



Femmes et Mathématiques



Attrance de la supraconductivité par les coins.

Virginie BONNAILLIE-NOEL

en collaboration avec F. ALOUGES, M. DAUGE, B. HELFFER et G. VIAL

IRMAR, Université de Rennes 1 et ENS Cachan, antenne de Bretagne



IHP, 21 Mai 2005



Motivation physique

- **Supraconductivité** : propriété que possèdent certains matériaux de laisser passer le courant sans dissipation d'énergie lorsqu'ils sont maintenus à température très basse.
- **Effet Meissner** : soumis à un champ magnétique extérieur suffisamment faible, le matériau repousse ce champ \Rightarrow **lévitation**.



Comportements des supraconducteurs :

B : champ appliqué.

– Supraconducteur de type I (κ petit) :

$B \geq B_c \Rightarrow$ la supraconductivité disparaît.

$B \leq B_c \Rightarrow$ le courant passe sans résistance électrique et le matériau repousse les lignes de champ.

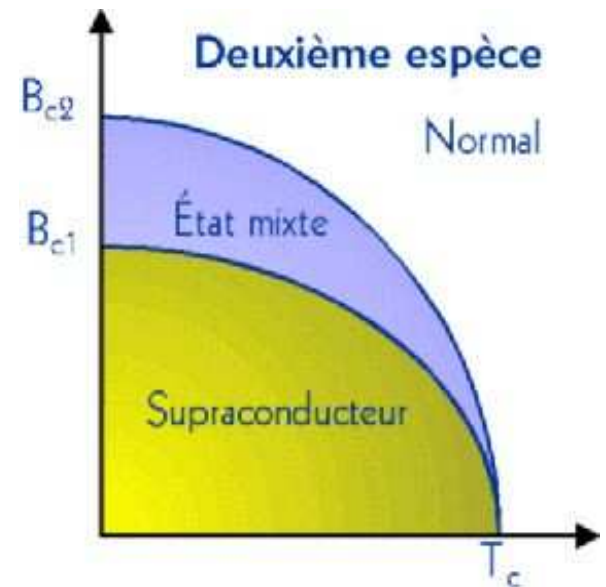
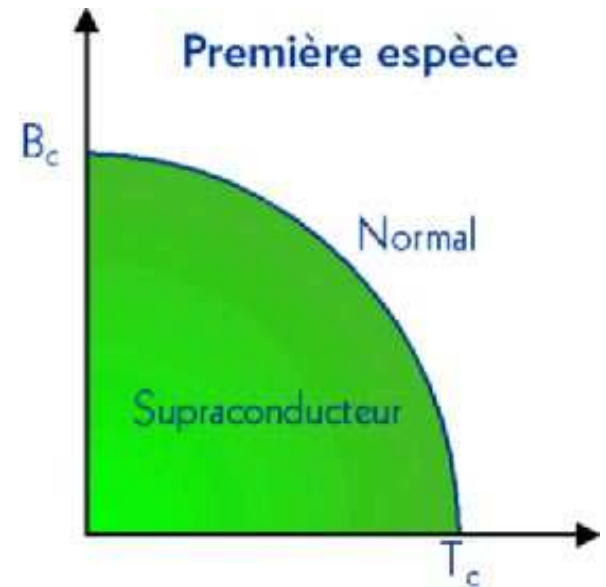
– Supraconducteur de type II (κ grand) :

2 champs critiques B_{c1} et B_{c2}

$B \leq B_{c1} \Rightarrow$ état supraconducteur.

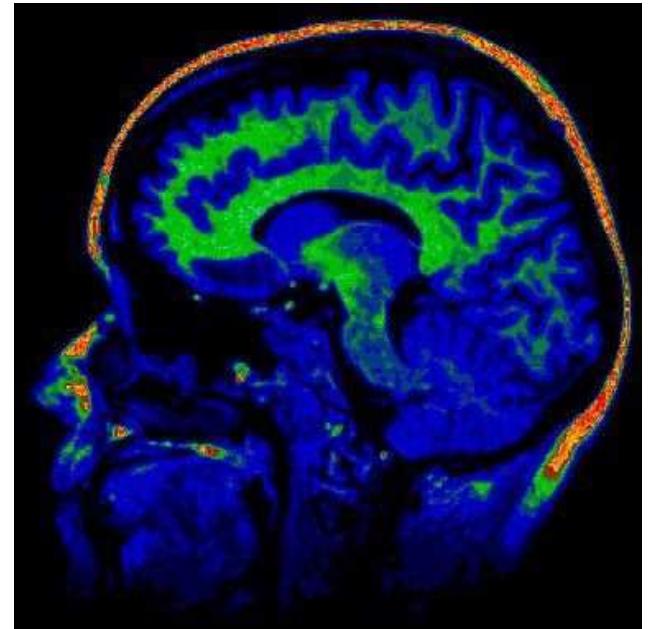
$B \geq B_{c2} \Rightarrow$ état normal.

$B_{c1} \leq B \leq B_{c2} \Rightarrow$ état mixte : le flux magnétique pénètre l'objet par des petits tubes, appelés *vortex*, de plus en plus denses quand le champ augmente.



Applications

- **Train MagLev** (552 km/s),
- **Imageries médicales** : IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) ou RMN (Résonance Magnétique Nucléaire).



Modélisation mathématique

Théorie de Ginzburg-Landau (1950) : paramètre d'ordre ψ
($|\psi|^2$ proportionnel à la densité des électrons supraconducteurs).

échantillon supraconducteur de section Ω , de caractéristique κ , soumis à un champ magnétique extérieur $\mathcal{H} = \sigma \text{rot} \mathbf{F}$ (\mathbf{F} normal à Ω , σ intensité du champ).

\mathcal{A} potentiel magnétique induit.

énergie libre du matériau :

$$\mathcal{G}(\psi, \mathcal{A}) = \underbrace{\int_{\Omega} \left(|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 \right) dx}_{\text{énergie des électrons supraconducteurs}} + \underbrace{\kappa^2 \int_{\Omega} |\text{rot} \mathcal{A} - \mathcal{H}|^2 dx}_{\text{énergie magnétique}}.$$

Minimisation de l'énergie

$$\mathcal{G}(\psi, \mathcal{A}) = \int_{\Omega} \left(|(\nabla - i\kappa\mathcal{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2} (|\psi|^2 - 1)^2 \right) dx + \kappa^2 \int_{\Omega} |\text{rot}\mathcal{A} - \mathcal{H}|^2 dx.$$

Points critiques de \mathcal{G} = solutions des équations d'Euler :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\nabla - i\kappa\mathcal{A})^2\psi & = \kappa^2(1 - |\psi|^2)\psi, & \text{sur } \Omega, \\ \text{rot}^2\mathcal{A} & = -\frac{i}{2\kappa}(\bar{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\bar{\psi}) - |\psi|^2\mathcal{A} + \text{rot}\mathcal{H}, & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - i\kappa\mathcal{A}\psi \cdot \nu & = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \text{rot}\mathcal{A} - \mathcal{H} & = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Champs critiques pour κ grand

(ψ, \mathcal{A}) minimiseur de \mathcal{G} .

– $\sigma < \mathbf{B}_{C_1}(\kappa)$: état supraconducteur.

Si $\sigma = 0$, $(\psi, \mathcal{A}) = (1, 0)$. Pour $\sigma < B_{C_1}(\kappa)$, unique minimiseur et $|\psi| \simeq 1$.

– $\mathbf{B}_{C_1}(\kappa) < \sigma < \mathbf{B}_{C_2}(\kappa)$: état mixte.

ψ s'annule.

– $\mathbf{B}_{C_2}(\kappa) < \sigma < \mathbf{B}_{C_3}(\kappa)$: état mixte.

La supraconductivité a disparu à l'intérieur et subsiste à la surface.

$|\psi| > 0$ à la surface du matériau et $|\psi| \simeq 0$ à l'intérieur.

– $\sigma > \mathbf{B}_{C_3}(\kappa)$: état normal.

$(0, \sigma \mathbf{F})$ unique minimiseur.

Liens avec l'opérateur de Schrödinger

Définition : $B_{C_3}(\kappa) = \inf\{\sigma > 0 \mid (0, \sigma \mathbf{F}) \text{ est un minimiseur global de } \mathcal{G}.\}$

Objectifs : Etudier le comportement de ψ selon la géométrie de Ω , regarder où apparaît la supraconductivité.

Linéarisation des équations d'Euler au voisinage de l'état normal $(0, \sigma \mathbf{F})$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -(\nabla - i\kappa \mathcal{A})^2 \psi & = \kappa^2 \psi, \quad \text{sur } \Omega, \\ \text{rot }^2 \mathcal{A} & = \text{rot } \mathcal{H}, \quad \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \nu} - i\kappa \mathcal{A} \psi \cdot \nu & = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \text{rot } \mathcal{A} - \mathcal{H} & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

puis $h = \frac{1}{\kappa\sigma}$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\left(h\nabla - i\frac{\mathcal{A}}{\sigma}\right)^2 \psi & = \frac{1}{\sigma^2} \psi, \quad \text{sur } \Omega, \\ \left(\left(h\nabla - i\frac{\mathcal{A}}{\sigma}\right) \psi\right) \cdot \nu & = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Opérateurs modèles

Ω domaine convexe polygonal curviligne de \mathbb{R}^2 ,

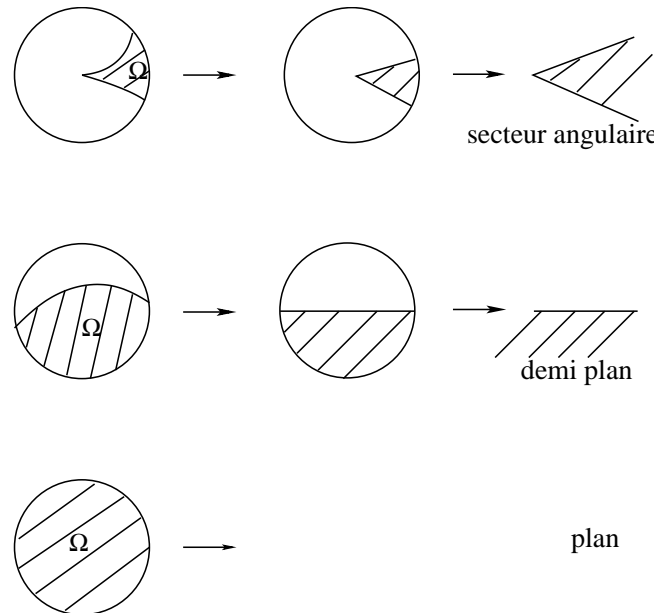
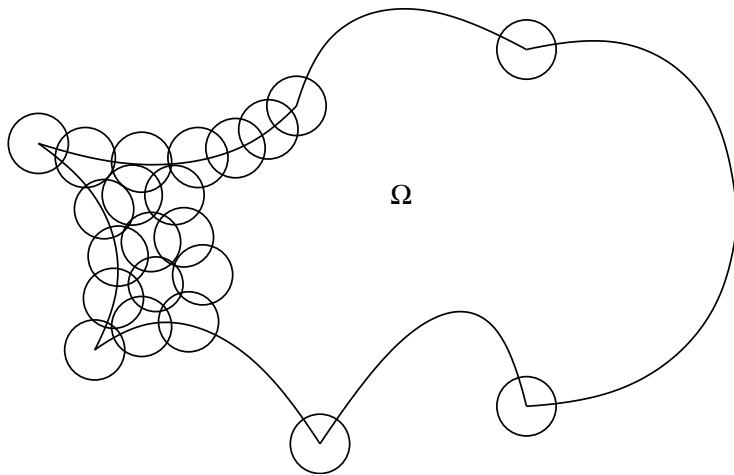
$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(x_2, -x_1)$ potentiel magnétique,

$\mathcal{B} = \text{rot } \mathcal{A} \equiv -1$ champ magnétique associé,

h paramètre semi-classique.

