

26 septembre 2012

2 commentaires — commenter cet article

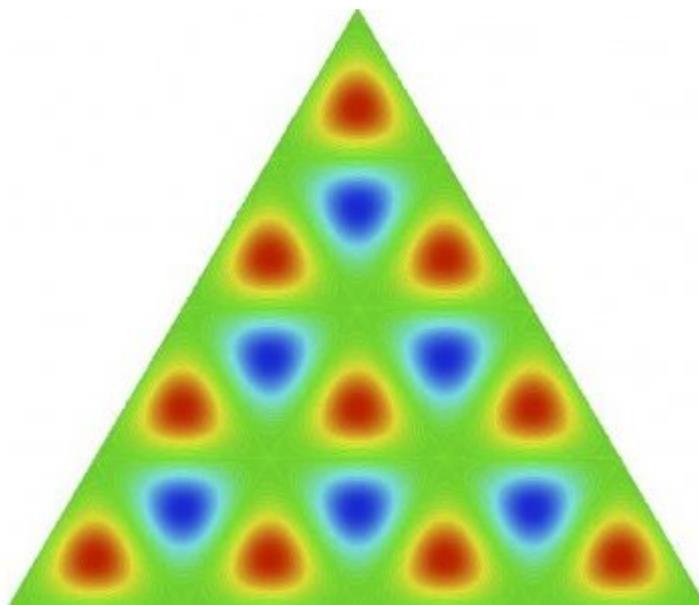
Echos de la recherche

À la découverte des partitions spectrales minimales

Virginie Bonnaillie-Noël et
Bernard Helffer

Dans ce texte, on se pose la question de découper de manière optimale un convexe du plan en trois parts égales sous certains critères. Nous verrons que nous ne savons pas résoudre complètement le problème et ce

pour des géométries aussi simples que le disque, le carré ou le triangle équilatéral. Ce genre de problèmes d'optimisation peut apparaître en dynamique des populations et nous donnons quelques exemples et motivations ici.



Un problème de cohabitation

Si l'on se donne dans un segment ou un domaine [1] (par exemple un carré, un triangle ou un disque) du plan k zones (que l'on supposera toujours ouvertes), disjointes et régulières (délimitées dans le cas de la dimension 2 par un nombre fini de courbes continues), on peut se demander si cette donnée est optimale en fonction de certains critères (tels que le périmètre, l'aire,...). Pour cette donnée de k zones, on associe donc une valeur qui mesure notre critère. Notre problème consiste ensuite à trouver un découpage qui minimise (ou maximise selon les cas) cette valeur.

La figure suivante donne quelques exemples : donnée de trois zones dans un segment, de cinq zones dans un carré et de trois zones dans un triangle.



Exemples de zones dans un segment, carré ou triangle

Dans ces exemples, les zones et leurs frontières remplissent le domaine mais ceci n'est pas imposé au départ. Quand cette condition sera vérifiée, on parlera de partition [2]. Par ailleurs, les zones ne sont pas nécessairement connexes.

Nous allons maintenant regarder un exemple particulier de répartition de populations qui entre dans le cadre précédent. On souhaite trouver des conditions optimales pour la cohabitation de k populations qui refusent de se mélanger, doivent vivre dans un territoire donné O mais admettent l'idée d'un désagrément minimal de chacune dans cette cohabitation. Pour un découpage donné, on appelle *désagrément global* le maximum du désagrément de chaque population [3]. Le critère évoqué plus haut sera donc ce désagrément global. Notre problème consiste alors à chercher des découpages du territoire tel que le désagrément global soit minimal.

Expliquons davantage le critère que nous utilisons ici. On va tout d'abord supposer pour simplifier que le niveau de désagrément ne dépend pas de la population considérée mais uniquement de la zone occupée. Pour modéliser ce problème, on associe à chaque population P_i qui vit dans la zone D_i un niveau de désagrément $F(D_i)$. Ici F est une fonction qui attribue à tout ouvert D un réel $F(D)$ strictement positif. On cherche alors à minimiser le maximum du désagrément de chaque population $\max_i F(D_i)$ (appelé *désagrément global*) sur toutes les familles $\mathcal{D}_k = (D_1, D_2, \dots, D_k)$ où on impose au départ simplement que les D_i sont deux à deux disjoints et contenus dans O .

Pour traduire le fait que le désagrément d'une population diminue lorsque l'espace qu'elle occupe augmente, on suppose que $F(D) \leq F(D')$ si $D' \subset D$ et que l'inégalité est stricte lorsque le complémentaire de D' dans D n'est pas trop « petit » ($F(D') - F(D)$ étant petit quand le complémentaire de D' dans D est petit). À l'inverse, $F(D)$ tend vers l'infini quand D se contracte sur un point de O . Dans ce modèle très simplifié, cette hypothèse permet de limiter une compressibilité trop forte de la population dans la situation optimale.

Expliquons intuitivement pourquoi toute solution du problème, c'est-à-dire la détermination d'une famille dont le désagrément global est minimal, satisfait au moins deux conditions : bien remplir O et avoir un niveau de désagrément égal pour chaque population, $F(D_i) = F(D_j)$. Nous allons raisonner avec deux populations. Commençons par la première condition. Si un vide est laissé dans le domaine, une des populations a la possibilité d'augmenter sa zone et donc de décroître son désagrément. L'autre population est ou bien dans la même situation, ou bien a une frontière commune avec l'autre. Par échange de territoire à la frontière, le désagrément global peut être diminué. On s'attend donc à ce que les zones et leurs frontières remplissent tout le domaine lors d'un désagrément global minimal. Comprenons maintenant pourquoi dans la situation optimale, chaque population doit avoir le même désagrément. Les zones de chacune des deux populations doivent avoir une frontière commune (ici on utilise l'hypothèse que O est un domaine) et si les désagréments ne sont pas égaux, une cession de territoire à la frontière permet de diminuer le désagrément global (car nous supposons F continue). Des illustrations de tels échanges de territoires se trouvent dans la partie **algorithme itératif** où on améliore les candidats au fur et à mesure. L'objectif est donc d'obtenir à terme une solution optimale.

