Des maths dans vos bulles

C'est quoi, une bulle ?

C'est une fine pellicule d'eau et de savon, qui renferme un certain volume d'air. À l'équilibre, le savon doit minimiser sa surface, sous la contrainte de volume fixé. C'est pour ça que la bulle prend une forme sphérique.

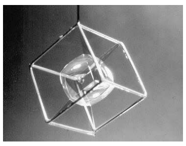
Jean-Baptiste Siméon Chardin, 1739

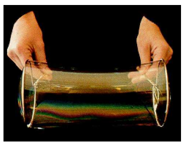
L'histoire de la reine Didon

Didon était une princesse phénicienne. Elle s'enfuit en bateau lorsque son frère, le roi Pygmalion, tua son mari pour la déposséder. Lorsque Didon arriva en Afrique, elle voulut acheter un terrain au roi Jarbas de Numidie, pour s'installer avec ses gens. Le roi Jarbas, peu généreux, lui offrit autant de terrain qu'elle pourrait en enfermer dans une peau de boeuf. Rusée, Didon fit couper la peau en minces bandelettes, et les mit bout à bout pour former une corde fermée. Ensuite, elle l'étendit par terre de façon à enfermer la plus grande aire possible. Il lui fallait donc trouver la courbe fermée de périmètre fixé, qui enferme la plus grande surface (c'est le problème dit "isopérimétrique", dont la première étude connue remonte à Zénodorus, vers 300 av. JC). La solution est le cercle, Didon acquit ainsi un terrain d'une dizaine d'hectares et y fonda la ville de Carthage...

Ça existe, d'autres formes de bulles ?

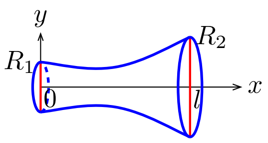
Lorsqu'il s'accroche sur un support, le film de savon peut prendre plein d'autres formes... mais pas n'importe lesquelles. Elles vérifient toujours des propriétés mathématiques étonnantes (nombre d'auto-intersections, angles...), qui suscitent aujourd'hui encore des recherches actives, tant de la part des mathématiciens que des physiciens (par exemple au GMCM, à l'université Rennes 1).



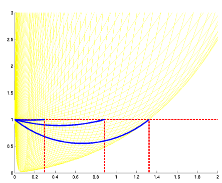


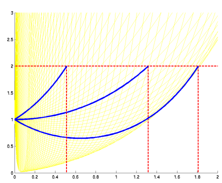
Pourquoi les bulles éclatent-elles ?

Dans le cas de deux cercles parallèles plongés dans une solution de savon, on peut montrer que le film prend une forme qu'on appelle caténoïde (voir encadré).



Lorsqu'on augmente l'écartement, on étire le film en changeant le paramètre λ dans $(*)$. Dès que le point d'arrivée sort de la zone jaune, il n'y a plus de solution : la bulle éclate.





Les solutions $(*)$ pour $R_1 = R_2 = 1$ (à gauche) et $R_1 = 1$, $R_2 = 2$ (à droite)

Surface de révolution d'aire minimale

On se donne les rayons R_1 et R_2 des deux cercles et l'écartement l entre les deux cercles. On cherche une fonction y de classe C^1 telle que $y(0) = R_1, y(l) = R_2$ et que la surface de révolution

$$\left\{(x, y(x)\cos\phi, y(x)\sin\phi), x \in [0, l], \phi \in [0, 2\pi]\right\}$$

possède une aire minimale. On a la formule

$$Aire = 2\pi \int_0^l y(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

et l'équation d'Euler-Lagrange donne

$$y\sqrt{1 + y'(x)^2} - \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}y' = const.$$

En choisissant $R_1 = 1$, on obtient les solutions

$$y_\lambda(x) = \frac{1}{\text{ch}\,\lambda}\,\text{ch}\,(x\,\text{ch}\,\lambda + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

(λ est un paramètre fixé par la condition $y_\lambda(l) = R_2$.)