Opérateur $P_h = -(h\nabla - i\mathcal{A})^2$ avec les conditions de Neumann.

$$= \left(h\partial_{x_1} - \frac{i}{2}x_2 \right)^2 + \left(h\partial_{x_2} + \frac{i}{2}x_1 \right)^2 = -h^2\Delta + ihx_2\partial_1 - ihx_1\partial_2 + \frac{1}{4}|x|^2.$$



OBJECTIFS : Etude et calculs des modes propres $(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ quand $h \rightarrow 0$,
le n -ième mode propre vérifie $P_h u_{h,n} = \mu_{h,n} u_{h,n}$
Localisation des fonctions propres associées.

Plan

La plus petite valeur propre de $-(\nabla - i\mathcal{A})^2$ sur \mathbb{R}^2 vaut 1.

Demi-plan

La plus petite valeur propre de $-(\nabla - i\mathcal{A})^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ vaut $\Theta_0 \leq 0.59$.

Secteur angulaire

La plus petite valeur propre de $-(\nabla - i\mathcal{A})^2$ sur G^α vérifie $\mu_1(\alpha) \leq \Theta_0$.

Si Ψ_k^α est un vecteur propre pour la k -ième valeur propre $\mu_k(\alpha)$ alors

$$\forall \epsilon > 0, \int_{G^\alpha} e^{2(\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha)} - \epsilon)|x|} |\Psi_k^\alpha(\mathbf{x})|^2 dx \leq C.$$

Autour de la première valeur propre

Domaines réguliers (dans \mathbb{R}^2)

$$\frac{\mu_{h,1}}{h} \longrightarrow \Theta_0.$$

Si $\mu_{h,1}$ est simple, $u_{h,1}$ se concentre (en \sqrt{h}) autour des points de courbure maximale de $\partial\Omega$.

Domaines polygonaux

$$\frac{\mu_{h,1}}{h} \longrightarrow \min_{\alpha} \mu_1(\alpha)$$

- α sont les angles de Ω .
- $\mu_1(\alpha)$ est la première valeur propre (de Neumann) de l'opérateur de Schrödinger avec $h = 1$

$$Q = -(\nabla - i\mathcal{A})^2$$

sur le secteur infini G^α d'angle α .

+ concentration du vecteur propre dans les sommets d'angle $\min_{\alpha} \mu_1(\alpha)$.

Autour du polygone

Construction de quasi-modes "presque des vecteurs propres"

Ω polygone convexe,

α_s angle au sommet s ,

Σ ensemble des sommets s de Ω ,

G^{α_s} secteur infini d'angle α_s .

$s \in \Sigma$ et $k \geq 1$ tels que $\mu_k(\alpha_s) < \Theta_0$,

$\Psi_k^{\alpha_s}$ une fonction propre de $Q = -(\nabla - i\mathcal{A})^2$ sur G^{α_s} pour $\mu_k(\alpha_s)$.

Changement d'échelle

$X = \frac{x}{\sqrt{h}}$ pour relier $Q = -(\nabla - i\mathcal{A})^2$ avec $P_h = -(h\nabla - i\mathcal{A})^2$

$x \mapsto \Psi_k^{\alpha_s} \left(\frac{x}{\sqrt{h}} \right)$ fonction propre de P_h sur G^{α_s} pour la valeur propre $h\mu_k(\alpha_s)$

Translation et rotation

pour relier G^{α_s} sur le secteur infini $\tilde{G}_s \cap \Omega$ qui coïncide avec Ω autour de s

$$\tilde{\psi}_{h,s,k}(x) = e^{\frac{i}{2h}x \wedge s} \Psi_k^{\alpha_s} \left(\frac{\mathcal{R}_s(x-s)}{\sqrt{h}} \right) \text{ fonction propre de } P_h \text{ sur } \tilde{G}_s.$$

Troncature

Pour chaque sommet $s \in \Sigma$, on note d_s la distance aux autres sommets

$$d_s = \text{dist}(s, \Sigma \setminus \{s\}).$$

Soit χ_s une fonction (de troncature) régulière nulle en dehors de $\mathcal{B}(s, d_s)$, égale à 1 dans $\mathcal{B}(s, d_s - \delta)$.

Quasi-modes définis sur Ω

$$x \longmapsto \psi_{h,s,k}(x) = \chi_s(x) \tilde{\psi}_{h,s,k}(x).$$

Propriétés des quasi-modes

Rayleigh quotient

$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon :$

$$\left| \frac{\int_{\Omega} |(h\nabla - i\mathcal{A})\psi_{h,s,k}|^2 dx}{\int_{\Omega} |\psi_{h,s,k}|^2 dx} - h\mu_k(\alpha_s) \right| \leq C_\varepsilon \exp \left(-2 \frac{d_s \sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha_s) - \varepsilon}}{\sqrt{h}} \right)$$

Approximation de l'équation des modes propres

$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon :$

$$\frac{\|P_h \psi_{h,s,k} - h\mu_k(\alpha_s)\psi_{h,s,k}\|}{\|\psi_{h,s,k}\|} \leq C_\varepsilon \exp \left(-\frac{d_s \sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha_s) - \varepsilon}}{\sqrt{h}} \right)$$

Estimations tubulaires des valeurs propres

Notations

- $\mu_{h,n}$ n -ième valeur propre de P_h répétée avec multiplicité.
- λ_n n -ième valeur propre de $\bigoplus_{s \in \Sigma} Q_{G^{\alpha_s}}$ répétée avec multiplicité.

$$\lambda_n = n - \text{ième élément de } \{h\mu_k(\alpha_s), k \geq 1, s \in \Sigma\}.$$

- Σ_n l'ensemble des sommets

$$\Sigma_n = \{s \in \Sigma, \lambda_n \text{ est une valeur propre pour } Q_{G^{\alpha_s}}\}$$

- $r(\lambda_n)$ la distance

$$r(\lambda_n) = \min_{s \in \Sigma_n} d(s, \Sigma \setminus \{s\})$$

Théorème

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe C_ε tel que

$$|\mu_{h,n} - h\lambda_n| \leq C_\varepsilon \exp\left(-\frac{r(\lambda_n)\sqrt{\Theta_0 - \lambda_n - \varepsilon}}{\sqrt{h}}\right)$$

Simulations numériques sur un carré

$\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ (quatre coins d'angle $\frac{\pi}{2}$).

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \simeq 0.509905$.

Calculs des modes propres avec FEM code MELINA

Prochains transparents :

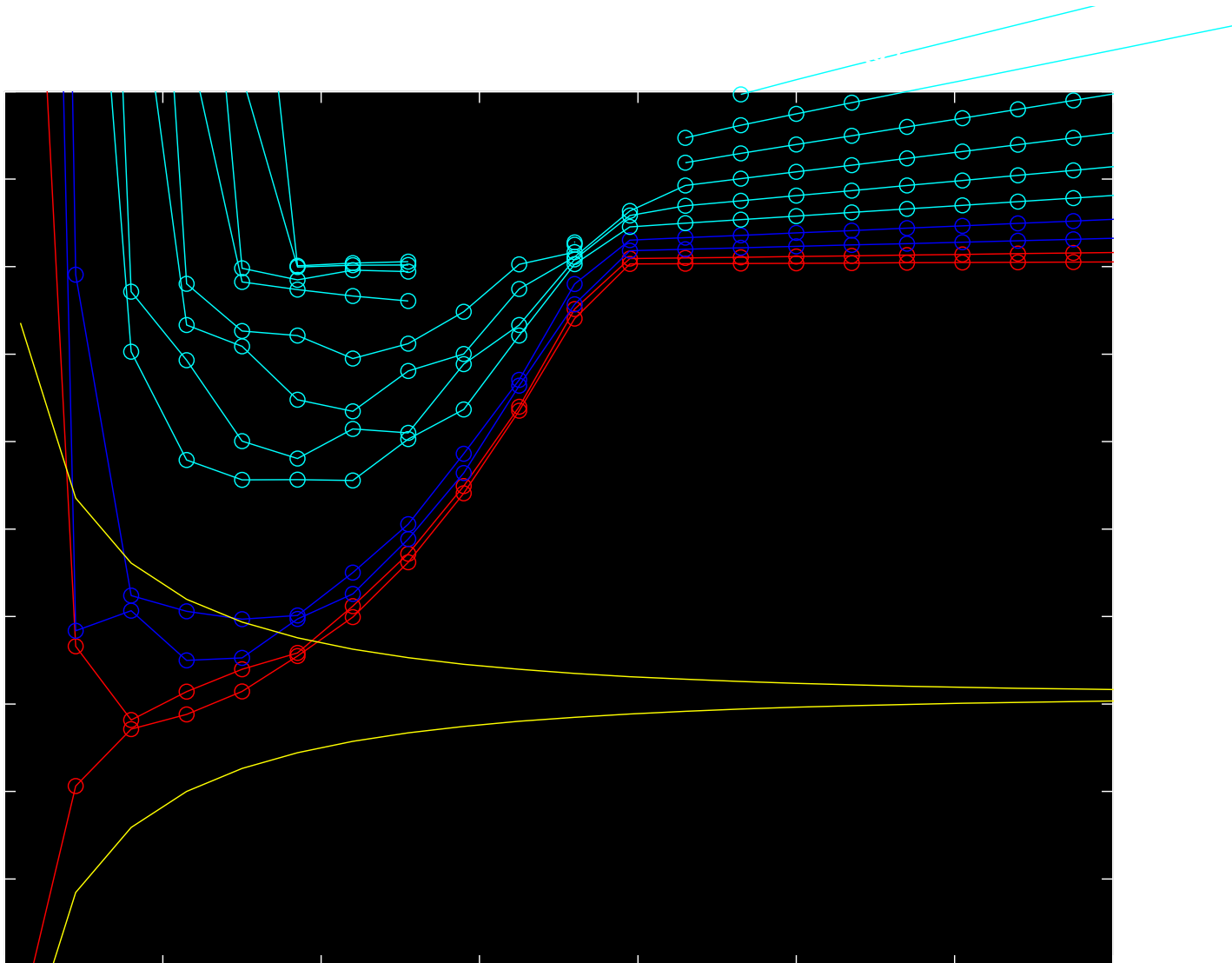
Abscisses : $k = \frac{1}{h}$.