Enfin, on suppose également que si D' et D'' sont deux ouverts disjoints alors $F(D' \cup D'') = \min(F(D'), F(D''))$. Expliquons une conséquence de cette hypothèse : $F(D' \cup D'')$ est le niveau de désagrément d'une population de vivre dans $D' \cup D''$. Comme les zones D' et D'' sont disjointes, si la population choisit de vivre dans la zone où elle a le moins de désagrément, disons D' , le désagrément de cette population ne changera certes pas mais le vide laissé permettra alors aux populations de diminuer leur désagrément global par la procédure décrite précédemment pour justifier le remplissage. Cette hypothèse exclut l'aire et l'inverse de l'aire comme fonction F et sera vérifiée dans le cas « musical ».

Dans la suite, nous chercherons donc une solution optimale parmi les découpages qui remplissent le territoire.

Bien entendu, on ne peut pas aller très loin sans préciser le choix du niveau de désagrément $F(D)$, ne serait-ce que pour montrer l'existence d'une solution optimale avec des zones régulières. Nous voulions juste présenter ici un cadre général contenant les exemples qui vont suivre.

Pour donner plus de structure au problème considéré et de ce fait être capable de le résoudre, on va aussi ajouter deux hypothèses d'*invariance* du problème dans la suite :

- on suppose que deux zones isométriques (se déduisant par exemple l'une de l'autre par une

translation ou une rotation) ont même niveau de désagrément.

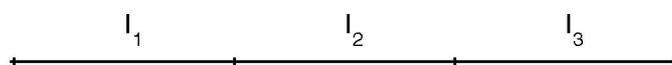
- on suppose une homogénéité de F quand on dilate D par une homothétie, en disant qu'il existe p tel que $F(aD) = a^p F(D)$ pour tout a dans \mathbb{R} . Bien sûr les conditions ci-dessus impliquent que $p < 0$.

Le cas d'un intervalle

En dimension 1, si O est un intervalle $]a, b[$, on choisit un niveau de désagrément explicite comme suit : on associe à tout sous-intervalle $]x, y[$ de O le niveau de désagrément $F(]x, y[) = \frac{E}{(y-x)^d}$, avec $d > 0$ et $E > 0$. Cela revient donc à choisir une homogénéité $p = -d < 0$. Cette fonction vérifie bien la condition d'isométrie et tend vers 0 lorsque la taille du sous-intervalle tend vers 0. Par ailleurs, comme E est un facteur multiplicatif (qui sert à préciser l'amplitude du désagrément), le niveau de désagrément minimal pour k populations sera indépendant de ce paramètre. Si D est la réunion de deux intervalles disjoints $]x, y[$ et $]x', y'[$, on a $F(D) = \inf\left(\frac{E}{(y-x)^d}, \frac{E}{(y'-x')^d}\right)$. On peut alors définir le niveau de désagrément $F(D)$ pour un ouvert D de O par

$$F(D) = \inf\{F(I), I \text{ intervalle ouvert inclus dans } D\}.$$

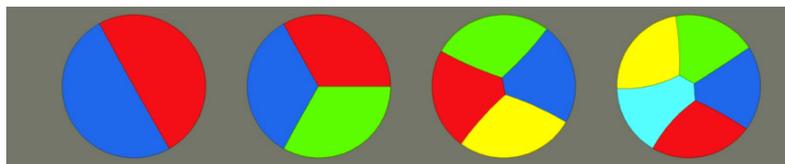
Un calcul facile (voir paragraphe relatif aux **intervalles**) permet de montrer que le niveau de désagrément minimal pour k populations est de prendre $(k - 1)$ points équidistants dans $]a, b[$ qui déterminent un découpage de l'intervalle $]a, b[$ en k intervalles égaux. Le désagrément global minimal est alors $Ek^d/(b - a)^d$. On notera ici que la solution optimale ne dépend pas du choix de d et E . On verra que le cas $d = 2$ joue un rôle particulier lorsque l'on étend ce problème à la dimension 2. La figure suivante représente la 3-partition minimale sur l'intervalle $]a, b[$.



3-partition minimale sur un intervalle $]a, b[$

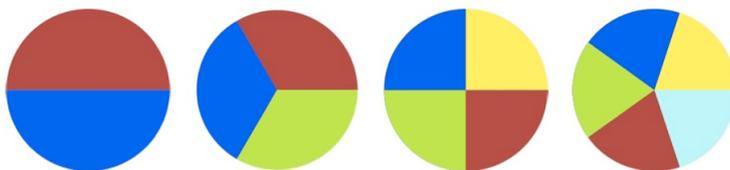
Le cas d'un domaine du plan

Dans ce cas, on pourrait d'abord penser à prendre comme niveau de désagrément $F(D) = 1/\text{aire}(D)$. En regardant le cas $k = 2$ (cohabitation de 2 populations), on voit facilement qu'il y a alors énormément de partitions minimales possibles. Il suffit de partager le domaine en deux zones d'aire égale. Un problème classique consiste à imposer que les zones soient d'aire égale mais minimisent la longueur des courbes qui délimitent les différentes zones. Dans le cas du disque, [Oud] a effectué des simulations numériques pour proposer des candidats pour $k = 2, 3, 4, 5$. Certains de ces candidats sont représentés à la figure suivante (voir aussi les références à [BBO], Kelvin, Morgan, [Hal]...).



Partitions du disque avec une contrainte de minimalité du périmètre des zones du disque

Avec d'autres critères d'optimalité (voir plus loin), d'autres configurations peuvent être meilleures que celles mentionnées dans la figure précédente. Cela apparaît dans la figure suivante où les partitions sont obtenues en coupant le disque en k secteurs de même angle : les sous-figures proposant des partitions du disque sont supersposables (après une rotation éventuelle) pour $k = 2$ et 3 et diffèrent pour $k = 4$ et 5.

