Analyse mathématique de la supraconductivité

Virginie BONNAILLIE-NOËL

IRMAR, CNRS, ENS Cachan Bretagne et Université Rennes 1

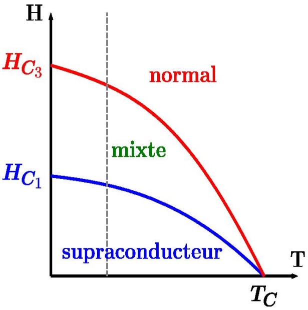
1981-2011 : le CIRM célèbre ses 30 ans

7 octobre 2011

Supraconductivité

Phénomène physique

- propriété relative à certains matériaux
- à très basse température ($153K$ au mieux)
- résistance électrique nulle
- expulsion du champ magnétique extérieur
  effet Meissner



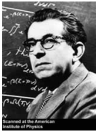
Supraconductivité

Un peu d'histoire

Onnes

Meissner

London



Ginzburg et Landau

Abrikosov

1911	Onnes	résistivité électrique nulle à basse température	Nobel 1913
1933	Meissner	expulsion du champ magnétique	
1938	London	pénétration du champ magnétique à la surface	
1950	Ginzburg-Landau	approche phénoménologique	Nobel 2003
1952	Abrikosov	supraconducteur de type II	Nobel 2003
1957	Barden-Cooper-Schrieffer	théorie BCS	Nobel 1972
1959	Gorkov	$GL \sim BCS$ près de la température critique	
1962	Josephson	effet tunnel dans les supraconducteurs	Nobel 1973
'60	De Gennes	supraconductivité de surface	Nobel 1991
1986	Berdnoz-Müller	découverte des cuprates	Nobel 1987

Barden, Cooper,Schrieffer

Josephson

De Gennes

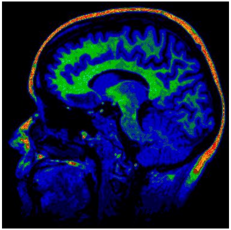
Berdnoz et Müller

Supraconductivité

Domaines d'applications

- Lévitation magnétique : trains à sustentation électromagnétique
  MagLev au Japon, projets allemands

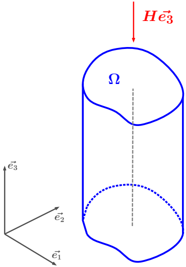
- Imagerie médicale : IRM, RMN



Modélisation mathématique

Théorie de Ginzburg-Landau (1950)

- *description macroscopique*
- *valable près de la température critique*
- *basée sur une transition de second ordre*



$\Omega \subset \mathbb{R}^d$

κ	caractéristique du matériau *(κ grand)*
$H \operatorname{rot} \mathcal{A}_0$	champ magnétique appliqué
	($\operatorname{rot} \mathcal{A}_0$ vecteur unitaire)
$H\mathcal{A}$	potentiel magnétique induit
ψ	paramètre d'ordre
	($\vert\psi\vert^2 \propto$ densité des paires de Cooper)

Énergie du matériau :

$$\mathcal{E}_{\kappa,H}[\psi,\mathcal{A}] = \int_\Omega \left\{ |(\nabla - i\kappa H\mathcal{A})\psi|^2 - \kappa^2|\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}|\psi|^4 \right\} \mathrm{d}x + \kappa^2 H^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\operatorname{rot}(\mathcal{A}-\mathcal{A}_0)|^2 \, \mathrm{d}x$$

But : comprendre l'influence de Ω sur le comportement des minimiseurs

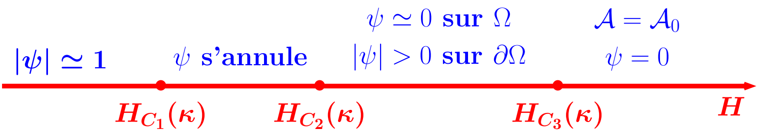
Modélisation mathématique

Champs critiques pour κ grand

- Pour tout $\kappa, H > 0$, la fonctionnelle $\mathcal{E}_{\kappa,H}$ a un minimiseur
- Pour κ fixé et H assez grand, l'unique solution est $(\psi, \mathcal{A}) = (0, \mathcal{A}_0)$

  $\Rightarrow$ *la supraconductivité est détruite* *cf. [Giorgi-Phillips]*

$(\psi, \mathcal{A})$ minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$



Modélisation mathématique

Champ(s) critique(s) H_{C_3}

Plusieurs définitions possibles :

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \inf\{H > 0 \ : \ (0, \mathcal{A}_0) \text{ est un minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H}\}$$

$$\overline{H}_{C_3}(\kappa) = \inf\{H > 0 \ : \ (0, \mathcal{A}_0) \text{ est l'unique minimiseur de } \mathcal{E}_{\kappa,H'} \text{ pour tout } H' > H\}$$

cf. [Pan]

But:

- asymptotique des champs critiques lorsque $\kappa \to +\infty$
- estimations de la localisation de la supraconductivité

Supraconductivité

Équations d'Euler-Lagrange

$(\psi, \mathcal{A})$ minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$

$$\begin{cases} -(\nabla - i\kappa H\mathcal{A})^2\psi = \kappa^2\psi(1-|\psi|^2) & \text{sur} \quad \Omega \\ \mathrm{rot}^2\,\mathcal{A} = \big\{ -\frac{i}{2\kappa H}(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}) - |\psi|^2\mathcal{A}\big\}1_\Omega(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^d \\ (\nabla - i\kappa H\mathcal{A})\psi\cdot\nu = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Supraconductivité

Équations d'Euler-Lagrange

$(\psi, \mathcal{A})$ minimiseur de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$

$$\begin{cases} -(\nabla - i\kappa H\mathcal{A})^2\psi = \kappa^2\psi(1-|\psi|^2) & \text{sur} \quad \Omega \\ \mathrm{rot}^2\,\mathcal{A} = \{-\frac{i}{2\kappa H}(\overline{\psi}\nabla\psi - \psi\nabla\overline{\psi}) - |\psi|^2\mathcal{A}\}1_\Omega(x) & \text{sur} \quad \mathbb{R}^d \\ (\nabla - i\kappa H\mathcal{A})\psi\cdot\nu = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Linéarisation autour de $(\psi, \mathcal{A}) = (0, \mathcal{A}_0)$

$$\begin{cases} -(\nabla - i\kappa H\mathcal{A}_0)^2\psi = \kappa^2\psi & \text{sur} \quad \Omega \\ (\nabla - i\kappa H\mathcal{A}_0)\psi\cdot\nu = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

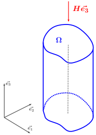
$\Rightarrow$ spectre de la réalisation de Neumann de l'opérateur de Schrödinger

$$-(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2 \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{\kappa H} \to 0$$

Opérateur de Schrödinger en dimension 2

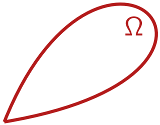
Opérateurs modèles

Application d'un champ normal à la section d'un matériau cylindrique



Ω polygone curviligne de $\mathbb{R}^2$
Spectre de la réalisation de Neumann P_h de $-(h\nabla - \mathcal{A}_0)^2$ sur Ω

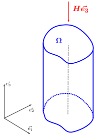
$$\mathcal{A}_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$$



Opérateur de Schrödinger en dimension 2

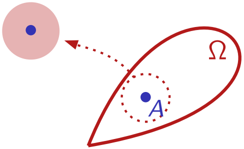
Opérateurs modèles

Application d'un champ normal à la section d'un matériau cylindrique



Ω polygone curviligne de $\mathbb{R}^2$
Spectre de la réalisation de Neumann P_h de $-(h\nabla - \mathcal{A}_0)^2$ sur Ω

$$\mathcal{A}_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$$

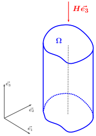


$-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur $\mathbb{R}^2$

Opérateur de Schrödinger en dimension 2

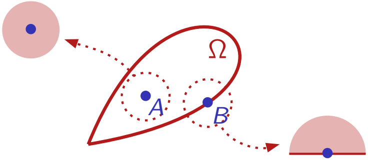
Opérateurs modèles

Application d'un champ normal à la section d'un matériau cylindrique



Ω polygone curviligne de $\mathbb{R}^2$
Spectre de la réalisation de Neumann P_h de $-(h\nabla - \mathcal{A}_0)^2$ sur Ω

$$\mathcal{A}_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$$

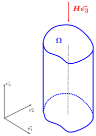


$-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2_+$

Opérateur de Schrödinger en dimension 2

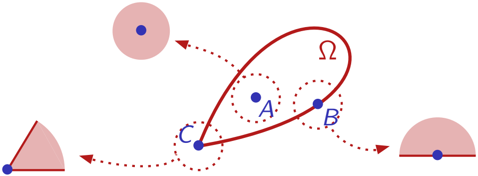
Opérateurs modèles

Application d'un champ normal à la section d'un matériau cylindrique



Ω polygone curviligne de $\mathbb{R}^2$
Spectre de la réalisation de Neumann P_h de $-(h\nabla - \mathcal{A}_0)^2$ sur Ω

$$\mathcal{A}_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)$$



$$-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^2_+,\ G^\alpha$$

Domaines réguliers

Plan et le demi-plan

Proposition

1. *La plus petite valeur propre de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *vaut* **1**
2. *Le bas du spectre de la réalisation de Neumann de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *vaut* Θ_0

cf. [Dauge-Helffer 93]

