Approche des différences finies.

Virginie BONNAILLIE - Anthony SIAUDEAU
Université d'Orsay, Dpartement de Mathmatique,

Cluses, le 25 Avril 2002

Plan :

1. Présentation.
2. Qu'est-ce qu'une dérivée ?
3. Le problème mathématique.
4. L'approche numérique du problème.
   - Discrétisation.
   - Résolution approchée.
   - Interpolation.
5. Utilisation des différences finies sur un exemple.
6. Conclusion.

Présentation

$$\boxed{\text{Phénomène à étudier}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Modélisation mathématique}\\ \text{(E. D. P.)}\end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{Modélisation numérique}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Solution approchée}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\text{Prévisions + exploitation des résultats}}$$

Qu'est-ce qu'une dérivée ?

Dérivée $\leftrightarrow$ accroissement.

Dérivée en x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Le problème mathématique

On s'intéresse à la résolution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(0) & = & 2 \\ f'(x) & = & 5f(x). \end{array} \right.$$

- Première équation : condition initiale,
- Deuxième équation : comportement et évolution de notre modèle.

Solution exacte :

$$f(x) = 2\ \exp(5x).$$

L'approche numérique du problème

Discrétisation

- On ne va pas chercher à connaître la fonction en tout point.
- On va chercher à déterminer la solution en certains points de l'intervalle.

On considère $n+1$ points $x_0 = 0, \ldots, x_n = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$.
On va plutôt résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x_0) & = & 2, \\ f'(x_k) & = & 5f(x_k), \text{ pour } k = 0, \ldots, n. \end{array} \right.$$

Résolution approchée

On va encore simplifier le problème en remplaçant la dérivée par son taux d'accroissement :

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}, \text{ pour } k = 0, \ldots, n-1.$$

Notons f_k la valeur approchée de f au point x_k ($f_k \approx f(x_k)$), on se ramène à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_0 & = & 2, \\ f_{k+1} - f_k & = & 5(x_{k+1} - x_k)\ f_k, \quad \text{pour } k = 0, \ldots, n-1. \end{array} \right.$$

Interpolation

On connait ainsi les valeurs approchées de la fonction f aux points x_k.

Pour connaître la fonction sur tout l'intervalle, il suffit de relier les points.

On a alors une approximation linéaire par morceaux de la solution exacte.

Utilisation des différences finies

Modélisation du système proies-prédateurs

$N(t)$ nombre de proies à l'instant t,
$P(t)$ nombre de prédateurs à l'instant t.

$$\begin{cases} N'(t) & = & N(t)(a - bP(t)), \\ P'(t) & = & P(t)(cN(t) - d). \end{cases}$$

Conclusion

- La précision augmente avec le nombre de points de la subdivision.
- On peut calculer l'erreur commise en fonction de ce nombre.
- Principe de base à l'origine de beaucoup d'autres méthodes raffinées.