

Sujets MATH en JEANS 2003-2004

Virginie Bonnaillie - Antoine Rousseau

17 septembre 2003

1 La Hola au Stade de France

L'objectif de ce problème est de simuler numériquement la propagation d'une hola au Stade de France. On désigne pour cela par $u(x, t)$ la proportion de gens qui au temps t sont levés de leur siège situé en position x (x représente la position autour du stade, ainsi x varie entre 0 et L , le périmètre de celui-ci).

On suppose que la «vague» se propage à une vitesse constante $c = 5 \text{ m.s}^{-1}$.

En travaillant avec de petits intervalles de temps de taille dt , écrivez une équation pour la fonction $u(x, t)$. Puis grâce à la méthode d'Euler, construisez une méthode numérique pour simuler la hola.

2 La suite de l'élastique magique

Paul dispose d'un élastique d'un centimètre quand il n'est pas étiré et on suppose qu'on peut l'étirer autant qu'on le veut. Il marque un point de l'élastique au crayon rouge. Il étire l'élastique jusqu'à doubler sa longueur puis le replie en deux. Il regarde la nouvelle position du point rouge. Peut-il retomber sur la même position ?

Pour cela, on commencera par donner la position du point à la deuxième étape en connaissant la position à la première étape.

Il renouvelle son opération autant de fois qu'il le désire. Peut-il retrouver la position initiale au bout de 2, 3, 4, k étapes ? Donner la position que doit avoir le point rouge initialement pour qu'au bout de k étirements exactement, le point rouge soit à la même position qu'au début ?

Soit désormais p un nombre premier. Combien y-a-t-il de points de période p ? De prime période p ? En déduire le «petit» théorème de Fermat.

3 Echange savoyards contre parisiens

On s'intéresse aux migrations de populations annuelles entre la Haute-Savoie et Paris. On ne considère que deux types d'événements : les parisiens restent à Paris ou bien déménagent en Haute-Savoie, et de même pour les savoyards. Les moyennes sur les dernières décennies ont révélé que 80% des savoyards restaient vivre en Haute-Savoie alors que 40% des parisiens déménageaient. La Haute-Savoie compte 570 000 habitants en 1990 tandis que Paris en compte 2 000 000. Quelle sera la population de chaque département 10 ans plus tard, 100 ans plus tard ?

Après une critique constructive de ce modèle, donner un modèle mathématique de la situation. Pourrait-t-on ainsi simuler des échanges entre plus de 2 départements, et si oui comment ?

4 Mais où sont les zéros ?

j	$P_j(x)$	$P_j(0)$	$P_j(5)$
1	$x^3 - 8x^2 + 17x - 10$	-10	0
2	$-3x^2 + 16x - 17$	-17	-12
3	$\frac{26}{9}x - \frac{46}{9}$	$-\frac{46}{9}$	$\frac{84}{9}$
4	$-\frac{324}{169}$	$-\frac{324}{169}$	$-\frac{324}{169}$

Ce tableau donnera le nombre d'annulations du polynôme $P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ entre 0 et 5. Comment faire ?

C'est très simple... ou presque ! Dans la deuxième colonne, on construit une suite de polynômes. On réécrit le polynôme P dans la première ligne puis on écrit l'opposé de la dérivée de P dans la deuxième ligne. À vous de devinez comment on construit les polynômes des lignes suivantes...

Les troisième et quatrième colonnes évaluent le polynôme de la première colonne en 0 et 5.

Dans les troisième et quatrième colonnes, on remarque qu'il y a respectivement 0 et 2 changements de signes. J'affirme qu'il y a donc 2 racines du polynôme $P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 10$ entre 0 et 5...

Pourquoi ??? Comment en déduire les zéros des polynômes avec autant de décimales que l'on veut ?

5 Un réseau d'ordinateurs

5.1 Un réseau local

Dans une salle informatique, on dispose de 15 ordinateurs. On voudrait les relier de sorte que chaque appareil soit connecté à exactement trois autres ordinateurs. Comment faire ?

5.2 Un réseau national

On veut réaliser un réseau de communications entre différentes villes de France. Le coût pour relier deux villes n'est pas toujours le même et on cherche un réseau qui coûtera le moins cher et qui relie toutes les villes présentes dans le tableau suivant donnant les coûts des liaisons.

Liaison	coût	Liaison	coût
Brest - Paris	800 euros	Marseille - Toulouse	1300 euros
Brest - Nantes	400 euros	Marseille - Sarreguemines	2300 euros
Brest - Strasbourg	2000 euros	Nantes - Paris	700 euros
Dijon - Paris	500 euros	Nantes - Strasbourg	1800 euros
Dijon - Lyon	300 euros	Nantes - Toulouse	1000 euros
Dijon - Strasbourg	300 euros	Paris - Strasbourg	700 euros
Lyon - Toulouse	1100 euros	Paris - Sarreguemines	900 euros
Lyon - Strasbourg	600 euros	Paris - Toulouse	1600 euros
Marseille - Paris	1300 euros	Sarreguemines - Strasbourg	200 euros

Quel est le réseau le moins coûteux ?