Domaines réguliers

Plan et le demi-plan

Proposition

1. *La plus petite valeur propre de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *vaut* $\mathbf{1}$
2. *Le bas du spectre de la réalisation de Neumann de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *vaut* Θ_0

cf. [Dauge-Helffer 93]

Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2 = (D_{x_1} - \frac{x_2}{2})^2 + (D_{x_2} + \frac{x_1}{2})^2$

Domaines réguliers

Plan et le demi-plan

Proposition

1. *La plus petite valeur propre de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *vaut* **1**
2. *Le bas du spectre de la réalisation de Neumann de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *vaut* Θ_0 *cf. [Dauge-Helffer 93]*

Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2 = (D_{x_1} - \frac{x_2}{2})^2 + (D_{x_2} + \frac{x_1}{2})^2$

Changement de jauge: $(D_{x_1} - x_2)^2 + D_{x_2}^2$

Domaines réguliers

Plan et le demi-plan

Proposition

1. *La plus petite valeur propre de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *vaut* **1**
2. *Le bas du spectre de la réalisation de Neumann de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *vaut* Θ_0

cf. [Dauge-Helffer 93]

Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2 = (D_{x_1} - \frac{x_2}{2})^2 + (D_{x_2} + \frac{x_1}{2})^2$

Changement de jauge: $(D_{x_1} - x_2)^2 + D_{x_2}^2$

Transformée de Fourier en x_1: $(\xi_1 - x_2)^2 + D_{x_2}^2$

Domaines réguliers

Plan et le demi-plan

Proposition

1. *La plus petite valeur propre de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *vaut* **1**
2. *Le bas du spectre de la réalisation de Neumann de* $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ *vaut* Θ_0 *cf. [Dauge-Helffer 93]*

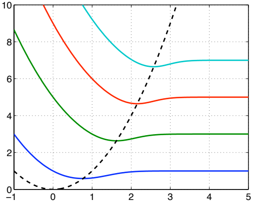
$$H(\zeta) = D_t^2 + (t-\zeta)^2 \quad \text{sur} \quad \{u \in \mathrm{B}^2(\mathbb{R}_+) |\ u'(0) = 0\}$$

$\mu_{k,H}(\zeta)$: k^{e} plus petite valeur propre de $H(\zeta)$
Φ_{ζ_0} le vecteur propre positif normalisé associé à $\mu_{1,H}(\zeta_0)$

$$|\Theta_0 - 0.590106125| \leq 10^{-9}$$

$$|\Phi_{\zeta_0}(0) - 0.87304| \leq 5 \times 10^{-5}$$

cf. [Bo11]



$\zeta \mapsto \mu_{k,H}(\zeta)$, $k = 1, \ldots, 4$, $-1 \leq \zeta \leq 5$

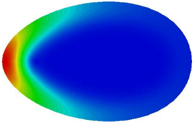
Domaines réguliers

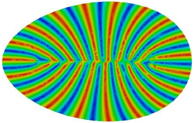
Analyse asymptotique pour des domaines bornés

Ω domaine régulier borné
$(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ modes propres de la réalisation de Neumann de $-(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$

$n = 1$

- $\mu_{h,1} = \Theta_0 h + o(h)$ quand $h \to 0$
- localisation de $u_{h,1}$ aux points de courbure maximale quand $h \to 0$





n quelconque

- asymptotique complète en $h^{1/8}$ de $\mu_{h,n}$
- estimation de la décroissance de $u_{h,n}$

cf. [Helffer-Morame, Fournais-Helffer, Lu-Pan, Bernoff-Sternberg, DelPino-Felmer-Sternberg,. . .]

Domaines réguliers

Applications à la supraconductivé

Problème non linéaire

- détermination du champ critique $H_{C_3}(\kappa)$

$$H_{C_3}(\kappa) = \underline{H}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \frac{\Phi_{\zeta_0}(0)^2 \; k_{\max}}{3\Theta_0^{3/2}} + \mathcal{O}(\kappa^{-1/2})$$

quand $\kappa \longrightarrow +\infty$

- localisation du minimiseur de la fonctionnelle de Ginzbourg-Landau aux points de courbure maximale

Quid des domaines à coins ?

Et si la courbure maximale $k_{\max}$ tend vers l'infini...

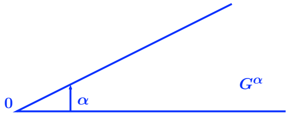
- *Nouvelle asymptotique des champs critiques ?*
- *Comportement des minimiseurs de $\mathcal{E}_{\kappa,H}$?*

Secteurs de $\mathbb{R}^2$

Notations

$X = (X_1, X_2)$ coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^2$

$$G^\alpha = \{X \in \mathbb{R}^2, X_1 > 0, 0 < X_2 < X_1 \tan\alpha\}$$



Q^α : $-(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur G^α + Neumann

Principe du min-max :

$$\mu_k(\alpha) = \max_{\Psi_1,\ldots,\Psi_{k-1}} \min_{\substack{\Psi\in\mathcal{V} \\ \Psi\in[\Psi_1,\ldots,\Psi_{k-1}]^\perp}} \frac{\|(\nabla - i\mathcal{A}_0)\Psi\|_{L^2(G^\alpha)}}{\|\Psi\|_{L^2(G^\alpha)}}$$

Question : Comportement de Q^α selon α ?

$\alpha = \frac{\pi}{2}$: *cf. [Pan,Jadallah]*

Secteurs de $\mathbb{R}^2$

Spectre

Bas du spectre

- $\inf \sigma_{ess}(Q^\alpha) = \Theta_0$
- $\mu_1(\alpha) \leq \Theta_0$ pour tout $\alpha \in (0, 2\pi)$
- Pour tout $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\mu_1(\alpha) < \Theta_0$
- $\alpha \mapsto \alpha\mu_1(\alpha)$ est croissante
- $\alpha \mapsto \mu_1(\alpha)/\alpha$ est décroissante

K_α : nombre de valeurs propres $< \Theta_0$

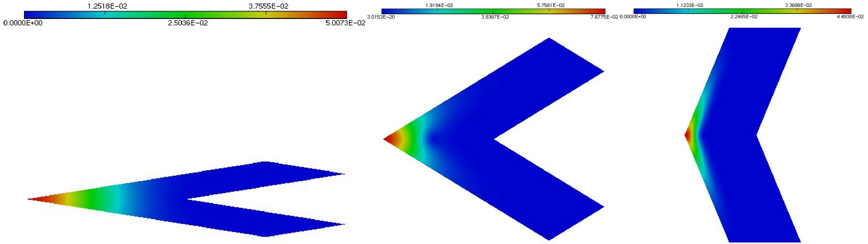
Décroissance des fonctions propres

Soit Ψ_k^α une fonction propre normalisée pour $\mu_k(\alpha)$

$$|\Psi_k^\alpha(\mathsf{X})| \sim C\mathrm{e}^{-\sqrt{\Theta_0 - \mu_k(\alpha)}|\mathsf{X}|}$$

Secteurs de $\mathbb{R}^2$

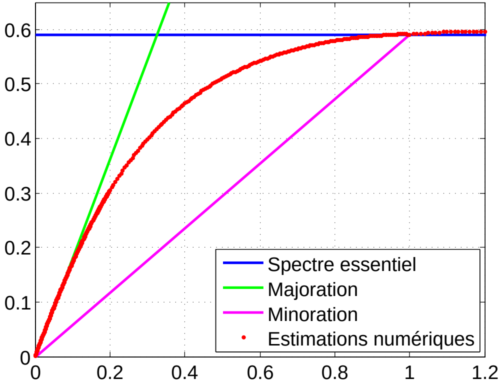
Simulations numériques



Modules de la première fonction propre pour différents angles

Secteurs de $\mathbb{R}^2$

Simulations numériques



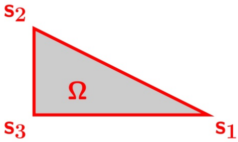
Estimations de $\mu_1(\alpha)$ en fonction de α/π