Ordonnées : $\frac{\mu_{h,n}}{h}$, $n = 1, \dots, 12$.

En jaune, le tube exponentiel

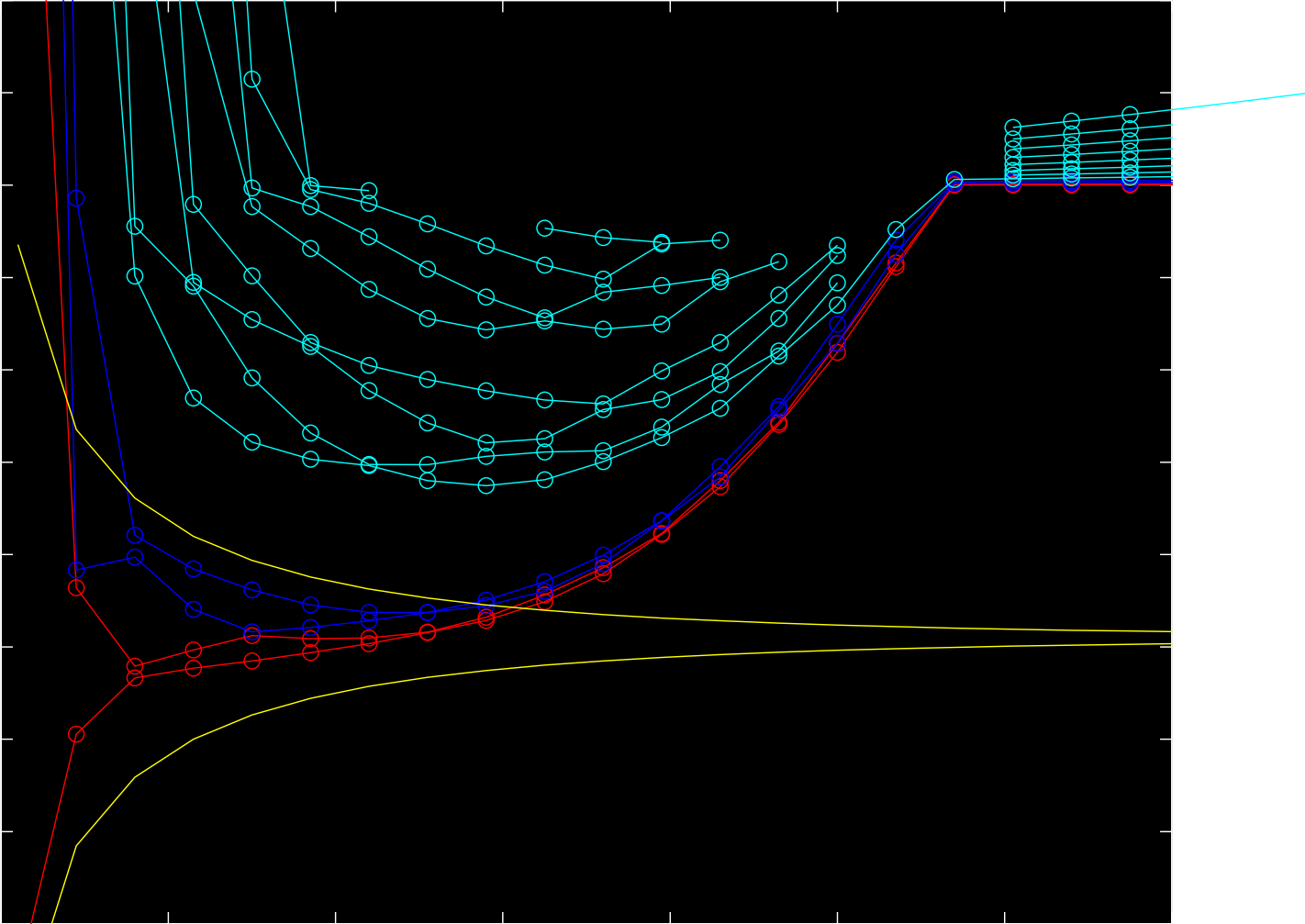
$$\lambda_1 \pm \exp\left(-\frac{2\sqrt{\Theta_0 - \lambda_1}}{\sqrt{h}}\right).$$