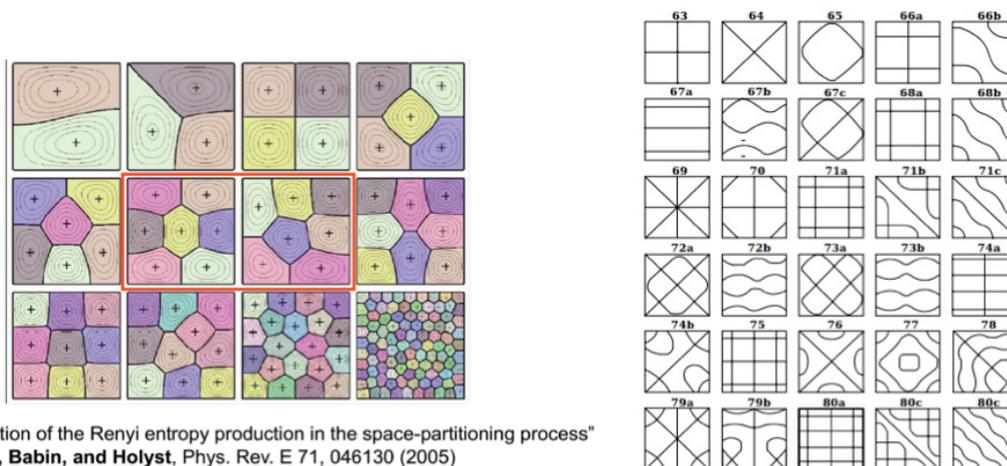


Partitions minimales spectrales (conjecturées pour $k=3$ et 5) du disque en 2, 3, 4 ou 5 zones

On va maintenant décrire un autre choix qu'on peut appeler « musical » (en référence aux dessins de Chladni présentés dans **IDM** par **S. Cantat** et **L. Hillairet**) ou « spectral » de ce niveau de désagrément qui conduit à une réponse théorique satisfaisante à la question en rentrant dans un domaine fascinant des mathématiques : la théorie spectrale.

On supposera désormais que ce niveau de désagrément dans D est proportionnel (dans la suite on supposera égal) au carré de la pulsation fondamentale d'un tambour délimité par D (on pourrait remarquer qu'elle a l'homogénéité correspondant à $d = 2$). Ce niveau est identifiable à la plus petite valeur propre d'un Laplacien sur D . Ce choix n'est pas arbitraire mais ne sera pas justifié ici. Nous pouvons toutefois remarquer une analogie en dimension 1 avec la fonction de désagrément F considéré au paragraphe **précédent** lorsque $d = 2$ et le calcul du spectre sur un intervalle que nous ferons plus **loin**.

La figure de gauche suivante propose des exemples de partitions du carré obtenues par des physiciens polonais [CBH] pour $k = 2, 3, \dots$ qui sont candidates à être des partitions minimales. L'article [CBH] d'où est tirée cette figure se réfère explicitement à un problème d'évolution de population lié au choix « musical », les dessins décrivant des situations limites ou stationnaires.



"Minimization of the Renyi entropy production in the space-partitioning process"
Cybulski, Babin, and Holyst, Phys. Rev. E 71, 046130 (2005)

Exemples de partitions du carré

Il peut être amusant de comparer avec les figures obtenues pour la plaque par Chladni (voir la figure de droite précédente et l'analyse par **S. Cantat** et **L. Hillairet** dans **Images des mathématiques**). Quelles sont les similitudes, les différences ? Les deux dessins font apparaître des zones délimitées par des courbes régulières qui se rencontrent éventuellement en des points à l'intérieur ou qui rencontrent le bord. La principale différence est l'existence dans la figure de gauche de points de rencontre de 3 arcs délimitant différentes zones, alors que dans la figure de droite, tous les points de rencontre sont l'intersection d'un nombre pair de demi-courbes. On notera aussi que pour $k = 5$ la partition minimale « musicale » obtenue pour le disque est très différente de celle obtenue pour le carré.

Avant d'étudier la question des partitions minimales de façon plus précise, on va d'abord redonner une interprétation spectrale de ce que nous avons fait dans le cas de la dimension 1 puis nous reviendrons à la question pour des domaines du plan.

Partition minimale d'un segment et interprétation spectrale

Spectre d'une corde vibrante

On fixe une corde de longueur L à chacune de ses extrémités et on cherche à calculer son spectre, c'est-à-dire les fréquences propres de cette corde vibrante. Formalisons cela d'un point de vue mathématique. On considère $a < b$ deux réels (ces points représentent les extrémités de la corde). On dit que λ est une *valeur propre* associée à la *fonction propre* f pour le **Laplacien** avec conditions de Dirichlet si $f \in C^2([a, b])$ est non nulle et vérifie

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{d^2f}{dx^2}(x) = \lambda f(x) & \text{pour tout } x \in]a, b[, \\ f(a) = 0, \\ f(b) = 0. \end{cases}$$

Un calcul montre que les valeurs propres sont données par

$$\lambda_k(]a, b[) = \frac{k^2 \pi^2}{(b-a)^2}, \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Les fonctions propres associées sont données par :

$$f_k(x) := \sin\left(k\pi \frac{x-a}{b-a}\right), \quad \text{pour } x \in]a, b[.$$

Un rôle très important est joué par la plus petite valeur $\lambda_1(]a, b[)$ qui, dans des unités convenables, détermine le « son » de l'intervalle $]a, b[$, et par la fonction propre associée f_1 , dont on observe qu'elle ne s'annule pas dans $]a, b[$. Plus généralement, les fonctions f_k s'annulent $k+1$ fois sur l'intervalle $[a, b]$ aux points

$$x_k^j := a + \frac{j}{k}(b-a), \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k.$$