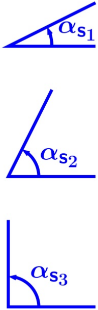
Conjecture : μ_1 croît de $(0, \pi]$ vers $(0, \Theta_0]$, vaut Θ_0 sur $[\pi, 2\pi)$

Domaines à coins

Spectre sur les polygones

Ω	polygone convexe
Σ	ensemble des sommets s de Ω
α_{s}	angle en s
$G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$	secteur de $\mathbb{R}^2$ d'ouverture α_{s}





P_h : réalisation de Neumann sur Ω de $-(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$

But : déterminer le comportement des modes propres $(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ de P_h quand $h \to 0$

$$\mu_{h,n} = \max_{u_1,\dots,u_{n-1}} \min \left\{ \frac{\|(h\nabla - i\mathcal{A})u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{L^2(\Omega)}}, \quad u \in \mathcal{V}, \quad u \in [u_1, \dots, u_{n-1}]^{\perp} \right\}$$

Domaines à coins

Construction de quasi-modes

Soit $\mathsf{s} \in \Sigma$ et $k \geq 1$ tels que $\mu_k(\alpha_\mathsf{s}) < \Theta_0$

$\Psi_k^{\alpha_\mathsf{s}}$ une fonction propre normalisée de Q^{α_s} sur G^{α_s} pour $\mu_k(\alpha_s)$

Dilatation

$X = \frac{x}{\sqrt{h}}$ pour relier $Q^{\alpha_\mathsf{s}} = -(\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ et $P_h = -(h\nabla - i\mathcal{A}_0)^2$ sur G^{α_s}

$x \longmapsto \Psi_k^{\alpha_s}\left(\frac{x}{\sqrt{h}}\right)$ fonction propre de P_h sur G^{α_s} associée à $h\mu_k(\alpha_\mathsf{s})$

Domaines à coins

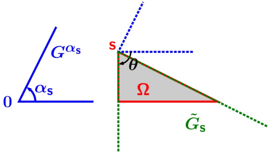
Construction de quasi-modes

Soit $\mathsf{s} \in \Sigma$ et $k \geq 1$ tels que $\mu_k(\alpha_{\mathsf{s}}) < \Theta_0$

$\Psi_k^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ une fonction propre normalisée de $Q^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ sur $G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ pour $\mu_k(\alpha_s)$

Translation et rotation

pour envoyer $G^{\alpha_{\mathsf{s}}}$ sur $\widetilde{G}_{\mathsf{s}}$ qui coïncide avec Ω autour de s



$$\Psi_k^{\alpha_s}\left(\frac{x}{\sqrt{h}}\right) \quad \rightsquigarrow \quad \Psi_k^{\alpha_{\mathsf{s}}}\left(\frac{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}(x-\mathsf{s})}{\sqrt{h}}\right)$$

$$\mathcal{A}_0(x) \quad \rightsquigarrow \quad \mathcal{A}_0\left(\frac{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}(x-\mathsf{s})}{\sqrt{h}}\right) \quad \neq \mathcal{A}_0(x)$$

Changement de jauge :

$$(h\nabla - i\mathcal{A}_0)\left(\mathrm{e}^{\frac{i\Phi}{h}} u\right) = \mathrm{e}^{\frac{i\Phi}{h}}\left(h\nabla - i(\mathcal{A}_0 - \nabla\Phi)\right)u$$

$\widetilde{\psi}_{h,\mathsf{s},k}(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \exp\left(\frac{i}{2h} x \wedge \mathsf{s}\right) \ \Psi_k^{\alpha_{\mathsf{s}}}\left(\frac{\mathcal{R}_{\mathsf{s}}(x-\mathsf{s})}{\sqrt{h}}\right)$ fonction propre de P_h sur $\widetilde{G}_{\mathsf{s}}$

Domaines à coins

Construction de quasi-modes

Soit $\mathsf{s} \in \Sigma$ et $k \geq 1$ tels que $\mu_k(\alpha_\mathsf{s}) < \Theta_0$

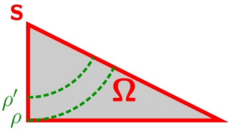
$\Psi_k^{\alpha_\mathsf{s}}$ une fonction propre normalisée de Q^{α_s} sur G^{α_s} pour $\mu_k(\alpha_\mathsf{s})$

Troncature

$$\rho_\mathsf{s} = \mathrm{dist}(\mathsf{s}, \Sigma \setminus \{\mathsf{s}\})$$

Fonction de troncature :

$$\chi_\mathsf{s}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin B(\mathsf{s}, \rho_\mathsf{s}) \\ 1 & \text{si} \quad x \in B(\mathsf{s}, \rho') \text{ avec } \rho' < \rho_\mathsf{s} \end{cases}$$



Quasi-mode défini sur Ω

$$x \longmapsto \psi_{h,\mathsf{s},k}(x) = \chi_\mathsf{s}(x)\, \widetilde{\psi}_{h,\mathsf{s},k}(x)$$

Domaines à coins

Construction de quasi-modes

Norme

$$\left|1-\|\psi_{h,\mathrm{s},k}\|^2\right| \sim C\mathrm{e}^{-\frac{2\rho'\sqrt{\Theta_0-\mu_k(\alpha_\mathrm{s})}}{\sqrt{h}}}$$

Quotient de Rayleigh

$$\left|\frac{\|(h\nabla - i\mathcal{A}_0)\psi_{h,\mathrm{s},k}\|^2}{\|\psi_{h,\mathrm{s},k}\|^2} - h\mu_k(\alpha_\mathrm{s})\right| \sim C\mathrm{e}^{-\frac{2\rho'\sqrt{\Theta_0-\mu_k(\alpha_\mathrm{s})}}{\sqrt{h}}}$$

Approximation de l'équation du mode propre

$$\|P_h\psi_{h,\mathrm{s},k} - h\mu_k(\alpha_\mathrm{s})\psi_{h,\mathrm{s},k}\| \sim C\mathrm{e}^{-\frac{\rho'\sqrt{\Theta_0-\mu_k(\alpha_\mathrm{s})}}{\sqrt{h}}}$$

Domaines à coins

Estimations tubulaires des valeurs propres

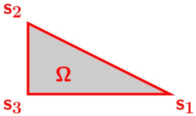
- $\mu_{h,n}$ la n^{e} valeur propre de P_h répétée selon la multiplicité
- λ_n la n^{e} valeur propre de $\bigoplus_{s\in\Sigma} Q^{\alpha_s}$ répétée selon la multiplicité
- K_Ω nombre de valeurs propres $\lambda_n < \Theta_0$
- Soit $n \leq K_\Omega$, $\Sigma_n = \left\{\mathrm{s} \in \Sigma,\ \ \lambda_n \text{ est une valeur propre de } Q^{\alpha_\mathrm{s}}\right\}$
- $r(\lambda_n) = \min_{\mathrm{s}\in\Sigma_n} d(\mathrm{s}, \Sigma \setminus \{\mathrm{s}\})$

Théorème

$$|\mu_{h,n} - h\lambda_n| \sim C\mathrm{e}^{-\frac{r(\lambda_n)\sqrt{\Theta_0-\lambda_n}}{\sqrt{h}}}, \quad \forall n \leq K_\Omega$$

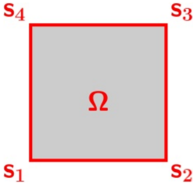
Domaines à coins

Exemples



$$\lambda_1 = \mu_1(\alpha_{s_1}) < \lambda_2 = \mu_1(\alpha_{s_2}) < \lambda_3 = \mu_1(\alpha_{s_3})$$

$$\frac{\mu_{h,1}}{h} \sim \mu_1(\alpha_{s_1}), \quad \frac{\mu_{h,2}}{h} \sim \mu_1(\alpha_{s_2}), \quad \frac{\mu_{h,3}}{h} \sim \mu_1(\alpha_{s_3})$$