1600 éléments, Q1



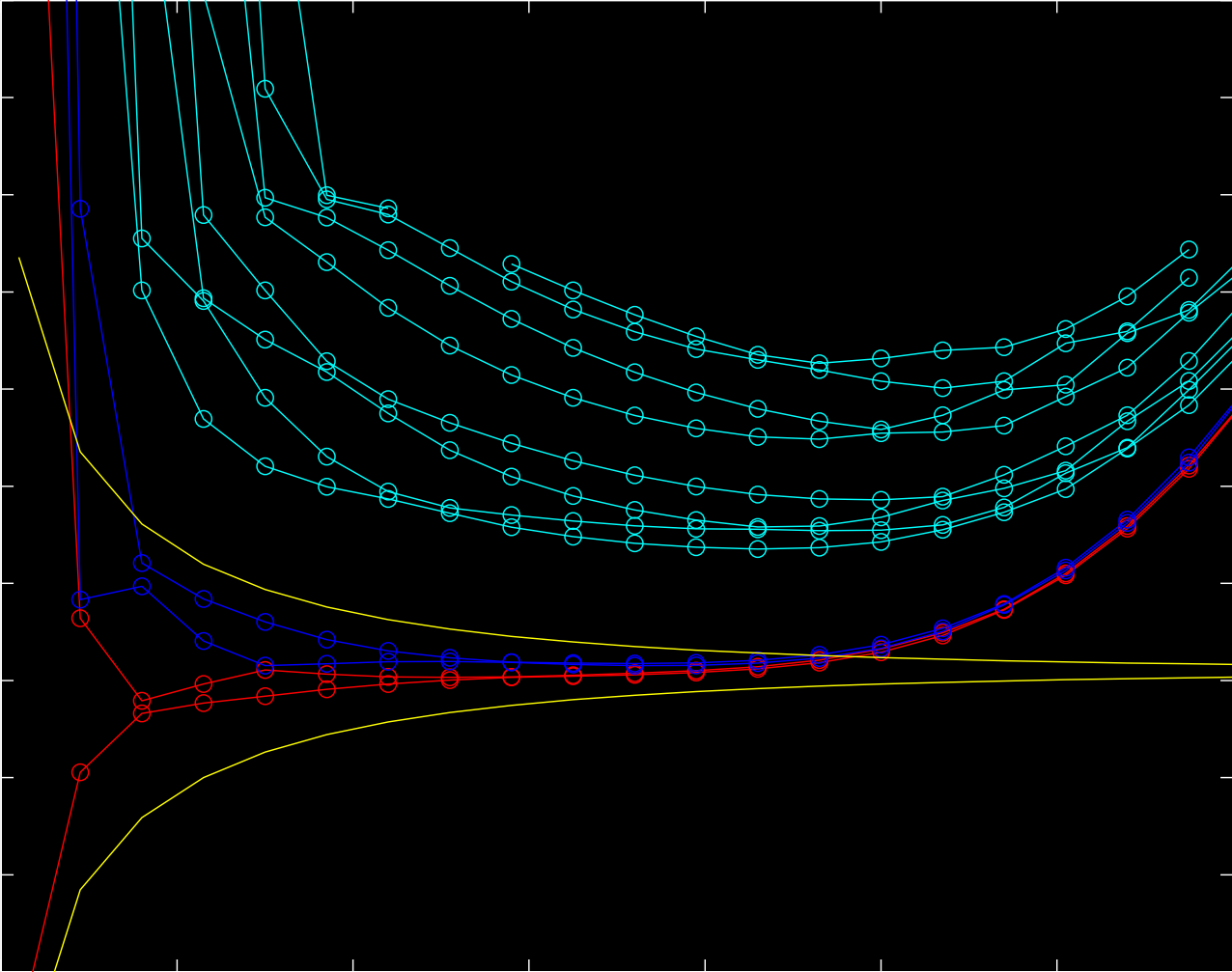
$h^{-1} \mu_{h,n}$ versus h^{-1}

400 éléments, Q2



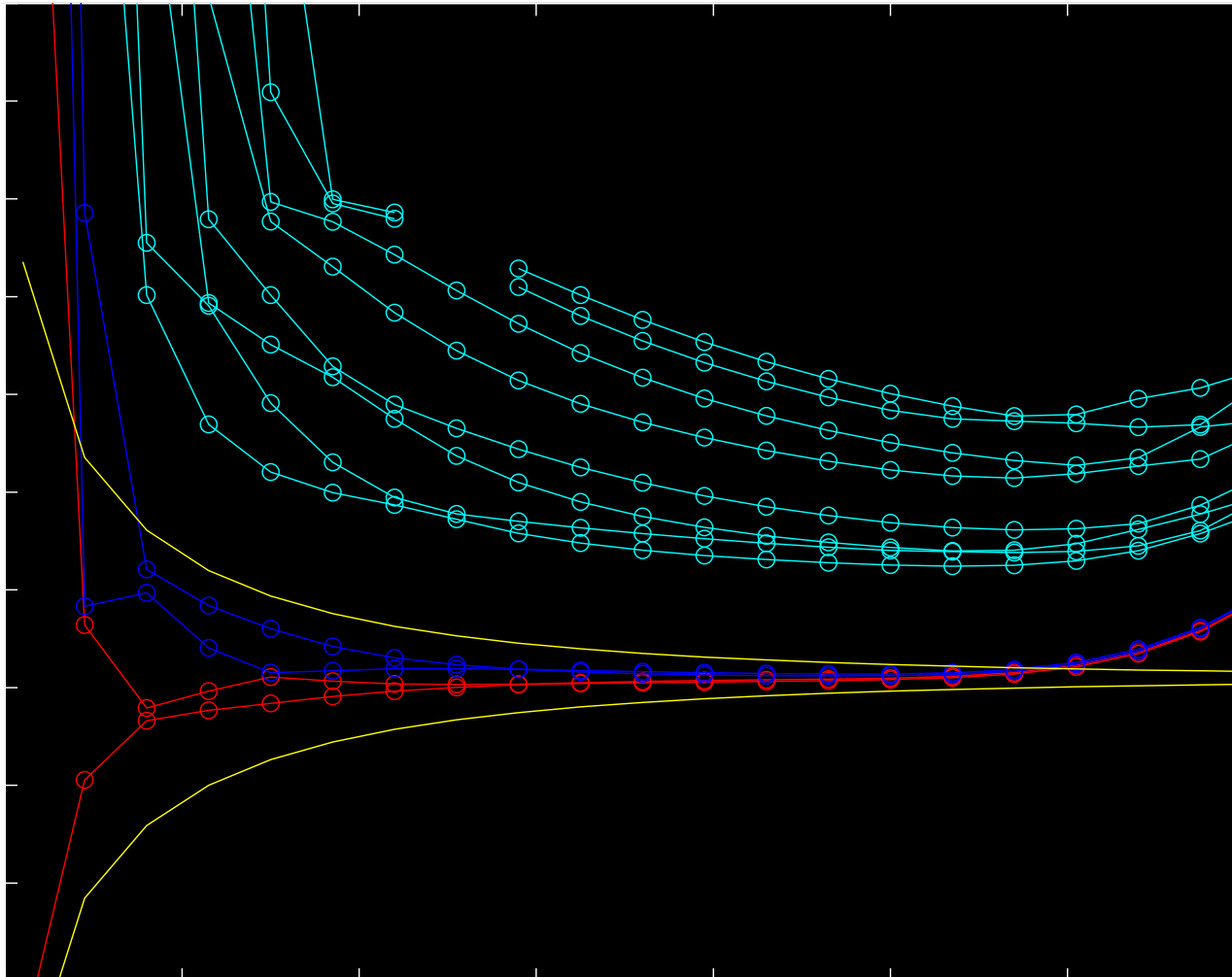
$h^{-1} \mu_{h,n}$ versus h^{-1}

64 éléments, Q5



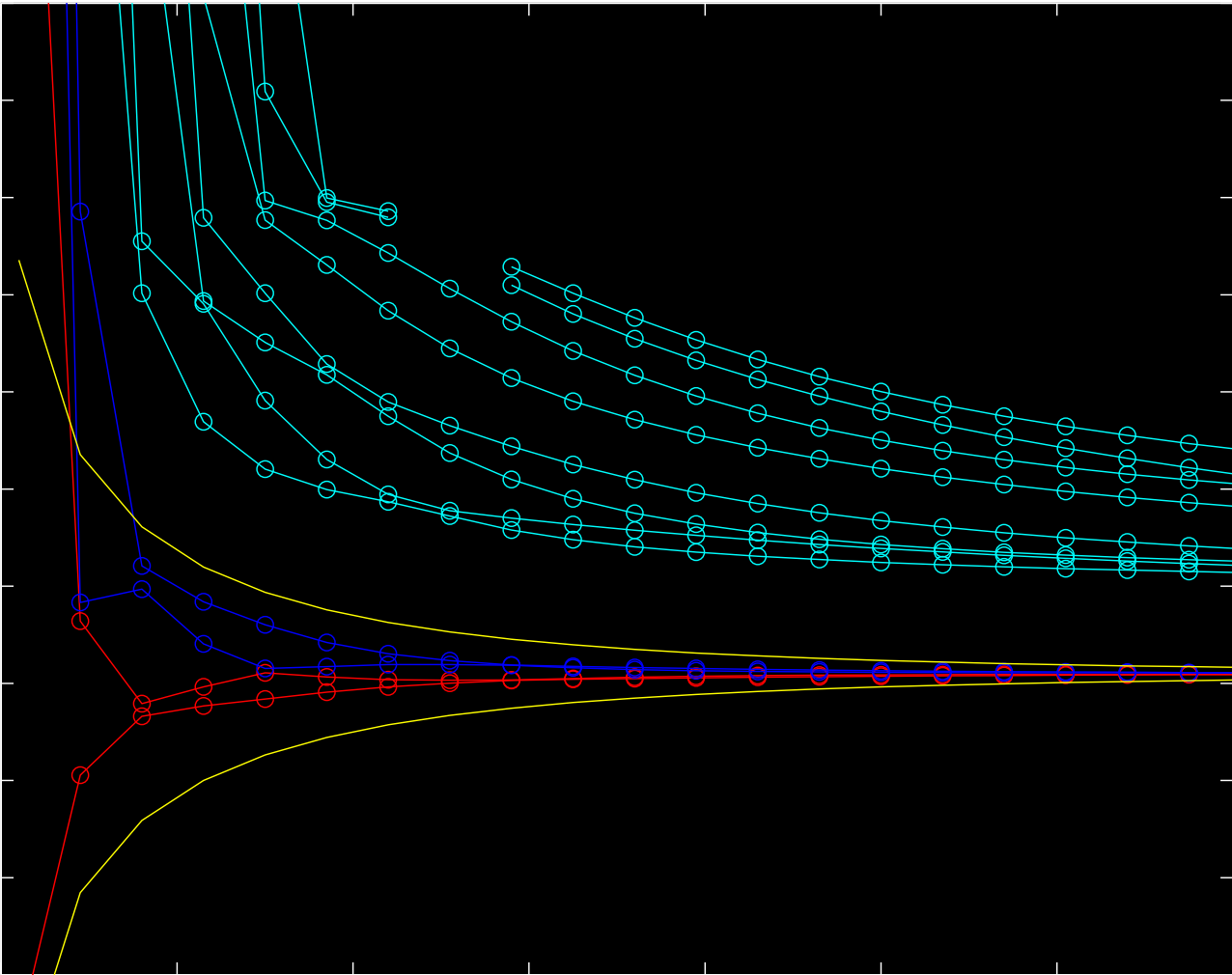
$h^{-1} \mu_{h,n}$ versus h^{-1}

16 éléments, Q10



$h^{-1} \mu_{h,n}$ versus h^{-1}

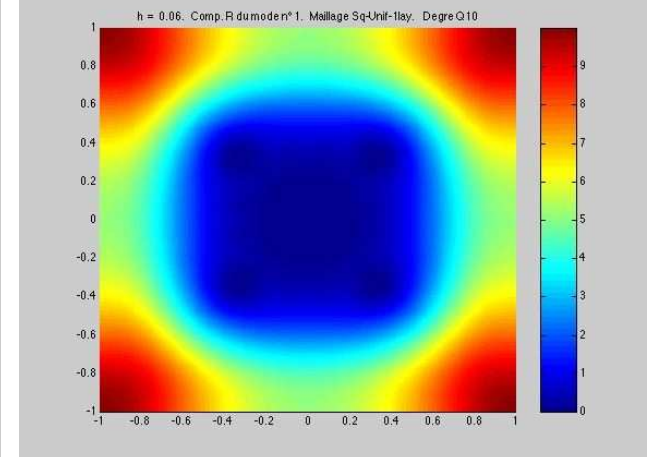
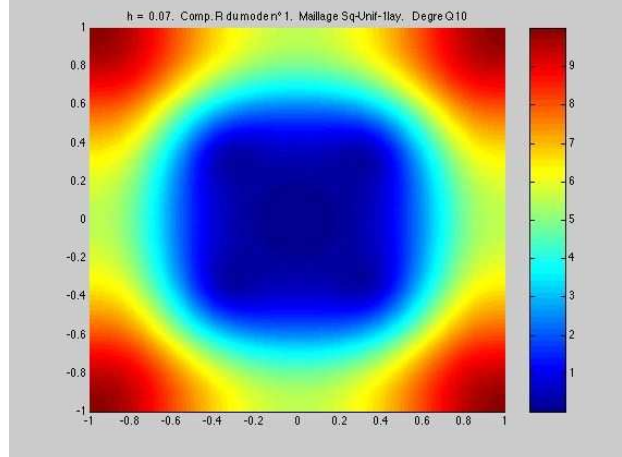
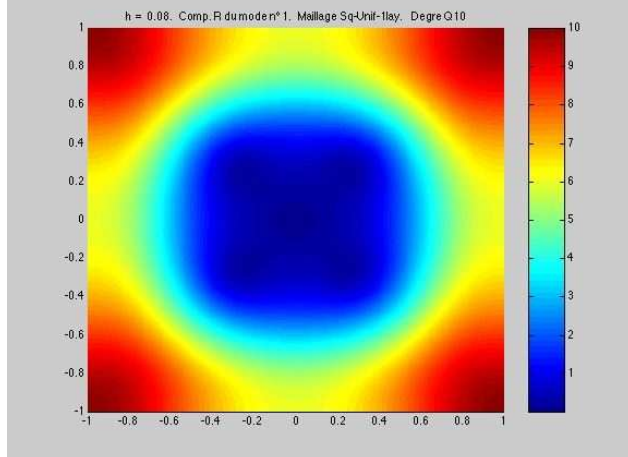
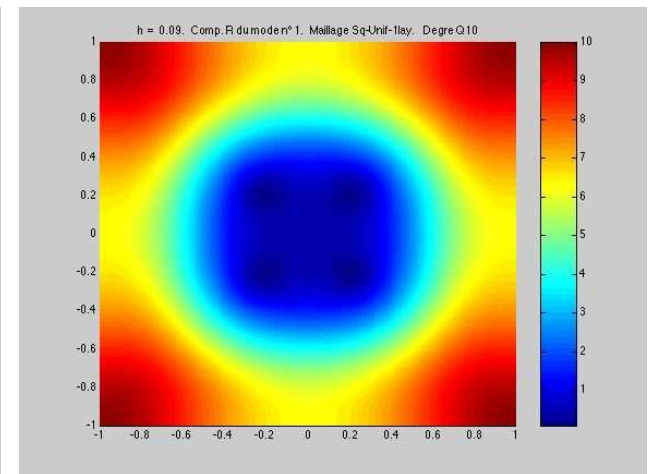
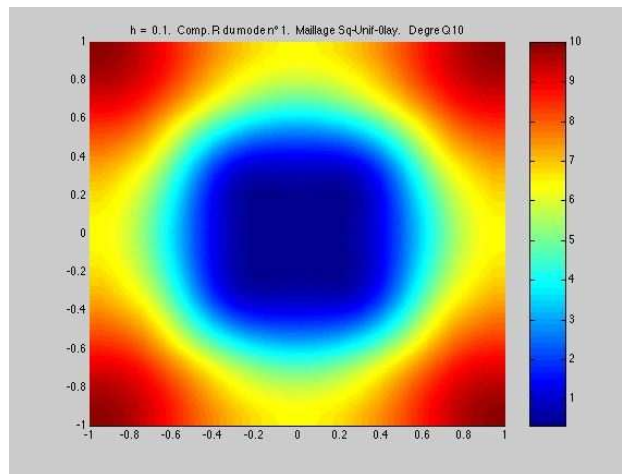
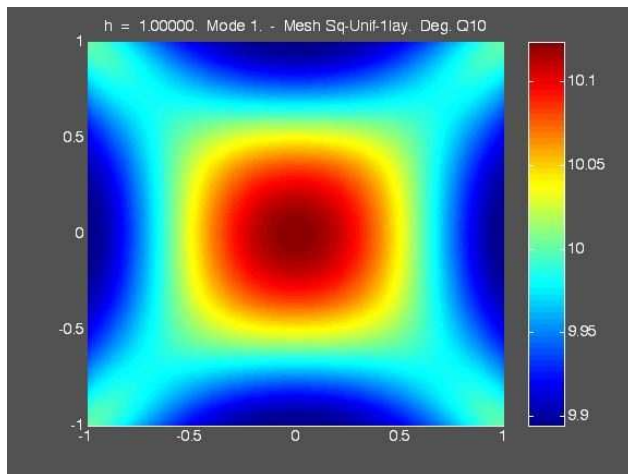
64 éléments, Q10 (4 fois plus de degré de liberté)