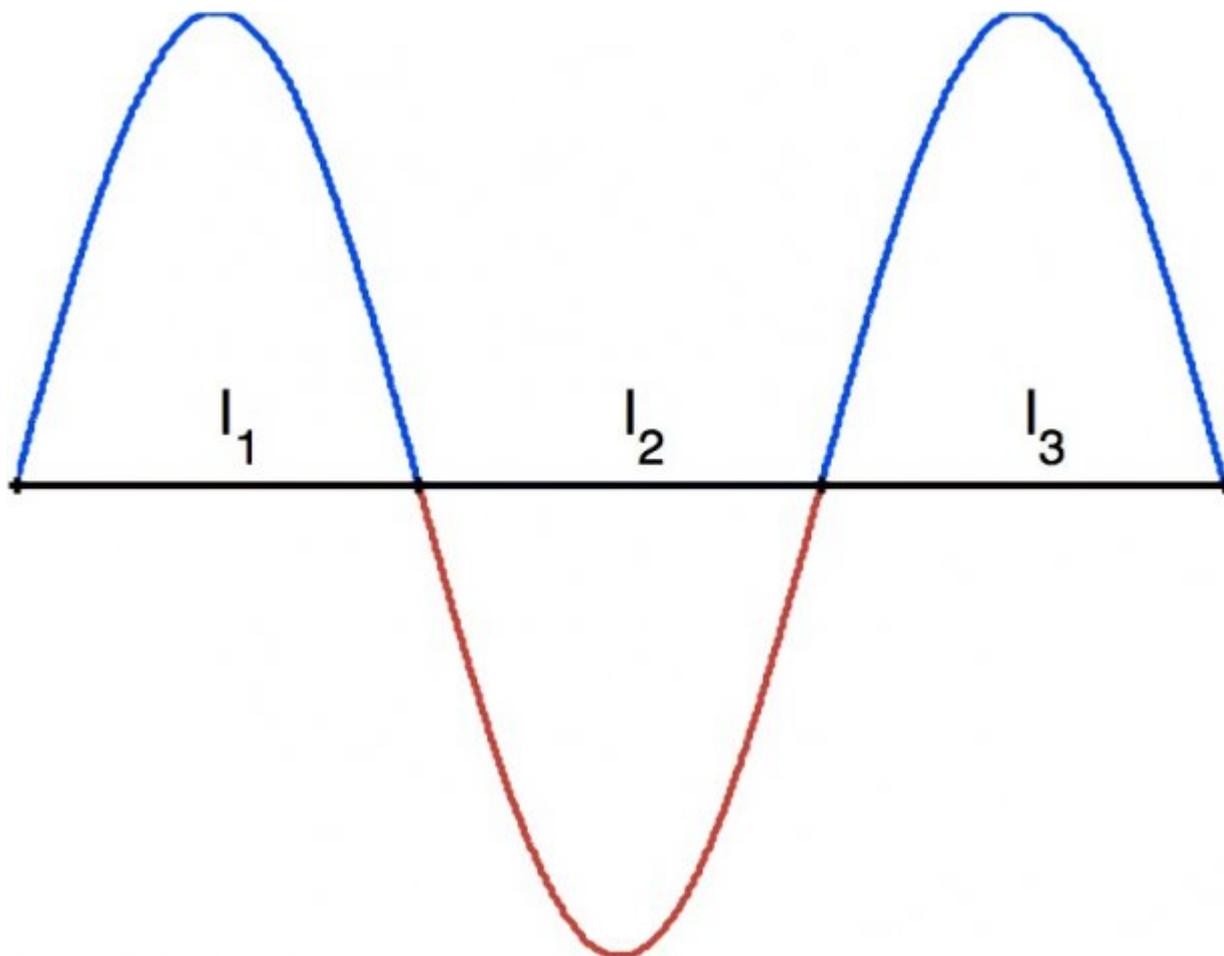
Ces points sont équirépartis dans l'intervalle $[a, b]$. La k -partition $\mathcal{D} = (I_k^j)_{j=1}^k$, avec $I_k^j =]x_k^{j-1}, x_k^j[$, obtenue à partir des points d'annulation des fonctions propres, est appelée *partition nodale*.

Si on considère maintenant le problème (1) non plus sur l'intervalle $]a, b[$ mais sur un sous-intervalle $]x_k^{j-1}, x_k^j[$, avec $0 < j \leq k$, on peut calculer de la même façon les valeurs propres et la plus petite valeur propre s'exprime alors

$$\lambda_1(]x_k^{j-1}, x_k^j[) = \frac{\pi^2}{(x_k^j - x_k^{j-1})^2} = \frac{\pi^2 k^2}{(b-a)^2}.$$

À un facteur multiplicatif près par π^2 , on retrouve le niveau de désagrément associé à l'intervalle I_k^j introduit dans la première section. On remarque aussi que la première valeur propre sur un sous-intervalle de taille $(b-a)/k$ est égale à la k -ème valeur propre sur l'intervalle $]a, b[$:

$$\lambda_1(]x_k^{j-1}, x_k^j[) = \lambda_k(]a, b[).$$

Représentation de f_3 **Partition minimale spectrale**

Revenons au problème introduit dans la première section. Il peut être décrit plus mathématiquement de la manière suivante. On se fixe un entier $k \geq 2$. On dit que $\mathcal{D}_k = (I_1, \dots, I_k)$ est une k -partition de $]a, b[$ si les intervalles I_j sont de la forme $I_j =]x_{j-1}, x_j[$ avec $x_{j-1} < x_j$ et $x_0 = a, x_k = b$. Pour cette partition, on considère la plus grande première valeur propre du Laplacien sur chacun des sous-intervalles :

$$\Lambda(\mathcal{D}_k) = \max\{\lambda_1(I_j), j = 1, \dots, k\}.$$

On souhaite maintenant minimiser cette quantité sur l'ensemble des k -partitions : on cherche à déterminer

$$\mathfrak{L}_k(]a, b[) = \inf_{\mathcal{D}_k} \Lambda(\mathcal{D}_k).$$

Considérons une k -partition quelconque $\mathcal{D}_k = (I_1, \dots, I_k)$, avec $I_j =]x_{j-1}, x_j[$, $x_{j-1} < x_j$ et $x_0 = a, x_k = b$. On connaît explicitement les valeurs propres sur un intervalle, elles sont données par

$$\lambda_1(I_j) = \frac{\pi^2}{(x_j - x_{j-1})^2}, \quad \text{avec } I_j =]x_{j-1}, x_j[.$$