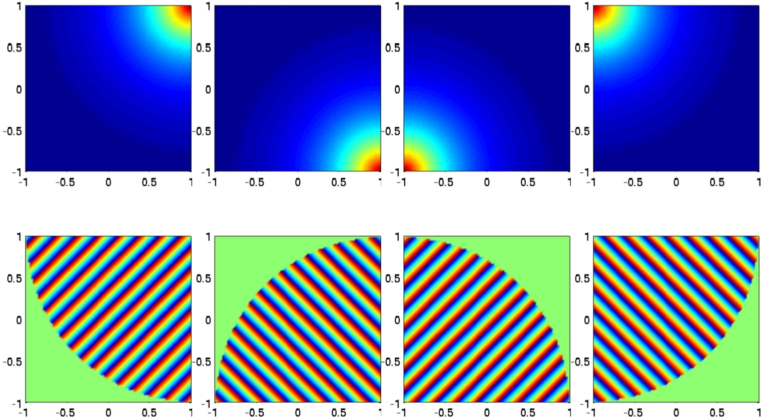


$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \mu_1(\tfrac{\pi}{2})$$

$$\frac{\mu_{h,k}}{h} \sim \mu_1(\tfrac{\pi}{2}), \qquad k = 1, \dots, 4$$

Carré

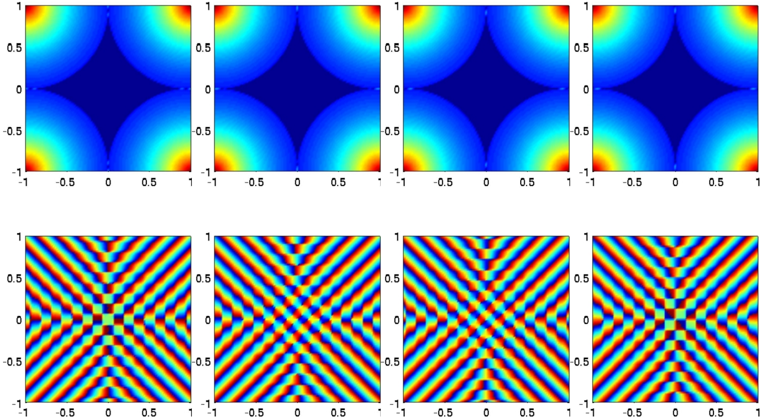
Qu'en est-il des vecteurs propres ?



Quasi-modes Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4

Carré

Combinaisons linéaires $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}$



Domaines à coins

Estimations des clusters d'espaces propres

Répétitions dans $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{K_\Omega}\} \Rightarrow$ regroupement des $\mu_{h,n}$ en clusters

- $(\mu_{h,n}, u_{h,n})$ le n^{e} mode propre de P_h
- $\{\Lambda_1 < \ldots < \Lambda_M\}$ l'ensemble des valeurs distinctes de $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{K_\Omega}\}$
- m^{e} cluster d'espaces propres pour P_h $(m \leq M)$

$$F_{h,m} = \mathrm{Vect}\{u_{h,n} \text{ pour tout } n \text{ t. q. } \lambda_n = \Lambda_m\}$$

- Cluster de quasi-modes correspondant

$$E_{h,m} = \mathrm{Vect}\{\psi_{h,s,k} = \chi_s \widetilde{\psi}_{h,s,k} \text{ pour tout s} \in \Sigma,\ k \geq 1 \text{ t. q. } \mu_k(\alpha_s) = \Lambda_m\}$$

Théorème

$$d(E_{h,m}\,;\,F_{h,m}) \sim C\mathrm{e}^{-\frac{r(\Lambda_m)\sqrt{\Theta_0-\Lambda_m}}{\sqrt{h}}}, \quad \forall m \leq M$$

" Tout $\psi \in F_{h,m}$ est exponentiellement proche d'une combinaison linéaire des éléments de $E_{h,m}$"

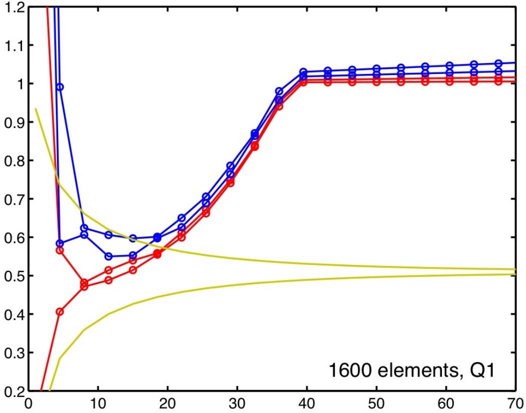
$\Rightarrow$ *regroupement par niveau d'énergie*

Domaines à coins

Simulations numériques sur un carré

Calcul des modes propres avec la librairie d'éléments finis MÉLINA

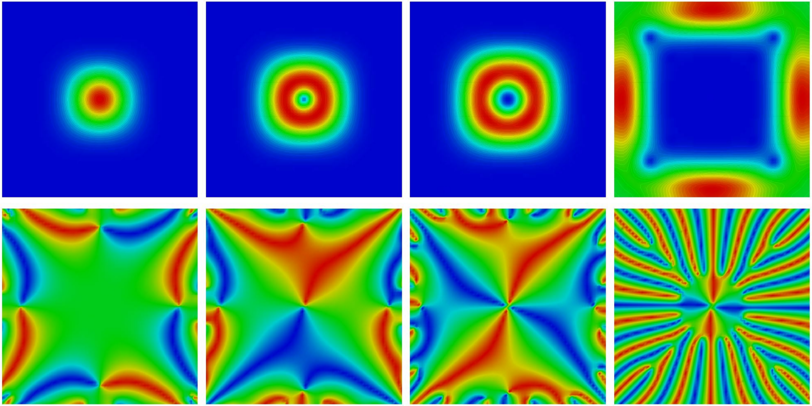
$\frac{\mu_{h,k}}{h} = \mu_1(\frac{\pi}{2}) + \mathcal{O}(e^{-C/\sqrt{h}})$, $k = 1, \ldots, 4$, $\mu_1(\frac{\pi}{2}) \simeq 0.51$



Domaines à coins

Simulations numériques sur un carré

Calcul des modes propres avec la librairie d'éléments finis MÉLINA



Module et phase des fonctions propres 1-4, h=0.02

63×63 éléments $\mathbb{Q}^1$

Domaines à coins

Simulations numériques sur un carré

Calcul des modes propres avec la librairie d'éléments finis MÉLINA

Quasi-mode :

$$\widetilde{\psi}_{h,s,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \exp\left(\frac{i}{2h} x \wedge s\right) \Psi_k^{\alpha_s}\left(\frac{\mathcal{R}_s(x-s)}{\sqrt{h}}\right) \chi_s(x)$$

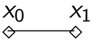
Difficulté

Structure 2 échelles pour les fonctions propres :

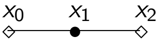
1. une couche au coin à l'échelle $\sqrt{h}$
2. un terme oscillant à l'échelle h

Quelques mots sur les méthodes numériques

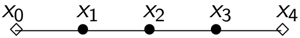
Approximation numérique en $1D$

P_1 

polynôme de degré 1 $\quad P(x_j) = f(x_j)$

P_2 

polynôme de degré 2 $\quad P(x_j) = f(x_j)$

P_4 

polynôme de degré 4 $\quad P(x_j) = f(x_j)$

Quelle est la meilleure stratégie pour le même nombre de degrés de liberté ?

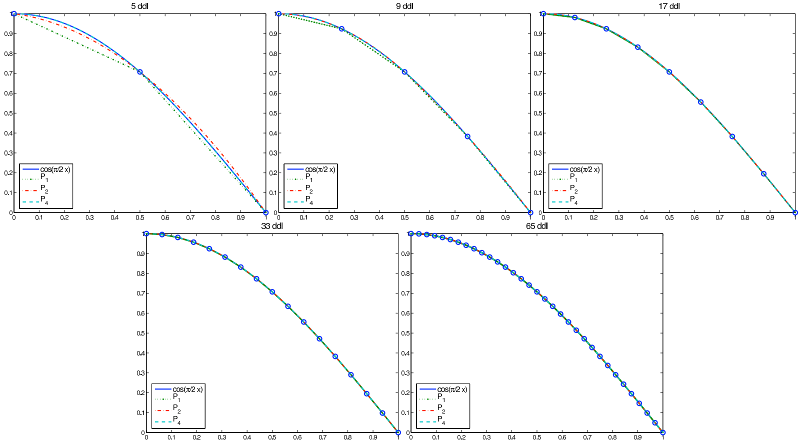
4 éléments P_1 

2 éléments P_2 

1 élément P_4 

Quelques mots sur les méthodes numériques

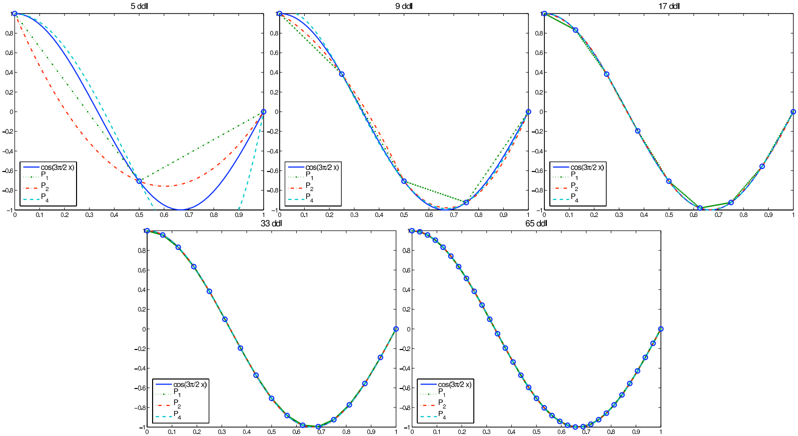
Approximation de fonctions oscillantes avec 5, 9, 17, 33 et 65 ddl