$h^{-1} \mu_{h,n}$ versus h^{-1}

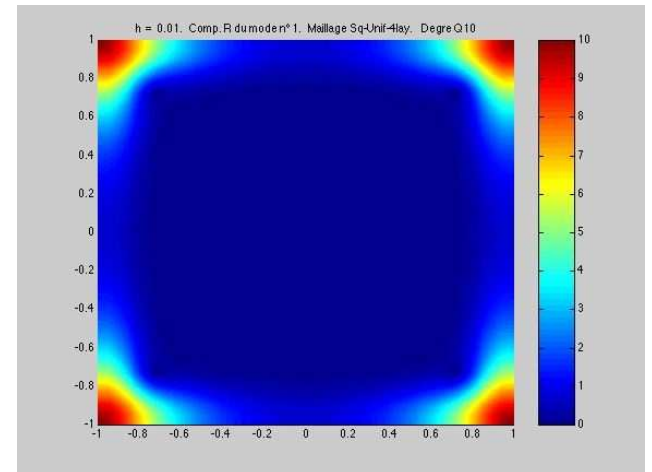
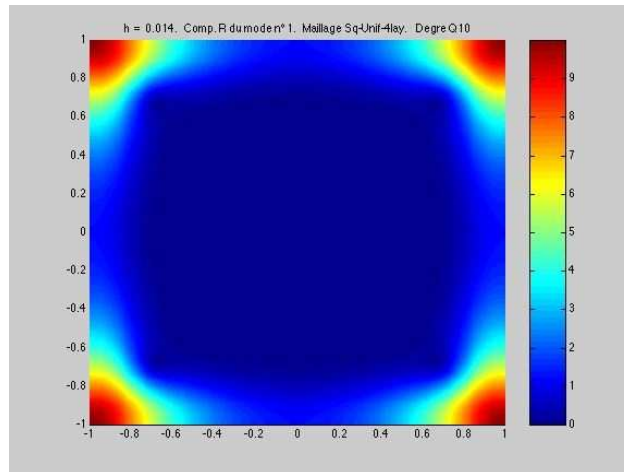
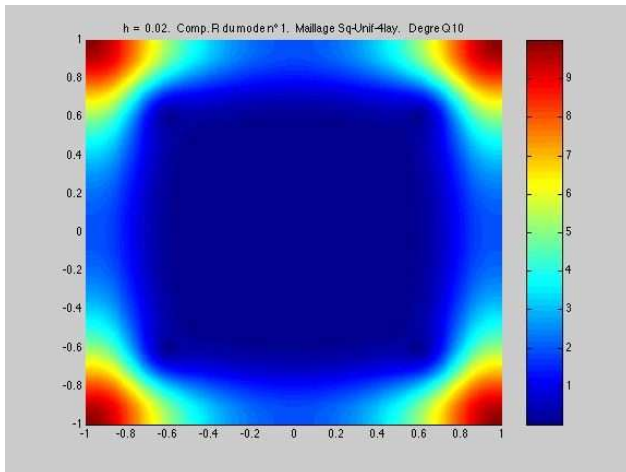
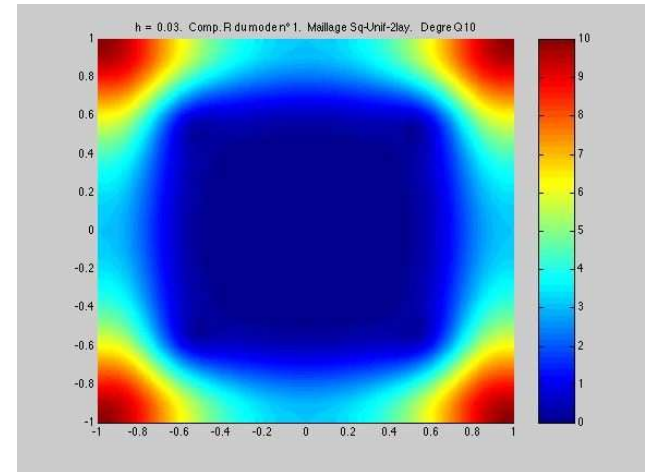
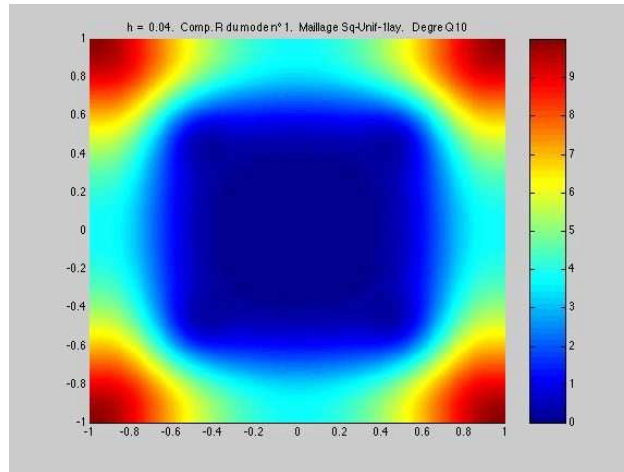
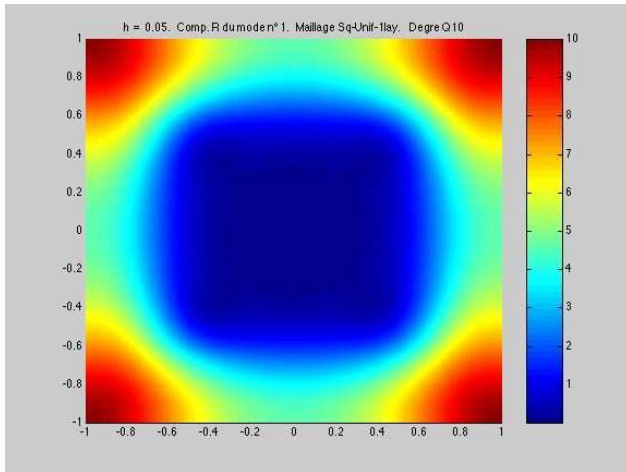
Convergence des vecteurs propres

Module du paramètre d'ordre



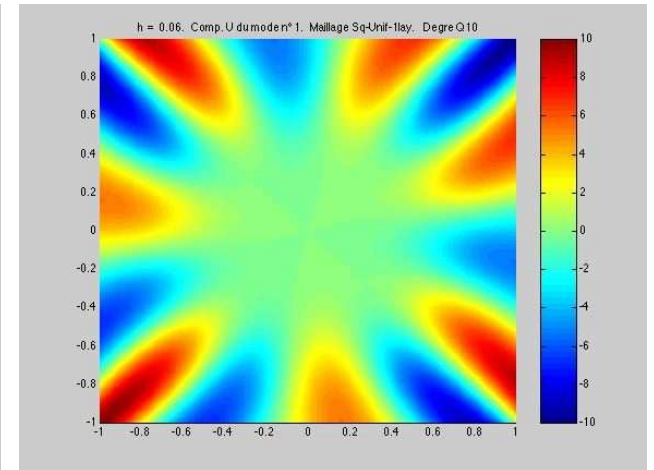
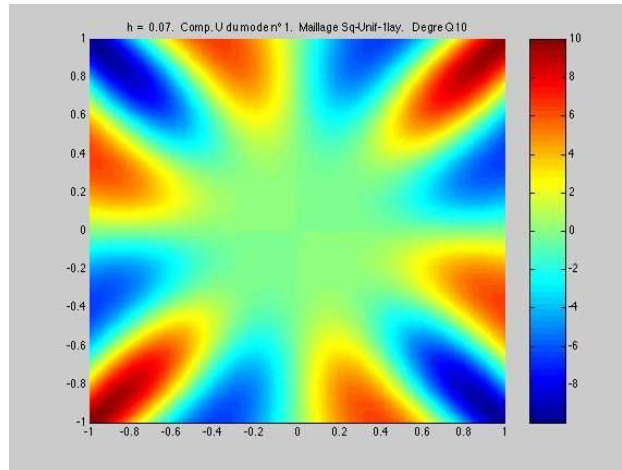
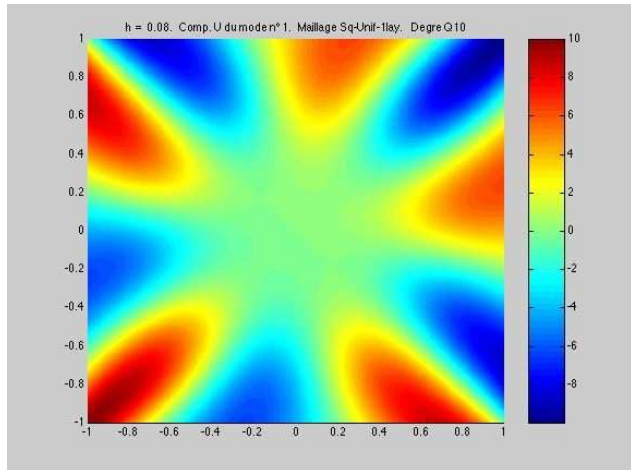
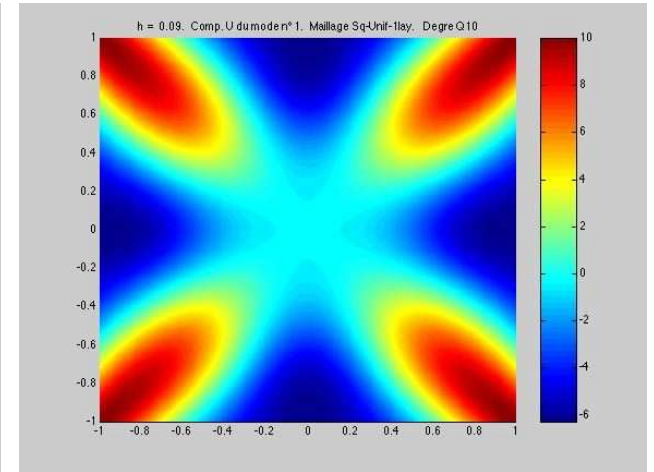
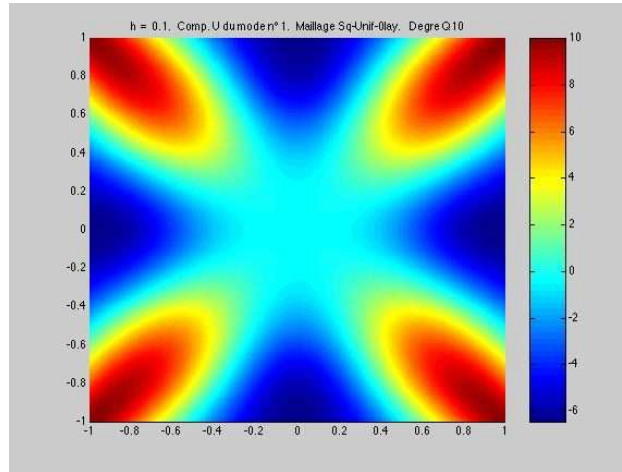
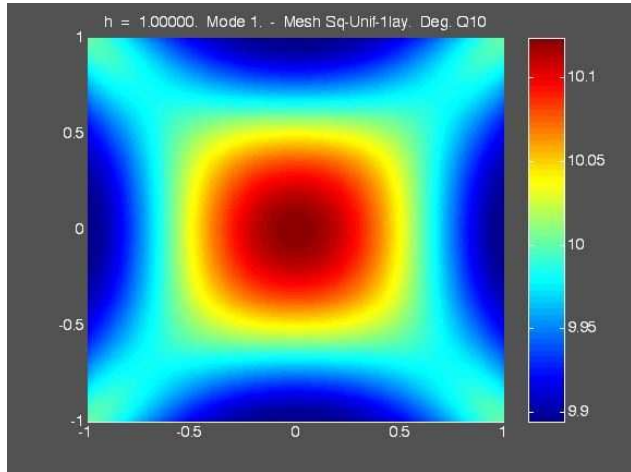
$$h = 1, 0.1, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06$$