Parmi les intervalles $\{I_j, j = 1, \dots, k\}$, cette valeur propre est maximale lorsque le sous-intervalle I_j est le plus petit. On note I_j^* cet intervalle. Par ailleurs, comme on découpe l'intervalle $]a, b[$ en k

sous-intervalles, la longueur de I_j^* est inférieure ou égale à $(b - a)/k$, avec égalité si et seulement si la partition est uniforme (c'est-à-dire que tous les sous-intervalles sont de même longueur). On a donc

$$\Lambda(\mathcal{D}_k) \geq \frac{\pi^2 k^2}{(b - a)^2}, \quad \text{pour toute } k\text{-partition } \mathcal{D}_k.$$

Par définition, on a alors

$$\mathfrak{L}_k(]a, b[) \geq \frac{\pi^2 k^2}{(b - a)^2},$$

l'égalité étant atteinte pour une partition uniforme. On a donc montré que

$$\mathfrak{L}_k(]a, b[) = \frac{\pi^2 k^2}{(b - a)^2}.$$

Comme on l'a vu précédemment, on a de plus

$$\mathfrak{L}_k(]a, b[) = \frac{\pi^2 k^2}{(b - a)^2} = \lambda_k(]a, b[).$$

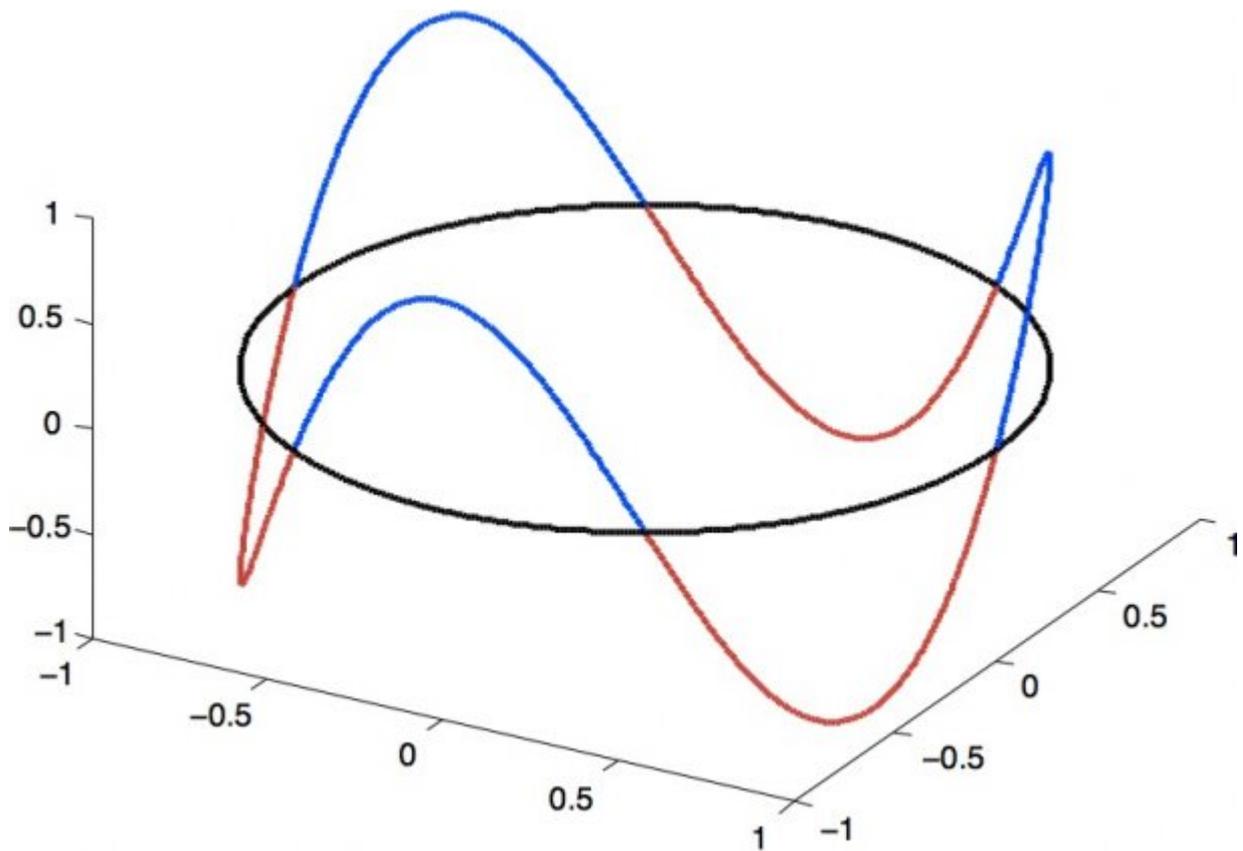
Ainsi nous pouvons retenir que dans le cas du segment, la k -partition spectrale minimale est la partition nodale de la k -ème fonction propre f_k du Laplacien.

