Sujets MATh en JEANS 2002-2003

Virginie BONNAILLIE, Antoine ROUSSEAU
Université de Paris-Sud, ORSAY

17 septembre 2002

1 L'élastique

Paul dispose d'un élastique d'un centimètre quand il n'est pas étiré et on suppose qu'on peut l'étirer autant qu'on le veut. Il marque un point de l'élastique au crayon rouge. Il étire l'élastique jusqu'à doubler sa longueur puis le replie en deux. Il regarde la nouvelle position du point rouge. Peut-il retomber sur la même position ?
Pour cela, on commencera par donner la position du point à la deuxième étape en connaissant la position à la première étape.
Il renouvelle son opération autant de fois qu'il le désire. Peut-il retrouver la position initiale au bout de 2 , 3, 4, k étapes ? Donner la position que doit avoir le point rouge initialement pour qu'au bout de k étirements exactement, le point rouge soit à la même position qu'au début ?

2 Construction à la règle et au compas

On dispose uniquement d'une feuille non quadrillée, d'une règle non graduée et d'un compas. Sur cette feuille sont placés deux points, O et I, distants d'un centimètre. Initialement, l'ensemble des points constructibles, P, se réduit à $\{O, I\}$. On définit l'ensemble A des droites passant par deux points de P et l'ensemble B des cercles dont le centre est un point de P et le rayon est la distance entre deux points de P. On ajoute à l'ensemble P tous les points d'intersection de deux droites de A, d'une droite de A avec un cercle de B ou de deux cercles de B.
Montrez que l'on peut construire un point J tel que OIJ définisse un repère orthonormé.
L'ensemble P grossit à chaque étape car on peut recommencer la construction avec tous les nouveaux points que l'on a construits à partir des deux seuls points O et I.
Montrez que par ce procédé, on peut construire tout point de coordonnées $(k, 0)$ où k est un entier puis avec k un rationnel.
Montrez que si le point de coordonnées $(k, 0)$ est constructible, alors le point $(\sqrt{k}, 0)$ l'est aussi.
Construire un pentagone à la règle et au compas.

3 Le tour de France

On souhaite colorier chaque région administrative française de telle sorte que deux régions voisines ne soient pas de la même couleur. Quel est le nombre de couleurs minimal pour ce coloriage ?
Proposer un algorithme de coloriage.
Peut-on faire un tour de France, c'est-à-dire partir d'une région administrative, passer une et une seule fois par toutes les autres régions et revenir à la région initiale ?

4 Des chiffres et des lettres

Chaque lettre désigne un chiffre différent et on interdit aux lettres S et H de représenter le 0. Trouver la valeur des lettres E, H, I, P, S, T, U, X pour que la somme suivante soit exacte :

$$\begin{array}{cccccc} & & & S & I & X \\ + & & S & E & P & T \\ + & & H & U & I & T \\ \hline & S & U & I & T & E \end{array}$$

5 Savez-vous compter ?

Il y a deux types de mathématiciens, ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas.
Sauriez-vous expliquer le phénomne suivant :
On écrit en tête de deux colonnes deux nombres à multiplier, choisissons par exemple 457 et 365. Sur chacune des lignes qui suivent, on divise par deux dans la colonne de gauche (sans se préoccuper du reste) le nombre du dessus, et on multiplie par deux celui du dessus dans la colonne de droite.
On s'arrête lorsque le nombre de la première colonne est 1. On fait alors la somme des nombres de la colonne de droite situés en face d'un nombre impair de la colonne de gauche, ce qui donne :

457	365
228	730
114	1460
57	2920
28	5840
14	11680
7	23360
3	46720
1	93440

On a $93440 + 46720 + 23360 + 2920 + 365 = 166805$. Or il se trouve que $166805 = 457 \times 365$.

6 Propagation d'une épidémie

On souhaite étudier la propagation d'une épidémie. On considère une population dont on néglige les fluctuations dues à d'autres facteurs que la maladie contagieuse (on ne tiendra donc pas compte des naissances, décès ne provenant pas de la maladie ou migration). On justifie cette hypothèse par le fait qu'on ne s'intéresse qu'aux conséquences de l'épidémie. La population se scinde en 4 groupes :

1. Les personnes saines immunisées contre la maladie,
2. Les personnes saines susceptibles de contracter la maladie, on note S le nombre de telles personnes,
3. Les personnes infectieuses, dont le nombre est noté I,
4. Les personnes retirées, R (ce groupe comprend les personnes décédées des suites de la maladie ou incapables de transmettre la maladie).

La population globale de ces 4 groupes est donc supposée constante. On note α le taux de contagion et β le taux d'isolement.
Proposer un modèle qui montre l'évolution des différents groupes en fonction de la répartition de la population initialement et en fonction des taux de contagion et d'isolement.