Module du paramètre d'ordre (suite)



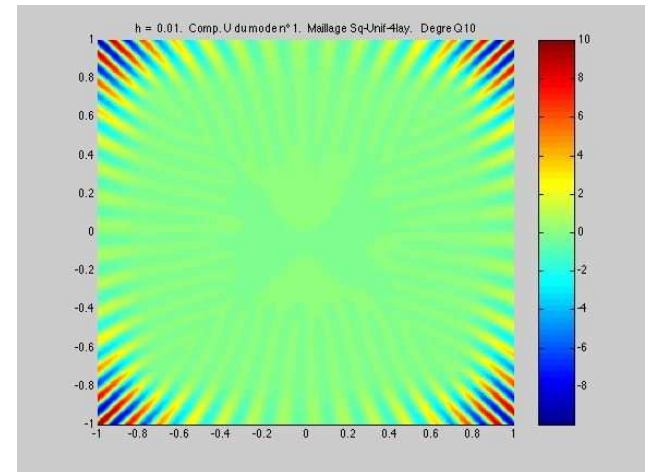
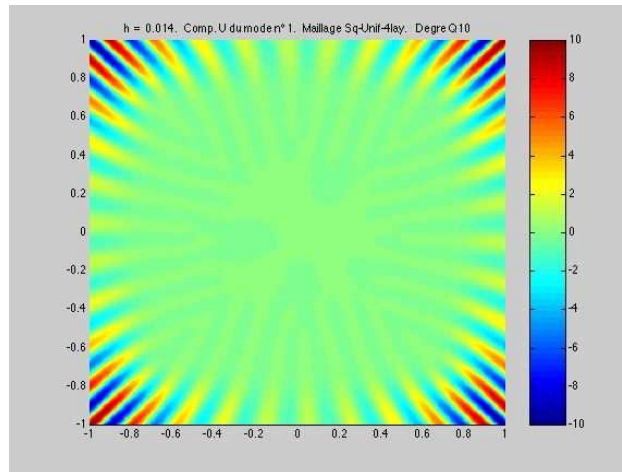
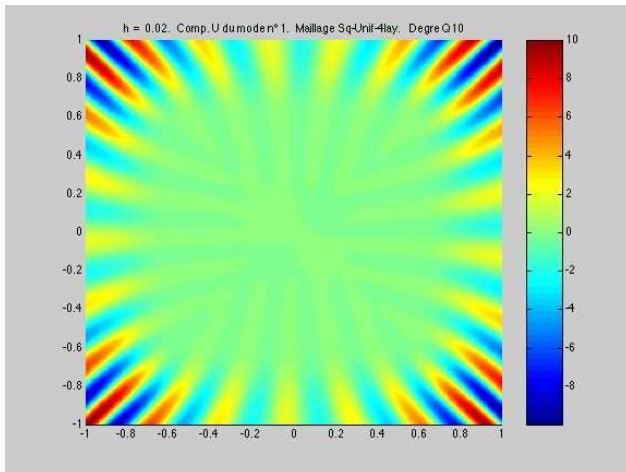
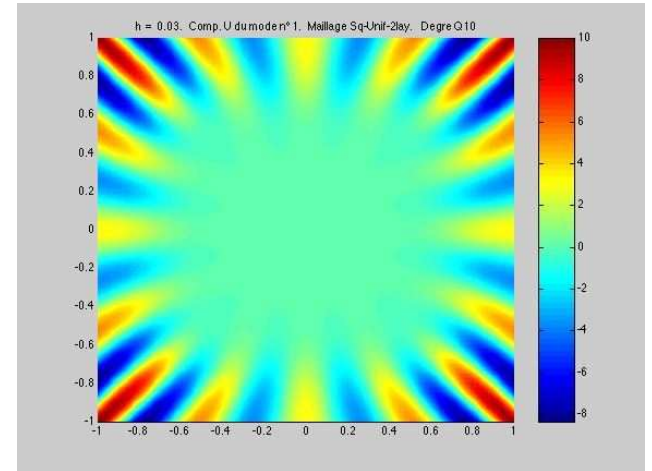
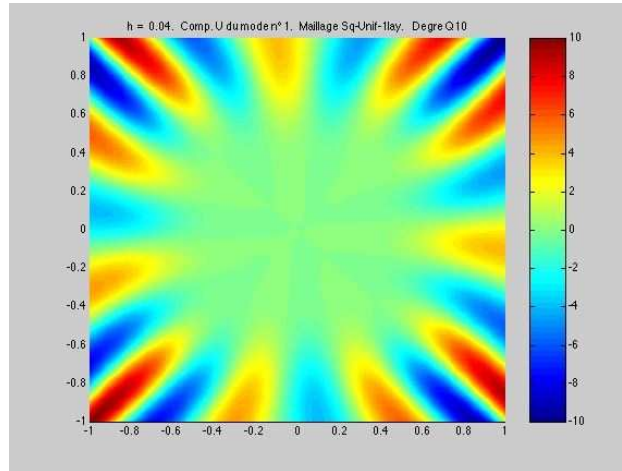
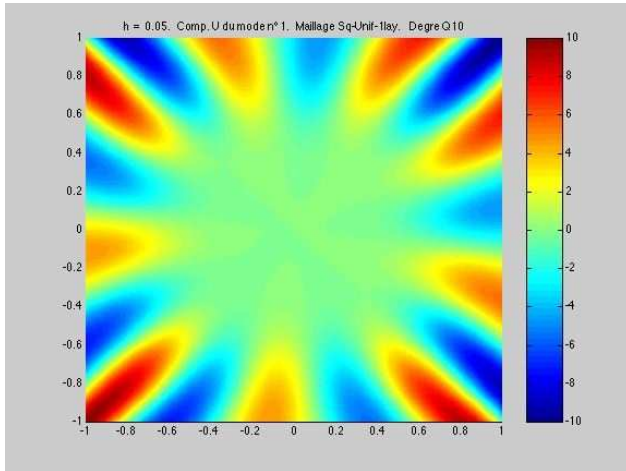
$$h = 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, 0.014, 0.01$$

Partie réelle du paramètre d'ordre



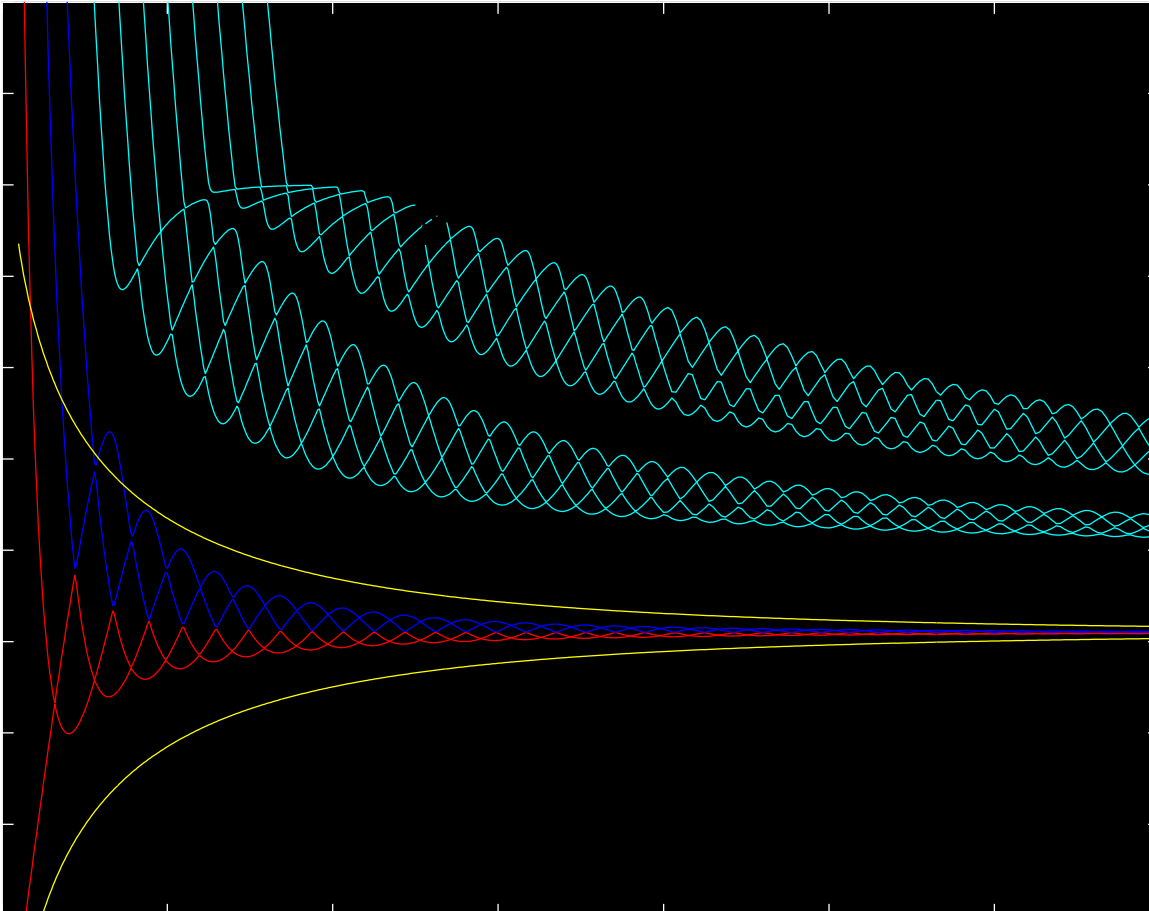
$$h = 1, 0.1, 0.09, 0.08, 0.07, 0.06$$

Partie réelle du paramètre d'ordre (suite)