Partition d'un cercle

Considérons cette fois le cercle de rayon 1. Rechercher les valeurs propres du Laplacien sur le cercle revient à chercher un réel λ et une fonction $f \in C^2([0, 2\pi])$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d^2 f}{d\theta^2}(\theta) = \lambda f(\theta) \quad \text{pour tout } \theta \in]0, 2\pi[, \\ f(0) = f(2\pi), \\ f'(0) = f'(2\pi). \end{array} \right.$$

On remarque que les fonctions $f_k : \theta \mapsto \cos k\theta$ et $g_k : \theta \mapsto \sin k\theta$ sont des fonctions propres associées à la valeur propre $\lambda_k = k^2$, pour tout $k \geq 1$. On peut montrer qu'il n'y a pas d'autres valeurs propres et que toute fonction propre associée à la valeur propre λ_k est une combinaison linéaire des fonctions f_k et g_k . Toute combinaison linéaire s'écrit sous la forme $\theta \mapsto \alpha \cos(k\theta + \phi)$ et s'annule donc exactement $2k$ fois sur le cercle et les points d'annulation sont répartis uniformément sur le cercle. Ces points permettent de former une $2k$ -partition nodale du cercle en $2k$ arcs de même longueur. On constate que toutes les fonctions propres s'annulent un nombre pair de fois et donc qu'il n'existe aucune fonction propre s'annulant un nombre impair de fois. Autrement dit, toutes les partitions nodales ont un nombre pair de composantes.

Représentation de g_3

Reprenons le même exercice que pour un segment : en choisissant comme niveau de désagrément la plus grande première valeur propre du Laplacien, on cherche le découpage du cercle en k arcs de manière à minimiser le plus grand désagrément des populations. Comme pour le segment, la meilleure configuration (ou k -partition spectrale minimale) est donnée par le découpage du cercle en k arcs de même longueur.

Lorsque k est pair, une k -partition minimale est donnée par la partition nodale associée à la valeur propre $\lambda_{k/2}$. Toutefois, lorsque k est impair, aucune partition nodale ne forme une k -partition minimale.

Nous retiendrons de ce calcul que les k -partitions spectrales minimales ne sont pas toujours nodales.

Partitions minimales dans le plan dans le cas d'un niveau de désagrément spectral

L'interprétation donnée à la deuxième section du problème de cohabitation propose un lien entre le niveau de désagrément et les valeurs propres du Laplacien. Dans cette partie, on va généraliser l'approche vue précédemment à des domaines du plan. Mais il nous faut d'abord introduire un peu de théorie spectrale et définir le mystérieux Laplacien qui doit son nom au mathématicien français Laplace [4].

Valeurs propres du Laplacien dans un rectangle

Soit f une fonction deux fois dérivables sur un ouvert O . On définit le Laplacien Δ par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Considérons un rectangle $\mathcal{R}_{a,b} =]0, a[\times]0, b[$ de côtés de longueur a et b . On dit que λ est une valeur propre du Laplacien avec conditions de Dirichlet s'il existe une fonction $f \in C^0(\overline{O}) \cap C^2(O)$, appelée *fonction propre* telle que

$$\begin{cases} -\Delta f &= \lambda f & \text{sur } \mathcal{R}_{a,b}, \\ f &= 0 & \text{sur le bord de } \mathcal{R}_{a,b}. \end{cases}$$

On peut chercher des fonctions propres particulières par une *méthode de séparation des variables*, c'est-à-dire des fonctions de la forme $f(x, y) = u(x) v(y)$. On peut déterminer les fonctions u et v puis montrer qu'il n'y a pas d'autres solutions que les combinaisons linéaires de telles fonctions. On se ramène ainsi à un problème en une dimension en chaque variable et les réels

$$\lambda_{m,n}(a, b) = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad m \geq 1, n \geq 1,$$

sont donc les valeurs propres sur le rectangle $\mathcal{R}_{a,b}$ associées aux fonctions propres

$$f_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right).$$

Regardons maintenant les *domaines nodaux* des fonctions $f_{m,n}$. On définit les *domaines nodaux* d'une fonction propre f définie sur un domaine O comme étant les composantes connexes de $O \setminus N(f)$ où $N(f)$ est l'ensemble nodal, c'est-à-dire l'ensemble des points d'annulation de f :

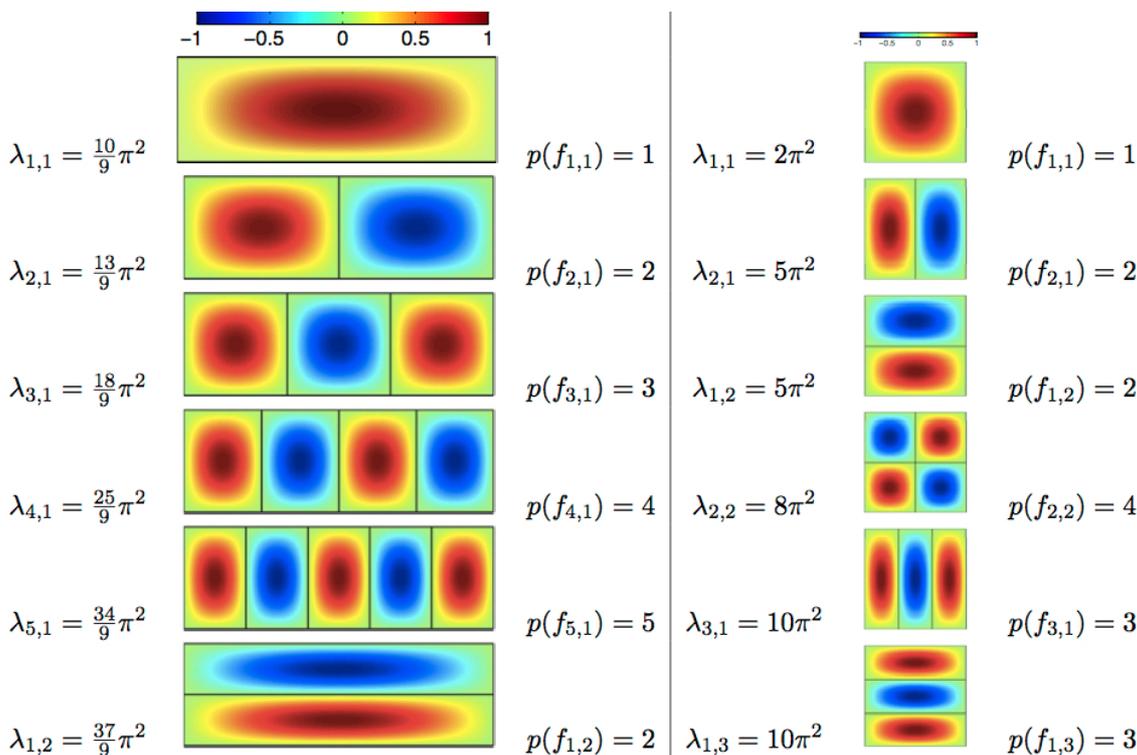
$$N(f) = \{(x, y) \in O \mid f(x, y) = 0\}.$$

Chaque domaine nodal est donc un ensemble où la fonction propre est non nulle, délimité par des lignes nodales (régulières par morceaux) où la fonction s'annule.

