation** : on se ramène à un problème discret
6. **Résolution** du problème discret
7. Construction de la solution approchée : **post-traitement**

Quelques mots sur la supraconductivité

Motivation physique

- **Supraconductivité** : propriété que possèdent certains matériaux de laisser passer le courant sans dissipation d'énergie lorsqu'ils sont maintenus à température très basse.
- **Effet Meissner** : soumis à un champ magnétique extérieur suffisamment faible, le matériau repousse ce champ \Rightarrow **lévitation**.



Comportements des supraconducteurs :

B : champ appliqué.

- **Supraconducteur de type I (κ petit) :**

$B \geq B_c \Rightarrow$ la supraconductivité disparaît.

$B \leq B_c \Rightarrow$ le courant passe sans résistance électrique et le matériau repousse les lignes de champ.

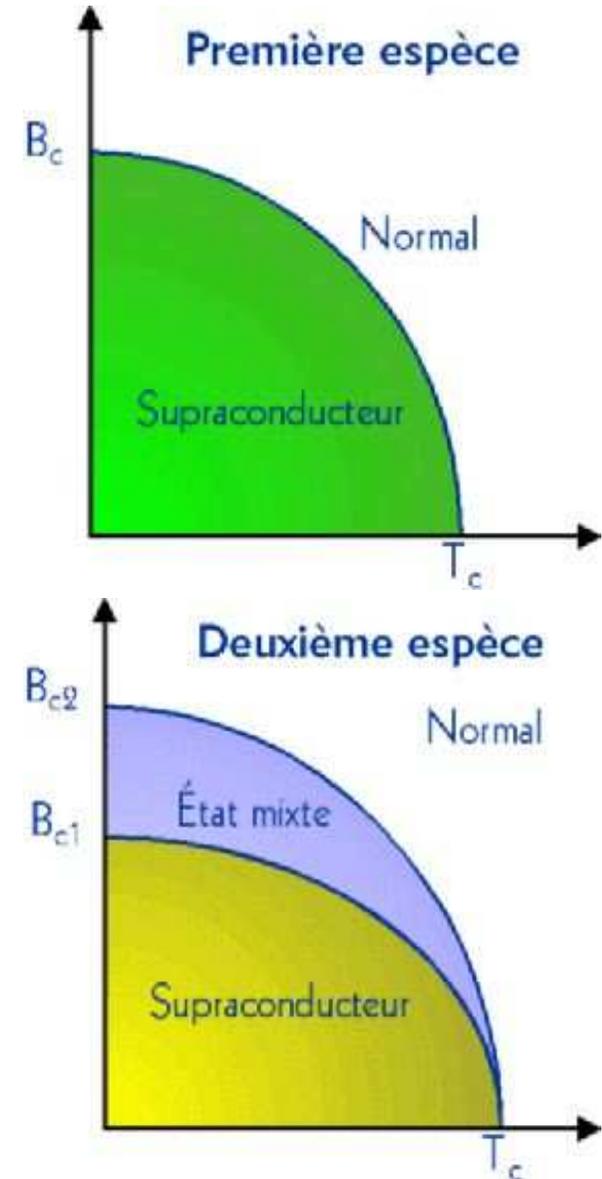
- **Supraconducteur de type II (κ grand) :**

2 champs critiques B_{c1} et B_{c2}

$B \leq B_{c1} \Rightarrow$ état supraconducteur.

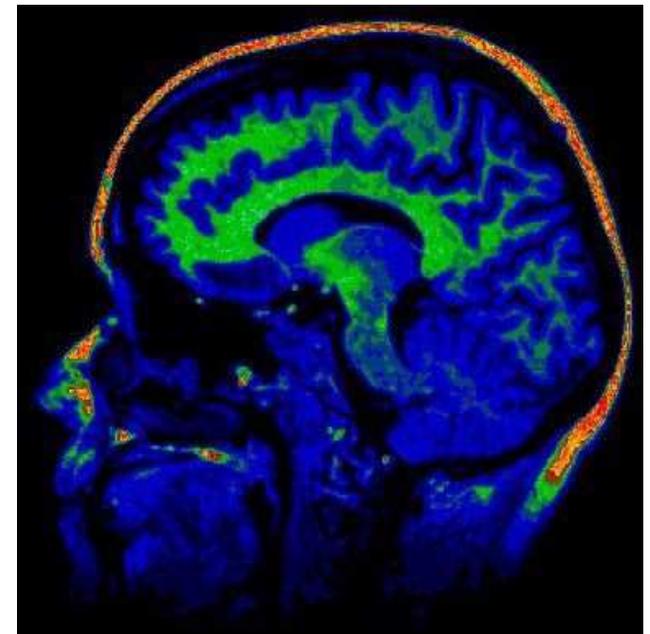
$B \geq B_{c2} \Rightarrow$ état normal.