Approximation de $x \mapsto \cos(\frac{\pi}{2}x)$

Quelques mots sur les méthodes numériques

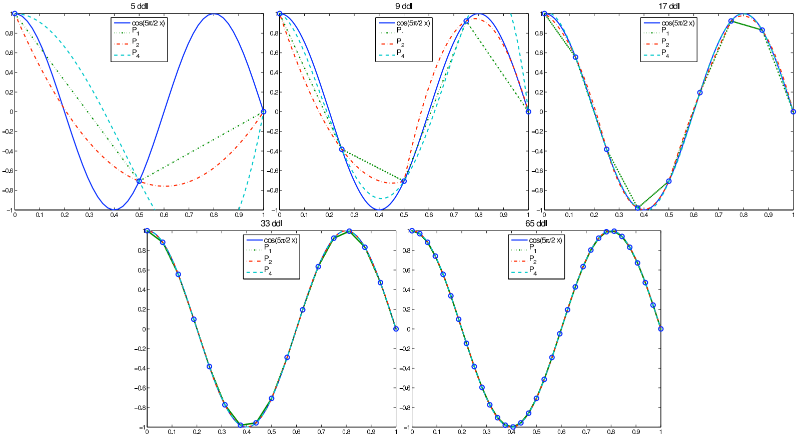
Approximation de fonctions oscillantes avec 5, 9, 17, 33 et 65 ddl



Approximation de $x \mapsto \cos(\frac{3\pi}{2}x)$

Quelques mots sur les méthodes numériques

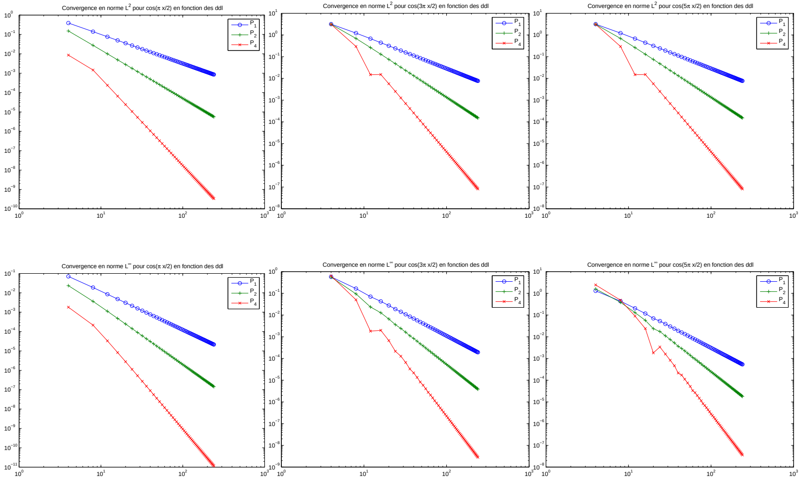
Approximation de fonctions oscillantes avec 5, 9, 17, 33 et 65 ddl



Approximation de $x \mapsto \cos(\frac{5\pi}{2}x)$

Quelques mots sur les méthodes numériques

Convergence en norme L^2 et L^∞



$x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ $x \mapsto \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$ $x \mapsto \cos\left(\frac{5\pi}{2}x\right)$

Quelques mots sur les méthodes numériques

Méthode des éléments finis

- Problème continu : on cherche (λ, u) tel que

$$\int_\Omega (h\nabla - i\mathcal{A}_0)u \cdot \overline{(h\nabla - i\mathcal{A}_0)v}\, dx = \lambda \int_\Omega u\bar{v} dx, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

- Espace d'approximation $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$: on cherche (λ_h, u_h) tel que

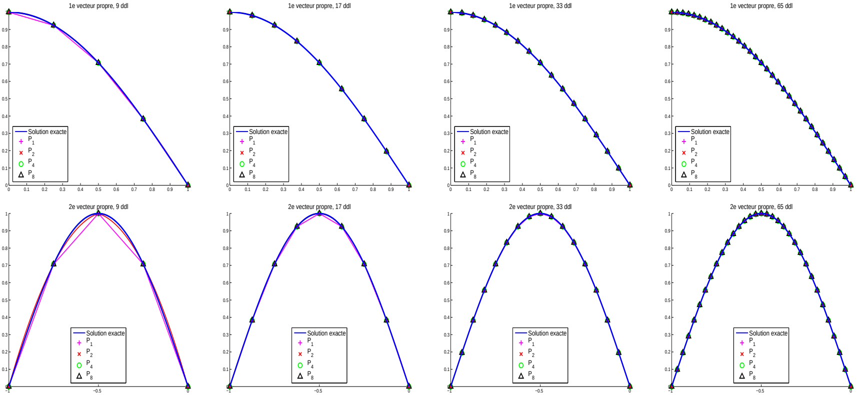
$$\int_\Omega (h\nabla - i\mathcal{A}_0)u_h \cdot \overline{(h\nabla - i\mathcal{A}_0)v_h}\, dx = \lambda \int_\Omega u_h\overline{v_h} dx, \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h$$

- Écriture matricielle : on cherche $(\lambda_h, U_h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tel que

$$AU_h = \lambda_h M U_h$$

Quelques mots sur les méthodes numériques

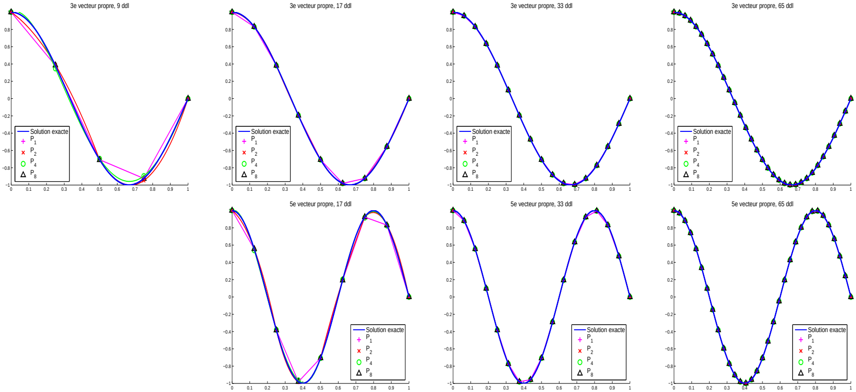
Calcul des fonctions propres du Laplacien



Vecteurs propres 1 et 2 pour 9, 17, 33 et 65 ddl

Quelques mots sur les méthodes numériques

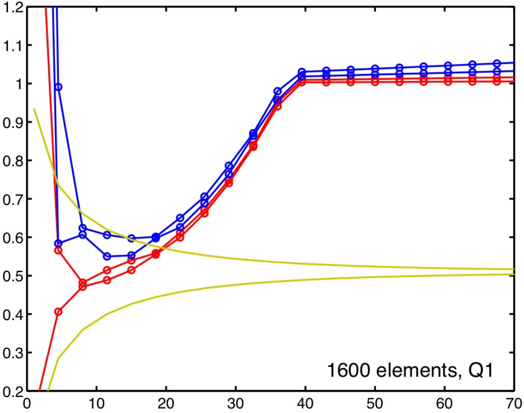
Calcul des fonctions propres du Laplacien



Vecteurs propres 3 et 5 pour 9, 17, 33 et 65 ddl

Calculs des modes propres sur un polygone

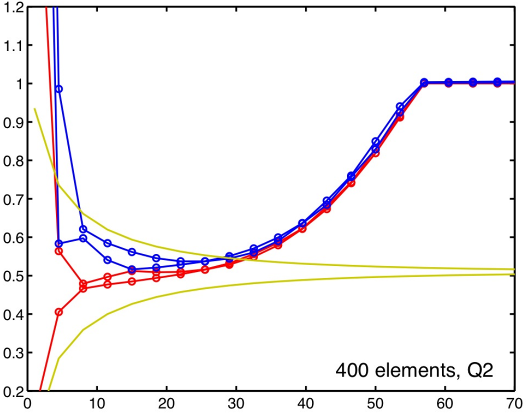
Carré - Influence du degré d'approximation



