Le toboggan le plus rapide du monde !

*Une école maternelle veut faire construire un toboggan. Pour que le plus grand nombre d'enfants puisse y jouer pendant la récréation, dont la durée est limitée à 15 minutes, le directeur de l'école voudrait **minimiser la durée de la glissade.***

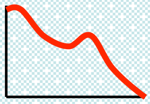
Évidemment, plus le toboggan est petit, plus la glissade sera brève… mais un toboggan trop petit n'est plus très amusant ! On fixe donc la taille du toboggan :

1m de hauteur et 2m de longueur

1m

2m

Tous les toboggans de cette dimension se descendent-ils en une même durée ? Non, par exemple un toboggan à bosses sera plus long à descendre.

1m

2m

Quelle est la meilleure forme pour que le toboggan soit le plus rapide possible ???

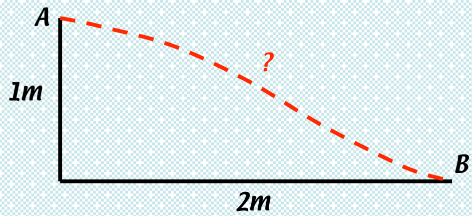
Le problème de déterminer la meilleure forme possible est difficile car la descente d'un enfant sur le toboggan est ralentie par des frottements (sur le toboggan et sur l'air).

Simplifions le problème et considérons des billes qui roulent sur le toboggan. On peut alors négliger les frottements. En simplifiant encore, on peut assimiler les billes à des points qui se déplacent le long d'une courbe dans le plan vertical.

On obtient alors pour notre problème une formulation mathématique ci-contre.

Formulation mathématique

Trouver la courbe reliant les points A et B, contenue dans le plan vertical, et telle qu'un point matériel glissant le long de cette courbe sous l'action de son poids, arrive en B en un temps minimal.



La résolution mathématique du problème

Introduisons la fonction f dont le graphe décrit la courbe qu'on recherche :

$y=f(x),\ x \in [0,a],\ f(0)=b,\ f(a)=0,$ *f est dérivable.*

Considérons un point de masse m qui glisse le long de cette courbe ; on note x(t) et y(t) ses coordonnées à l'instant t. On suppose qu'il quitte à l'instant 0 le sommet du toboggan à vitesse nulle. Alors

$$x(0)=0,\ y(0)=b,\ \dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0.$$

En l'absence de frottements, l'énergie totale est convservée :

$$m/2.\left([\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2\right) + m.g.y(t) = m.g.b\ .$$

D'après la loi sur les dérivées des fonctions composées,

$$\dot{y}(t)=f\,'(x(t)).\dot{x}(t).$$

On reporte cette expression pour obtenir

$$m/2.[\dot{x}(t)]^2\ [1+f\,'(x(t))^2] + m.g.f(x(t)) = m.g.b\ ,$$

On en déduit donc

$$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{2g(b-f(x))}{1+f\,'(x)^2}}$$

Par intégration, la durée de la chute vaut

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1+f\,'(x)^2}{2g(b-f(x))}}\,dx$$

C'est cette expression, dépendant de la fonction f, qu'il faut minimiser.

A vous de jouer !