On note $p(f)$ le nombre de ces composantes. La fonction propre f permet donc de construire une $p(f)$ -partition de O que l'on appelle *nodale* (car associée à une fonction propre).

Sur la figure suivante, on représente les fonctions propres sur le rectangle $\mathcal{R}_{3,1}$ et le carré $\mathcal{R}_{1,1}$. Les lignes noires donnent l'ensemble des points d'annulation des fonctions propres.

On sait que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right)$ s'annule aux points $x_m^j = \frac{aj}{m}$, $0 \leq j \leq m$. On en déduit que la fonction $f_{m,n}$ s'annule sur les droites d'équation $x = \frac{aj}{m}$ avec $0 \leq j \leq m$ et $y = \frac{bk}{n}$ avec $0 \leq k \leq n$. Par conséquent, les fonctions $f_{m,n}$ ont $p(f_{m,n}) = mn$ domaines nodaux. Sur la figure suivante, on a ordonné de façon croissante les valeurs propres ; l'ordre d'apparition de la valeur propre donne alors ce que l'on appelle le *rang* de la valeur propre. On remarque sur cette figure un comportement assez différent entre le rectangle $\mathcal{R}_{3,1}$ et le carré $\mathcal{R}_{1,1}$: en effet, pour les cinq premières fonctions propres du rectangle allongé $\mathcal{R}_{3,1}$, le nombre de domaines nodaux est égal au rang de la valeur propre. Ceci n'est plus vrai pour le carré (ni même pour un rectangle moins allongé). Cette remarque est importante car nous verrons plus loin que lorsque le nombre de domaines nodaux d'un vecteur propre est égal au rang de la valeur propre, alors la partition nodale est minimale et ne l'est pas dans le cas contraire.



Partitions nodales des premières fonctions propres sur le rectangle $\mathcal{R}_{3,1}$ et le carré $\mathcal{R}_{1,1}$

Valeurs propres du Laplacien dans un domaine du plan

Considérons O un domaine de \mathbb{R}^2 (il faudrait supposer un peu de régularité pour définir clairement les objets suivants mais ce n'est pas l'enjeu ici). Comme pour le cas du rectangle, on dit que λ est une valeur propre du Laplacien avec conditions de Dirichlet s'il existe une fonction $f \in C^0(\overline{O}) \cap C^2(O)$, appelée *fonction propre* telle que

$$\begin{cases} -\Delta f &= \lambda f & \text{sur } O, \\ f &= 0 & \text{sur le bord de } O. \end{cases}$$

L'ensemble des valeurs propres constitue le *spectre* du Laplacien sur O . En général, il n'est pas possible d'expliciter les valeurs propres du Laplacien, ni les fonctions propres. Dans cet article, on admet qu'il y a un nombre dénombrable de valeurs propres qui peuvent être rangées par ordre croissant. Notons alors $\{\lambda_k(O)\}$ ($k \geq 1$) la suite des valeurs propres du Laplacien rangées par ordre croissant et $\{f_k\}$ une suite associée de fonctions propres normalisées par la condition $\int_O |f_k(x, y)|^2 dx dy = 1$. On peut montrer que $\lambda_1(O) > 0$ et que la suite $(\lambda_k(O))_{k \geq 1}$ tend vers l'infini.

Le théorème de Courant dit que toute fonction propre associée à la k -ème valeur propre du Laplacien a au plus k domaines nodaux (voir aussi [Ple]). Sa partition nodale est donc une j -partition avec $j \leq k$. Nous pouvons montrer que seules les fonctions propres associées à la première valeur propre restent de signe constant. De plus, à multiplication près, il n'y a qu'une seule fonction propre associée à la première valeur propre $\lambda_1(O)$ [5]. Ainsi, toute fonction propre f_1 associée à la première valeur propre $\lambda_1(O)$ a un unique domaine nodal et on lui associe donc une 1-partition. On peut aussi montrer que toute fonction propre f_2 associée à la deuxième valeur propre $\lambda_2(O)$ a deux domaines nodaux et on lui associe donc une 2-partition. On a donc :

$$p(f_1) = 1 \quad \text{et} \quad p(f_2) = 2.$$

Par contre, pour $k \geq 3$, les comportements peuvent être très différents comme le montre la **figure** représentant les vecteurs propres sur le carré ou un rectangle. En effet, les fonctions propres associées à la troisième valeur propre sur le rectangle $\mathcal{R}_{3,1}$ et le carré $\mathcal{R}_{1,1}$ ont respectivement trois et deux domaines nodaux.

Partition minimale spectrale

Par analogie avec ce que l'on a vu en dimension 1, on choisit comme niveau de désagrément $F(D)$ la valeur propre $\lambda_1(D)$. Le problème introduit dans la première section se réécrit plus mathématiquement sous la forme suivante. Soit O un domaine à bord régulier de \mathbb{R}^2 . On considère $\mathcal{D}_k = (D_i)_{i=1}^k$ une k -partition de O , c'est-à-dire un ensemble de k ouverts disjoints non vides de O dont l'adhérence remplit O (condition de remplissage du domaine).