$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1} pour le même nombre de ddl

Calculs des modes propres sur un polygone

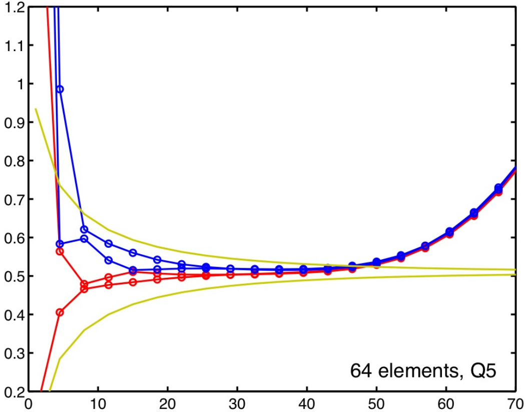
Carré - Influence du degré d'approximation



$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1} pour le même nombre de ddl

Calculs des modes propres sur un polygone

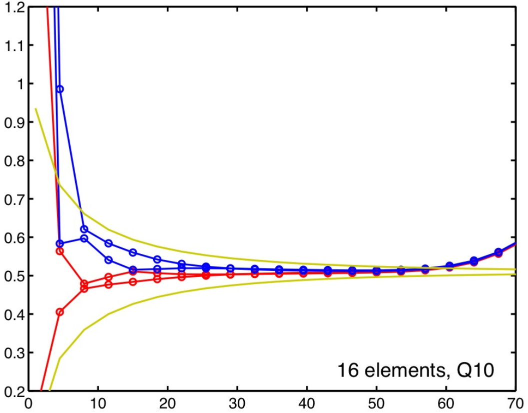
Carré - Influence du degré d'approximation



$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1} pour le même nombre de ddl

Calculs des modes propres sur un polygone

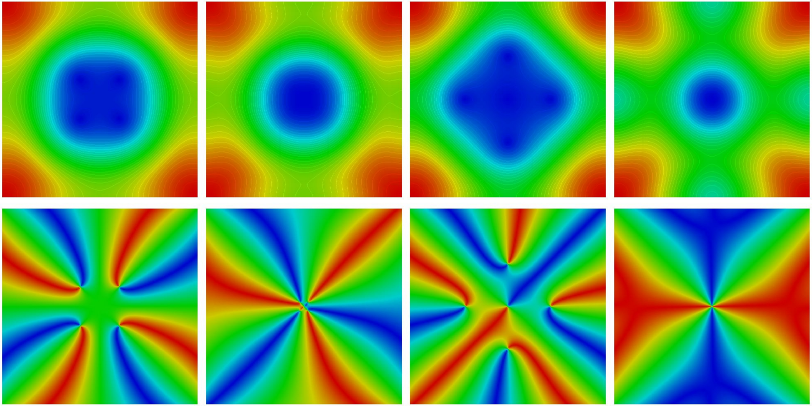
Carré - Influence du degré d'approximation