$B_{c1} \leq B \leq B_{c2} \Rightarrow$ état mixte : le flux magnétique pénètre l'objet par des petits tubes, appelés *vortex*, de plus en plus denses quand le champ augmente.



Applications

- **Train MagLev** (552 km/s),
- **Imageries médicales** : IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) ou RMN (Résonance Magnétique Nucléaire).



Modélisation mathématique

Théorie de Ginzburg-Landau (1950) : paramètre d'ordre ψ
($|\psi|^2$ proportionnel à la densité des électrons supraconducteurs).

échantillon supraconducteur de section Ω , de caractéristique κ , soumis à un champ magnétique extérieur $\mathcal{H} = \sigma \operatorname{rot} \mathbf{F}$ (\mathbf{F} normal à Ω , σ intensité du champ).

\mathcal{A} potentiel magnétique induit.

énergie libre du matériau :

$$\mathcal{G}(\psi, \mathcal{A}) = \underbrace{\int_{\Omega} \left(|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 \right) dx}_{\text{énergie des électrons supraconducteurs}} + \underbrace{\kappa^2 \int_{\Omega} |\operatorname{rot} \mathcal{A} - \mathcal{H}|^2 dx}_{\text{énergie magnétique}}.$$

Minimisation de l'énergie

$$\mathcal{G}(\psi, \mathcal{A}) = \int_{\Omega} \left(|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 \right) dx + \kappa^2 \int_{\Omega} |\text{rot}\mathcal{A} - \mathcal{H}|^2 dx.$$

Points critiques de \mathcal{G} = solutions des équations d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\nabla - i\kappa\mathcal{A})^2\psi & = \kappa^2(1 - |\psi|^2)\psi, & \text{sur } \Omega, \\ \text{rot}^2\mathcal{A} & = -\frac{i}{2\kappa}(\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi}) - |\psi|^2\mathcal{A} + \text{rot}\mathcal{H}, & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - i\kappa\mathcal{A}\psi \cdot \nu & = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \text{rot}\mathcal{A} - \mathcal{H} & = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Champs critiques pour κ grand

(ψ, \mathcal{A}) minimiseur de \mathcal{G} .

- $\sigma < \mathbf{B}_{C_1}(\kappa)$: état supraconducteur.

Si $\sigma = 0$, $(\psi, \mathcal{A}) = (1, 0)$. Pour $\sigma < B_{C_1}(\kappa)$, unique minimiseur et $|\psi| \simeq 1$.

- $\mathbf{B}_{C_1}(\kappa) < \sigma < \mathbf{B}_{C_2}(\kappa)$: état mixte.

ψ s'annule.

- $\mathbf{B}_{C_2}(\kappa) < \sigma < \mathbf{B}_{C_3}(\kappa)$: état mixte.

La supraconductivité a disparu à l'intérieur et subsiste à la surface.

$|\psi| > 0$ à la surface du matériau et $|\psi| \simeq 0$ à l'intérieur.

- $\sigma > \mathbf{B}_{C_3}(\kappa)$: état normal.

$(0, \sigma \mathbf{F})$ unique minimiseur.

Liens avec l'opérateur de Schrödinger

Définition : $B_{C_3}(\kappa) = \inf\{\sigma > 0 \mid (0, \sigma \mathbf{F}) \text{ est un minimiseur global de } \mathcal{G}.\}$

Objectifs : Etudier le comportement de ψ selon la géométrie de Ω , regarder où apparaît la supraconductivité.

Linéarisation des équations d'Euler au voisinage de l'état normal $(0, \sigma \mathbf{F})$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\nabla - i\kappa \mathcal{A})^2 \psi & = \kappa^2 \psi, \quad \text{sur } \Omega, \\ \text{rot}^2 \mathcal{A} & = \text{rot } \mathcal{H}, \quad \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - i\kappa \mathcal{A} \psi \cdot \nu & = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \text{rot } \mathcal{A} - \mathcal{H} & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

puis $h = \frac{1}{\kappa\sigma}$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\left(h\nabla - i\frac{\mathcal{A}}{\sigma}\right)^2 \psi & = \frac{1}{\sigma^2} \psi, \quad \text{sur } \Omega, \\ \left(\left(h\nabla - i\frac{\mathcal{A}}{\sigma}\right) \psi\right) \cdot \nu & = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$