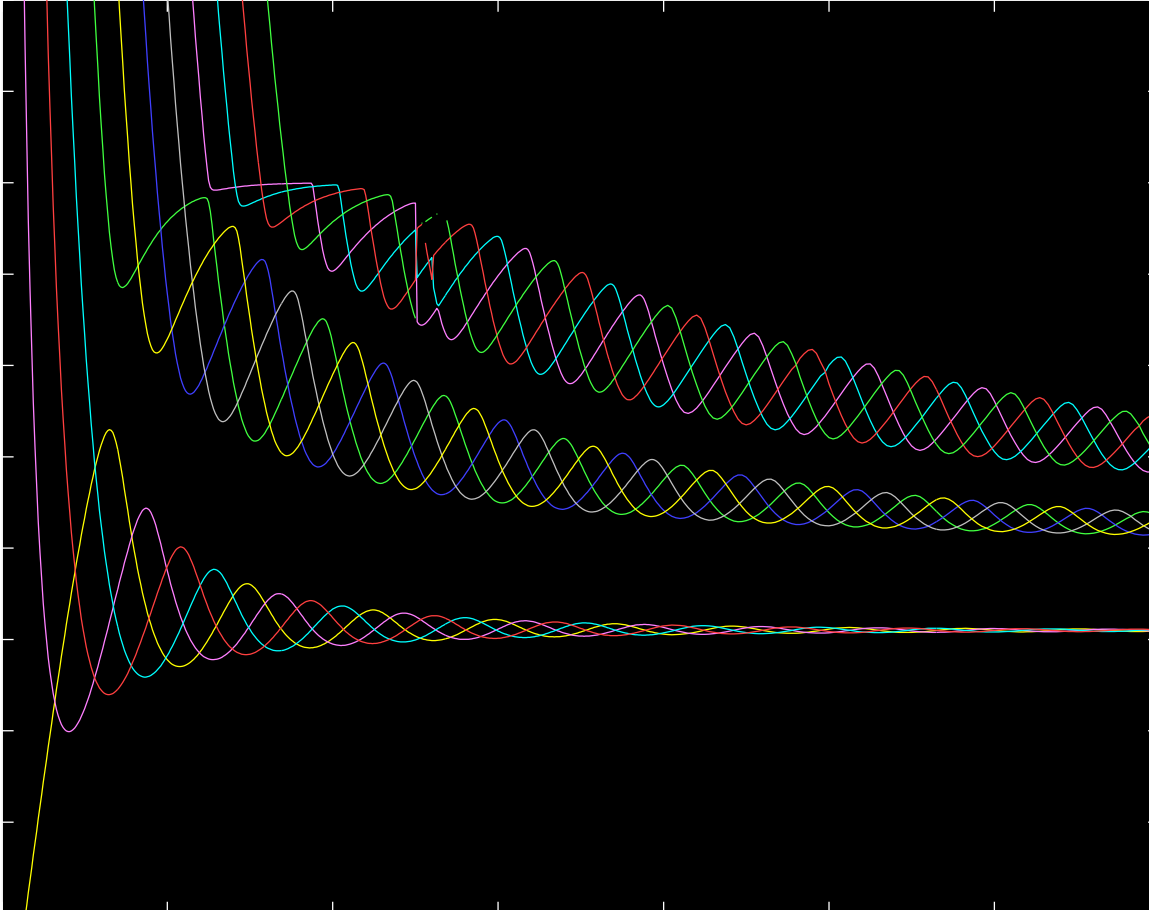
$$h = 0.05, 0.04, 0.03, 0.02, 0.014, 0.01$$

Convergence des premières valeurs propres



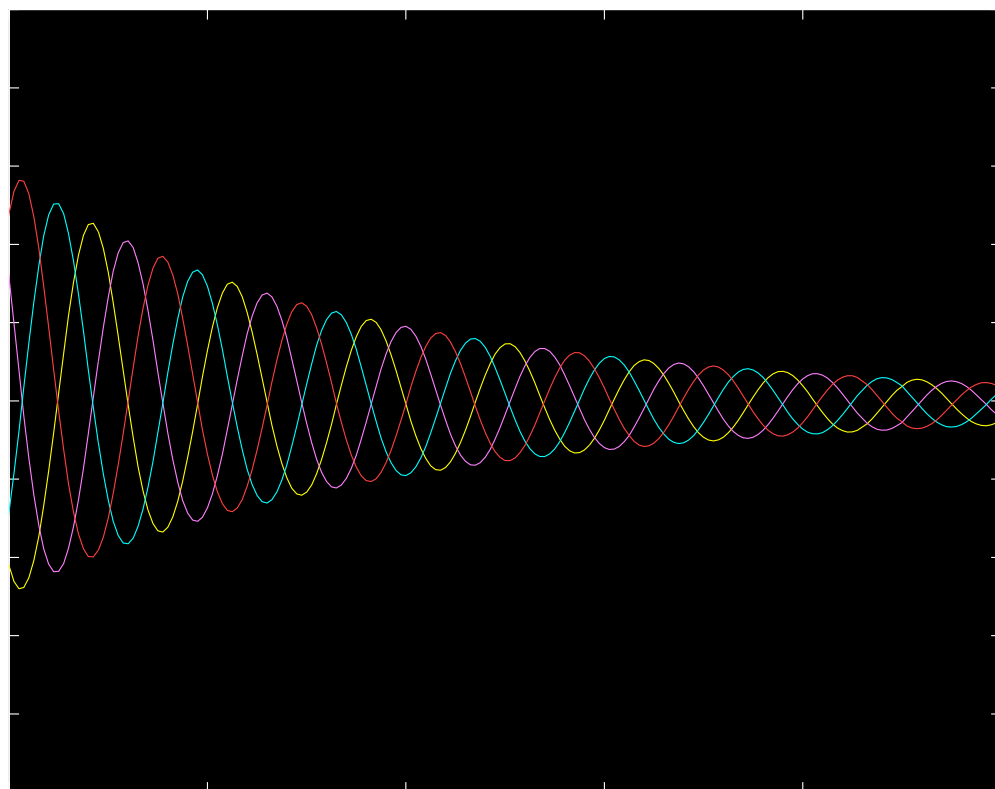
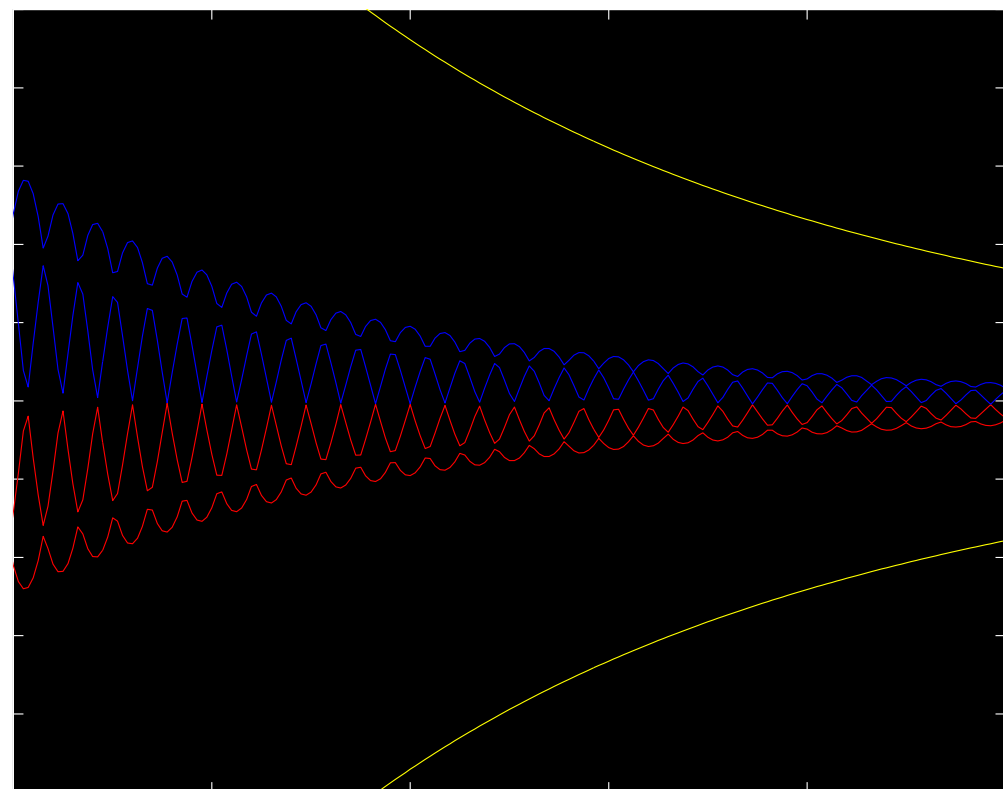
$h^{-1} \mu_{h,n}$ versus h^{-1}

Convergence des premières valeurs propres (suite)