$h^{-1}\mu_{h,n}$ versus h^{-1} pour le même nombre de ddl

Calculs des modes propres sur un polygone

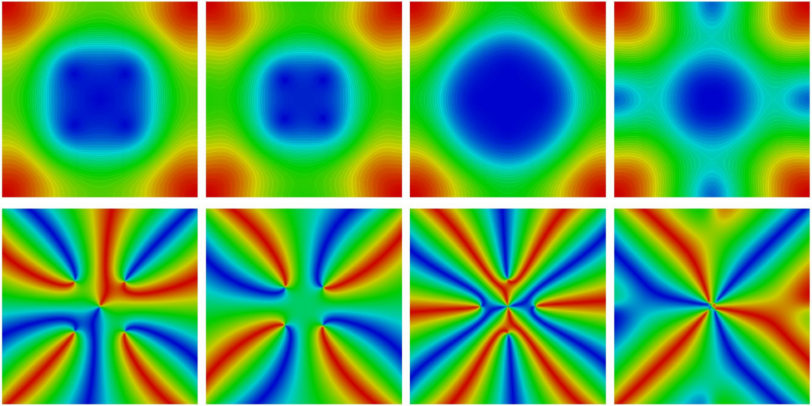
Carré



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.1$

Calculs des modes propres sur un polygone

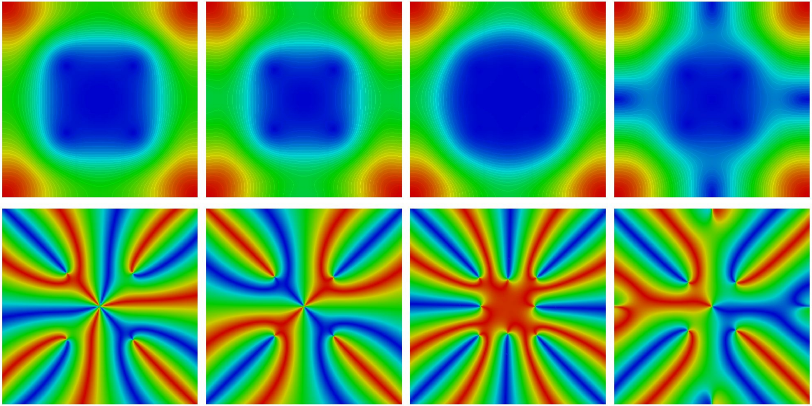
Carré



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.08$

Calculs des modes propres sur un polygone

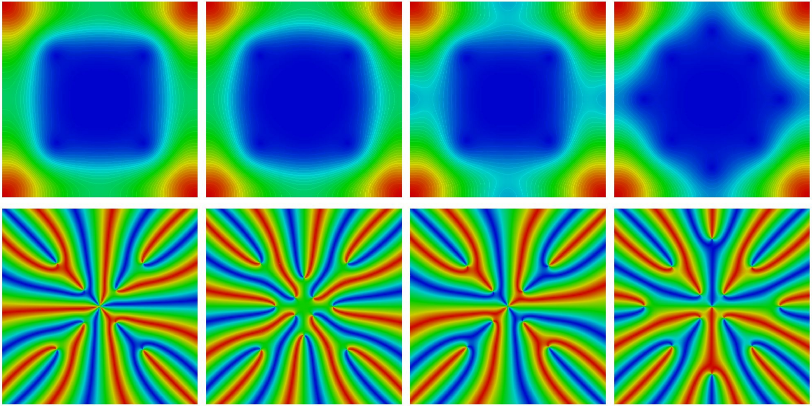
Carré



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.06$

Calculs des modes propres sur un polygone

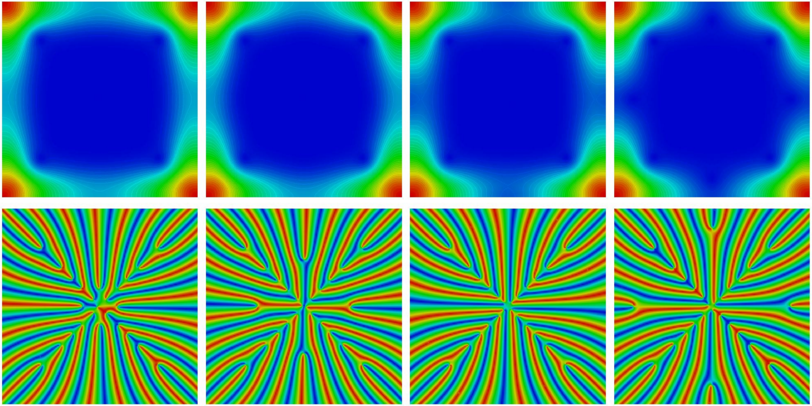
Carré



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.04$

Calculs des modes propres sur un polygone

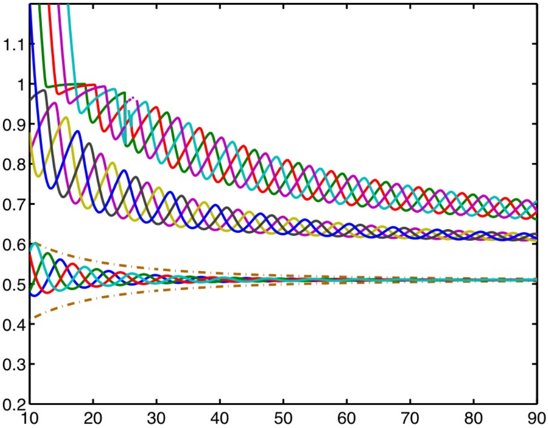
Carré



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.02$

Calculs des modes propres sur un polygone

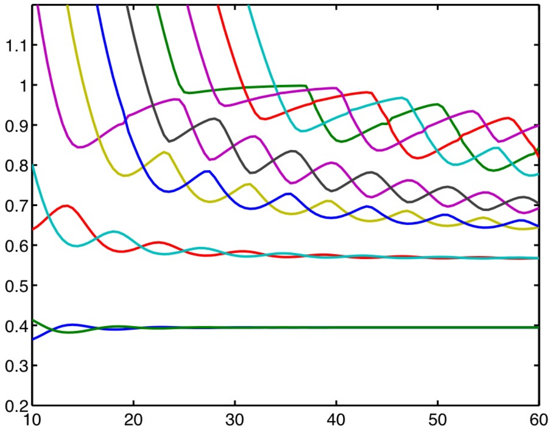
Carré - effet tunnel



$h^{-1}\mu_{h,n}$ *versus* h^{-1}

Calculs des modes propres sur un polygone

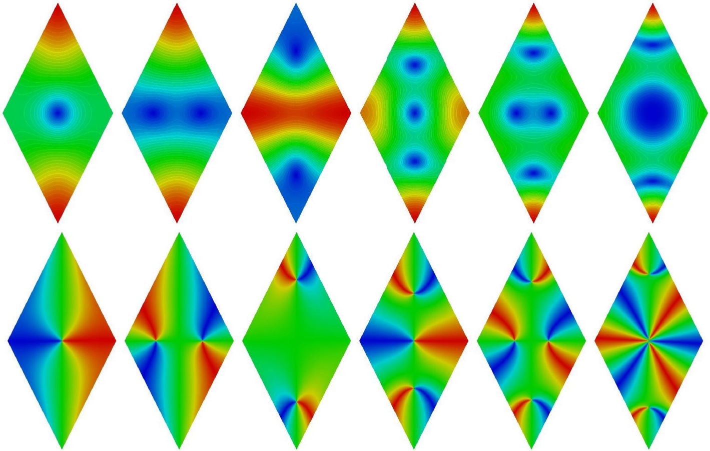
Quelle est la forme de Ω ?



$$\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3 = \lambda_4 < \Theta_0$$

Calculs des modes propres sur un polygone

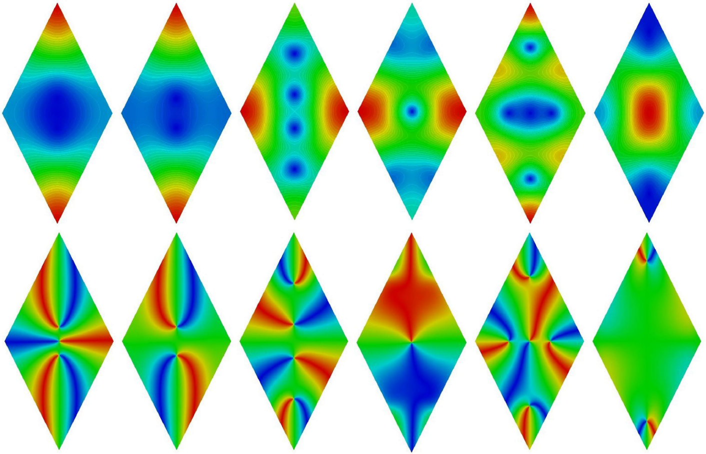
Losange



Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.1$

Calculs des modes propres sur un polygone

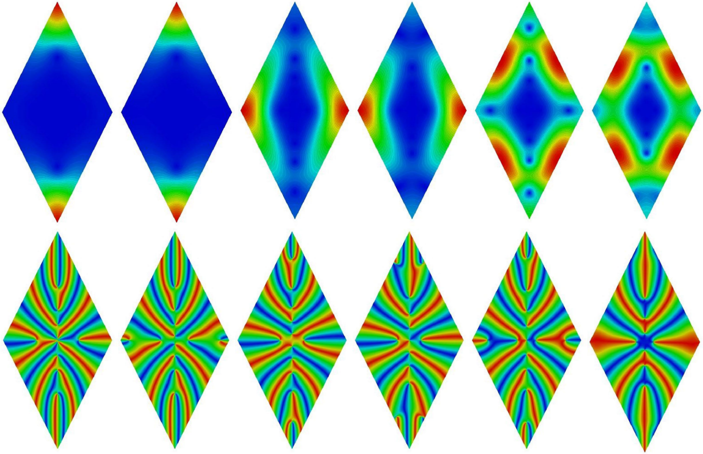
Losange



Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.06$

Calculs des modes propres sur un polygone

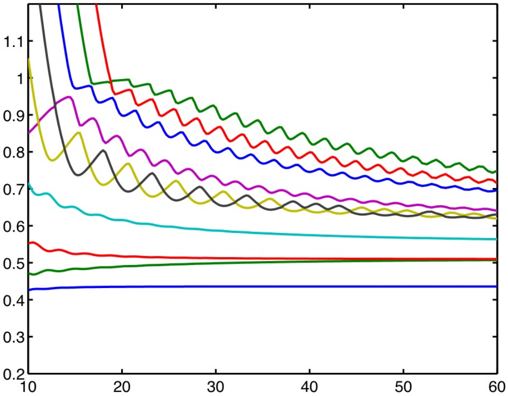
Losange



Modules et phases des fonctions propres 1-6, $h = 0.02$

Calculs des modes propres sur un polygone

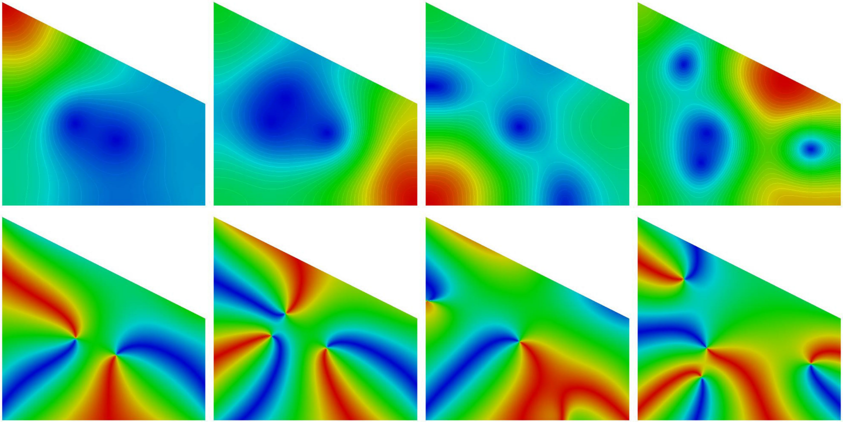
Quelle est la forme de Ω ?



$$\lambda_1 < \lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 < \Theta_0$$

Calculs des modes propres sur un polygone

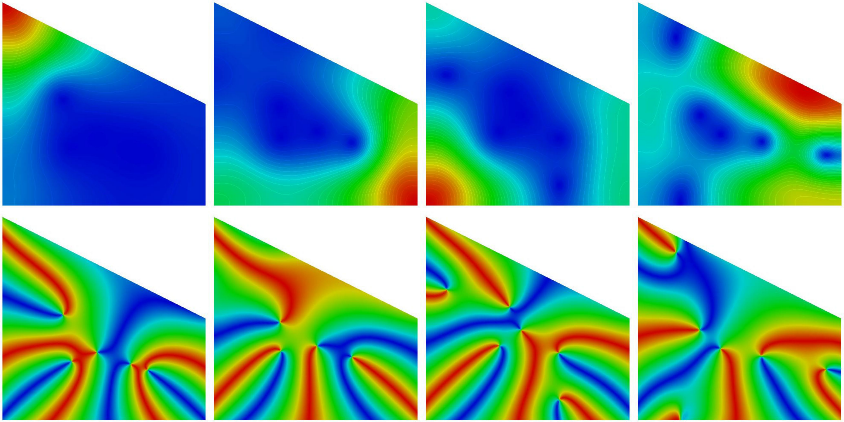
Trapèze



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.1$

Calculs des modes propres sur un polygone

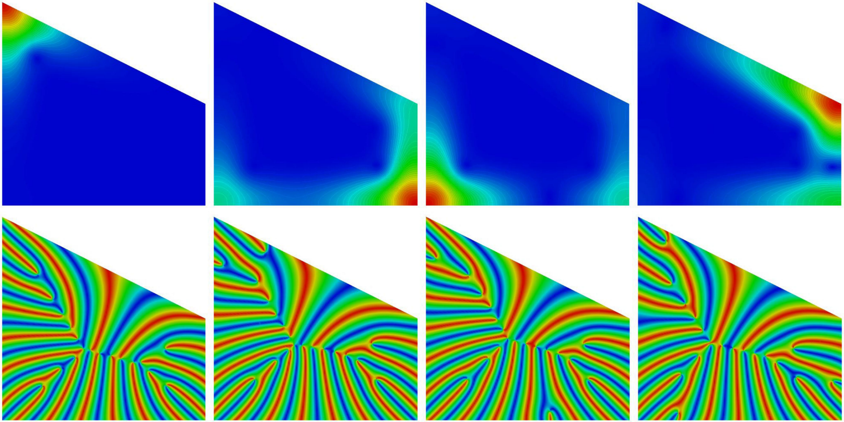
Trapèze



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.06$

Calculs des modes propres sur un polygone

Trapèze



Modules et phases des fonctions propres 1-4, $h = 0.02$

Opérateur de Schrödinger sur un polygone curviligne

Ω polygone curviligne borné avec bord régulier par morceaux
$\mathcal{A}$ potentiel magnétique de champ associé $\mathcal{B} = \operatorname{rot} \mathcal{A}$

- $b = \inf_{x\in\overline{\Omega}} \mathcal{B}(x)$ et $b' = \inf_{x\in\partial\Omega} \mathcal{B}(x)$
- $\mu_{h,n}$ la n^{e} valeur propre de P_h comptée avec multiplicité
- λ_n la n^{e} valeur propre de $\oplus_{s\in\Sigma}\mathcal{B}(s)Q^{\alpha_s}$ comptée avec multiplicité

$K_{\Omega,\mathcal{B}}$ le nombre de valeurs propres de P_h qui sont $< \min(\Theta_0 b', b)$

- Développement asymptotique complet en $\sqrt{h}$ des $\mu_{h,n}$ pour $n \leq K_{\Omega,\mathcal{B}}$
- Précision du comportement des fonctions propres

Applications à l'apparition de la supraconductivité

Asymptotique du champ critique

Ω	polygone curviligne borné, simplement connexe
Σ	ensemble des sommets s de $\partial\Omega$, $N = \lvert\Sigma\rvert > 0$
α_{s}	angle au sommet s

Hypothèses : pour tout $\mathsf{s} \in \Sigma$, $\mu_1(\alpha_{\mathsf{s}}) < \Theta_0$ et $\alpha_{\mathsf{s}} \in (0, \pi)$

Théorème

Il existe une suite de réels $(\eta_j)_{j\geq 1}$ telle que, pour $\kappa \to +\infty$

$$\underline{H}_{C_3}(\kappa) = \overline{H}_{C_3}(\kappa) = H^{\mathrm{lin}}_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Lambda_1}\Big(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \kappa^{-j}\Big)$$

avec

$$\Lambda_1 := \min_{\mathsf{s}\in\Sigma} \mu_1(\alpha_{\mathsf{s}})$$

Applications à l'apparition de la supraconductivité

Localisation du minimiseur

Pour les domaines réguliers :

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Theta_0} + \mathcal{O}(1)$$

Pour les domaines à coins :

$$H_{C_3}(\kappa) = \frac{\kappa}{\Lambda_1} + \mathcal{O}(1)$$

avec $\Lambda_1 = \min_{s \in \Sigma} \mu_1(\alpha_s) < \Theta_0$

- la présence de coins change l'ordre du terme principal de $H_{C_3}(\kappa)$
- la supraconductivité est dominée par les coins dans le régime

$$\frac{\kappa}{\Theta_0} \ll H \leq H_{C_3}(\kappa)$$

Applications à l'apparition de la supraconductivité

Localisation du minimiseur

Théorème

Soit $\mu > 0$ *tel que* $\min_{s\in\Sigma} \mu_1(\alpha_s) < \mu < \Theta_0$
On définit

$$\Sigma' := \{s \in \Sigma \,|\, \mu_1(\alpha_s) \leq \mu\}$$

Il existe κ_0, C, $\varepsilon > 0$ *tels que si*

$$\kappa \geq \kappa_0, \qquad H \geq \frac{\kappa}{\mu}$$

et $(\psi, \mathcal{A})$ *est un minimiseur de* $\mathcal{E}_{\kappa,H}$, *alors*

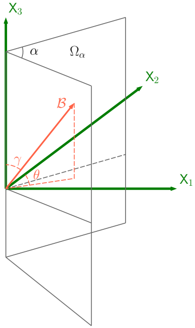
$$|\psi(x)| \leq C\mathrm{e}^{-\varepsilon\sqrt{\kappa H}\,\mathrm{dist}(x,\Sigma')}$$

"Les coins de plus basse énergie se peuplent progressivement"

Quelques pistes en dimension 3

Dièdre

Influence de l'orientation du champ



$$\Omega^\alpha = G^\alpha \times \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}_0(\mathsf{X}) = (\sin\theta\sin\gamma, \cos\theta\sin\gamma, \cos\gamma)$$

$$\mathcal{A}_0(\mathsf{X}) = \Big(-\cos\gamma\tfrac{\mathsf{X}_2}{2}, \cos\gamma\tfrac{\mathsf{X}_1}{2}, \sin\gamma(\sin\theta\mathsf{X}_2 - \cos\theta\mathsf{X}_1)\Big)$$

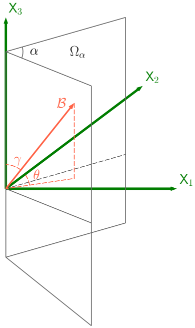
$$\left(D_{\mathsf{X}_1} + \frac{\mathsf{X}_2}{2}\cos\gamma\right)^2 + \left(D_{\mathsf{X}_2} - \frac{\mathsf{X}_1}{2}\cos\gamma\right)^2 + (D_{\mathsf{X}_3} - \sin\gamma(\sin\theta\mathsf{X}_2 - \cos\theta\mathsf{X}_1))^2$$

sur Ω^α

Quelques pistes en dimension 3

Dièdre

Influence de l'orientation du champ



$$\Omega^\alpha = G^\alpha \times \mathbb{R}$$

$$\mathcal{B}_0(\mathsf{X}) = (\sin\theta\sin\gamma, \cos\theta\sin\gamma, \cos\gamma)$$

$$\mathcal{A}_0(\mathsf{X}) = \Big(-\cos\gamma\tfrac{\mathsf{X}_2}{2}, \cos\gamma\tfrac{\mathsf{X}_1}{2}, \sin\gamma(\sin\theta\mathsf{X}_2 - \cos\theta\mathsf{X}_1)\Big)$$

$$\left(D_{\mathsf{X}_1} + \frac{\mathsf{X}_2}{2}\cos\gamma\right)^2 + \left(D_{\mathsf{X}_2} - \frac{\mathsf{X}_1}{2}\cos\gamma\right)^2 + (\tau - \sin\gamma(\sin\theta\mathsf{X}_2 - \cos\theta\mathsf{X}_1))^2$$

sur G^α

Quelques pistes en dimension 3

Demi-espace

$$D_{X_1}^2 + D_{X_2}^2 + (\tau - (X_2 \sin\theta - X_1 \cos\theta))^2 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

- $\theta = 0$: $\mathcal{L}_\theta = D_{X_1}^2 + D_{X_2}^2 + (\tau + X_1)^2, \qquad \inf \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L}_0) = \Theta_0$
- $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$: $\mathcal{L}_\theta = D_{X_1}^2 + D_{X_2}^2 + (X_2 \sin\theta - X_1 \cos\theta)^2$

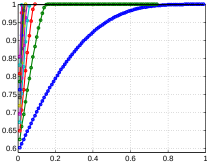
$$\inf \mathrm{sp}_{\mathrm{ess}}(\mathcal{L}_\theta) = 1,\ \sigma_n(\theta) \text{ croissante sur } (0, \tfrac{\pi}{2}],\ \sigma_1(\theta) < 1$$

Théorème

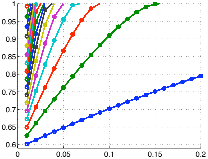
Localisation des vecteurs propres

$2\pi/5$ $\qquad$ $\pi/4$ $\qquad$ $\pi/40$

Asymptotique de $\sigma_n(\theta)$, $\theta \to 0$



$\theta/\pi \in (0, 1)$



$\theta/\pi \in (0, \pi/5]$

Dièdre : thèse de N. Popoff