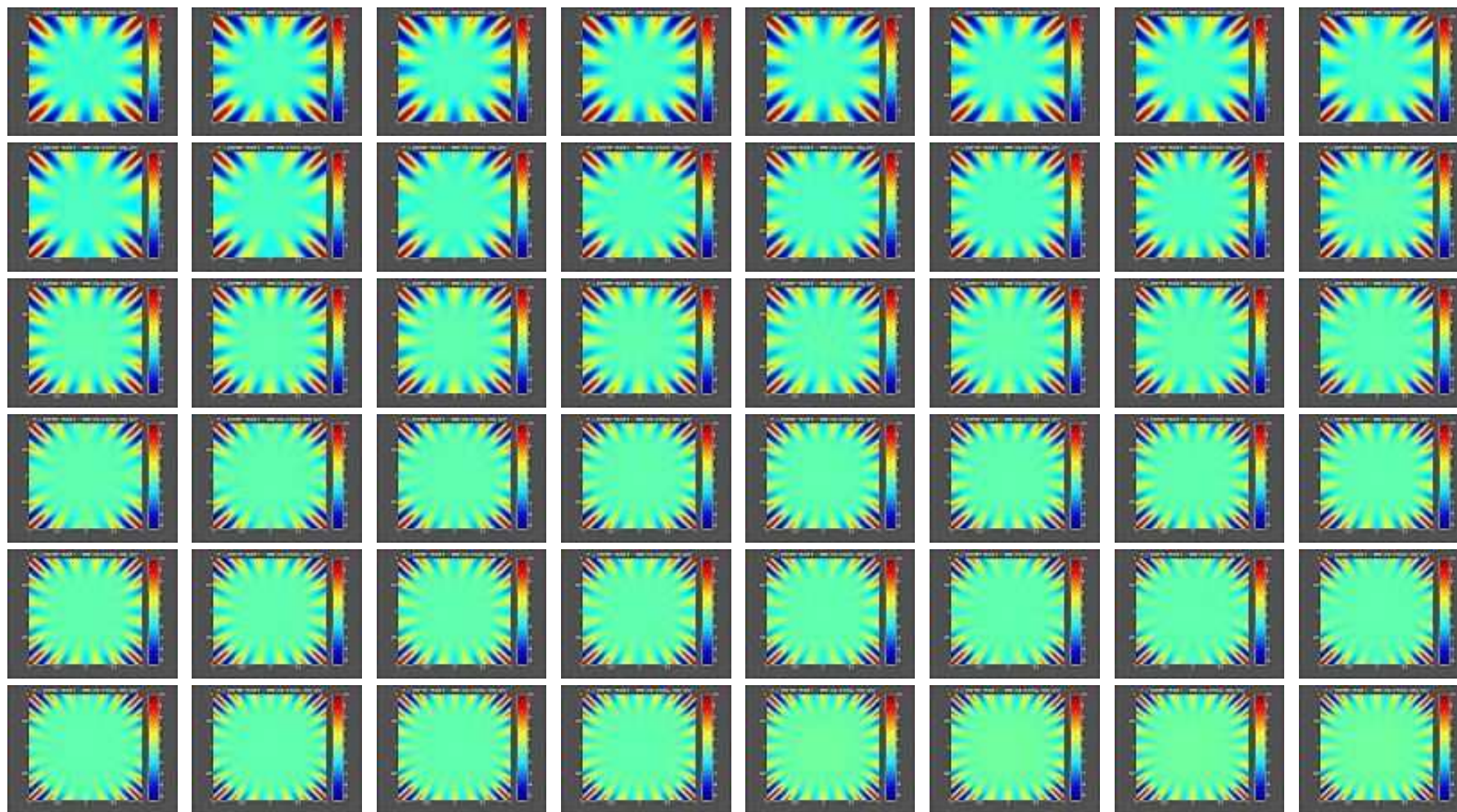
$h^{-1} \mu_{h,n}$ versus h^{-1}

Premier cluster de valeurs propres

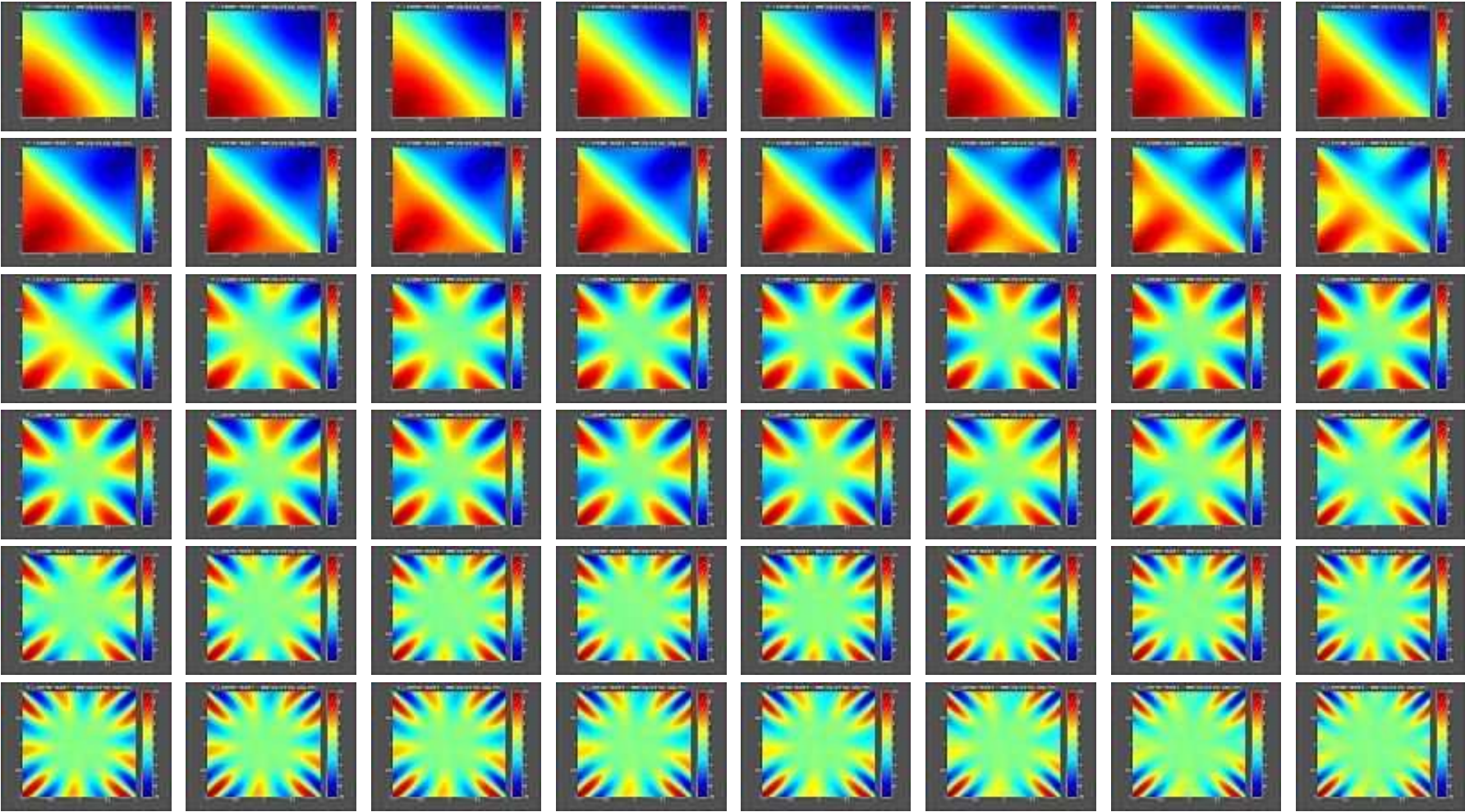


$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1}

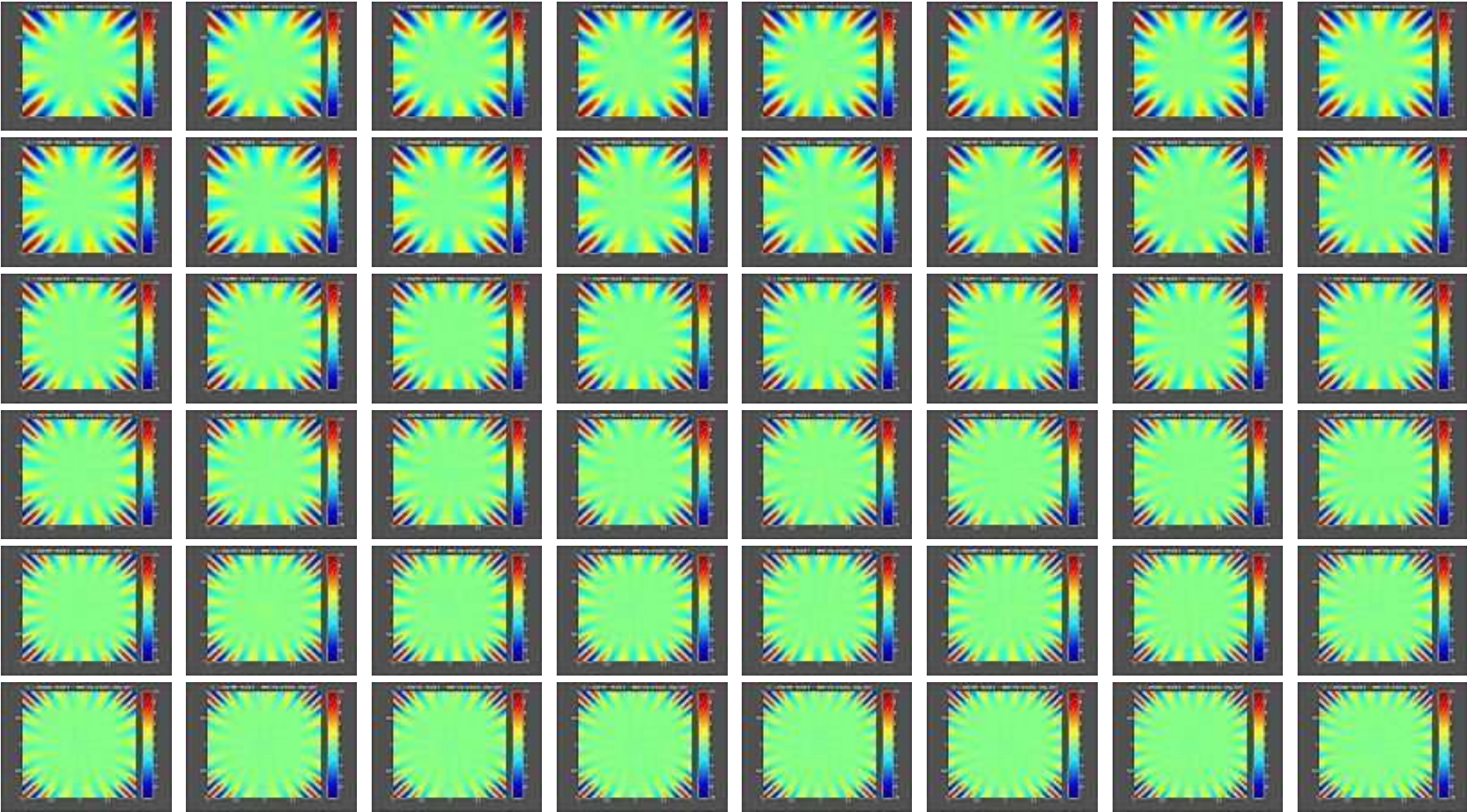
Premier mode (suite)



Deuxième mode



Deuxième mode (suite)



Cinquième mode (suite)