On note $\lambda_1(D_i)$ la première valeur propre du Laplacien avec condition de Dirichlet sur D_i . On définit l'énergie de cette partition (en reprenant le vocabulaire de la mécanique quantique) comme le maximum de la première valeur propre sur chacun des sous-domaines par :

$$\Lambda(\mathcal{D}_k) = \max\{\lambda_1(D_1), \dots, \lambda_1(D_k)\}.$$

Cette quantité $\Lambda(\mathcal{D}_k)$ représente donc le désagrément maximal des populations avec la répartition \mathcal{D}_k . Le problème d'optimisation que l'on considère est de déterminer l'infimum de $\Lambda(\mathcal{D}_k)$ sur l'ensemble \mathcal{P}_k des k -partitions de O

$$\mathfrak{L}_k(O) = \inf\{\Lambda(\mathcal{D}_k), \mathcal{D}_k \in \mathcal{P}_k\},$$

ainsi qu'une k -partition qui réalise cet infimum. On cherche ainsi la répartition des populations qui minimise le plus grand désagrément des populations.

Commençons par énoncer quelques résultats montrant que notre problème est bien posé. Conti-Terracini-Verzini [CTV] ont démontré que, pour tout k , il existe des k -partitions minimales qui sont « régulières » et Helffer—Hoffmann-Ostenhof—Terracini [HHOT] ont montré qu'elles étaient toutes essentiellement de ce type. Les frontières d'une partition minimale se rencontrent à angles égaux.

De plus, si $\mathcal{D}_k = (D_i)_{i=1}^k$ est une k -partition spectrale minimale, c'est une équi-partition spectrale en ce sens que :

$$\mathfrak{L}_k(O) = \lambda_1(D_i), \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Ainsi, toutes les populations ont le même désagrément lorsque la partition est optimale.

Nous pouvons établir un encadrement de la valeur $\mathfrak{L}_k(O)$ sans toutefois avoir d'information sur la forme d'une partition minimale. On peut tout d'abord montrer (pour ce faire, on peut utiliser une caractérisation de la valeur propre à l'aide du *principe du min-max*) que

$$\lambda_k(O) \leq \mathfrak{L}_k(O), \quad \forall k \geq 1.$$

Notons $V_k(O)$ la plus petite valeur propre pour laquelle il existe une fonction propre f_k ayant k domaines nodaux. Cette fonction propre f_k permet de construire une k -partition. De plus, elle vérifie sur chaque D_i , $1 \leq i \leq k$:

$$\begin{cases} -\Delta f_k &= V_k(O) f_k & \text{sur } D_i, \\ f_k &= 0 & \text{sur le bord de } D_i. \end{cases}$$

Ainsi $f_{k|_{D_i}}$ est une fonction propre du Laplacien sur D_i . Comme cette fonction reste de signe constant sur D_i , elle est donc associée à la première valeur propre et on a

$$V_k(O) = \lambda_1(D_i), \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

On peut obtenir l'encadrement

$$\lambda_k(O) \leq \mathfrak{L}_k(O) \leq V_k(O).$$

Nous avons vu précédemment que pour $k = 1$ et $k = 2$, on a $V_k(O) = \lambda_k(O)$. Dans ce cas, nous avons donc :

$$\mathfrak{L}_1(O) = \lambda_1(O) \quad \text{et} \quad \mathfrak{L}_2(O) = \lambda_2(O).$$

Une k -partition minimale est alors la partition nodale d'une fonction propre associée à $\lambda_k(O)$, $k = 1, 2$.

Helffer, Hoffmann-Ostenhof et Terracini ont précisé l'inégalité précédente en montrant que pour chaque k , il n'y a que deux possibilités :

- Soit $\lambda_k(O) = \mathfrak{L}_k(O) = V_k(O)$ et dans ce cas, on obtient une k -partition minimale en considérant une partition nodale associée à $\lambda_k(O)$.
- Soit $\lambda_k(O) < \mathfrak{L}_k(O) < V_k(O)$ et dans ce cas, les k -partitions nodales ne sont pas minimales.

Reprenons les exemples du rectangle et du carré (voir **figure**). Dans le cas du rectangle, on a

$$\lambda_k(\mathcal{R}_{3,1}) = \mathfrak{L}_k(\mathcal{R}_{3,1}) = V_k(\mathcal{R}_{3,1}), \quad \text{pour } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Les partitions minimales sont nodales et sont obtenues en coupant dans la longueur le rectangle en k rectangles de même taille : ce sont les partitions représentées en traits noirs sur la partie gauche de la figure précédente. Dans le dernier cas, on a

$$\lambda_k(\mathcal{R}_{3,1}) < \mathfrak{L}_k(\mathcal{R}_{3,1}) < V_k(\mathcal{R}_{3,1}), \quad \text{pour } k = 6.$$

On ne peut donc pas trouver de 6-partition nodale qui soit minimale.

Dans le cas du carré, on a

$$\lambda_k(\mathcal{R}_{1,1}) = \mathfrak{L}_k(\mathcal{R}_{1,1}) = V_k(\mathcal{R}_{1,1}), \quad \text{pour } k = 1, 2, 4.$$

$$\lambda_k(\mathcal{R}_{1,1}) < \mathfrak{L}_k(\mathcal{R}_{1,1}) < V_k(\mathcal{R}_{1,1}), \quad \text{pour } k = 3, 5, 6.$$

La 4-partition minimale du carré est obtenue en découpant le carré initial en 4 carrés. Aucune k -partition nodale ne peut être minimale lorsque $k = 3, 5, 6$ (en fait pour $k \geq 5$).

3-partition sur le carré : Algorithme itératif

Pour déterminer une 3-partition minimale, on peut utiliser un algorithme que l'on pourrait qualifier de bonne entente. Pour commencer, deux populations voisines comparent leur désagrément réciproque. S'ils sont différents, elles ajustent leur frontière pour que leurs désagréments soient égaux et minimaux. S'ils sont égaux, elles peuvent aussi ajuster leur frontière pour diminuer ensemble leurs désagréments. Puis l'une des populations voisines se retourne vers une autre population voisine et procède de même... À chaque étape, le plus grand désagrément décroît. On peut espérer tendre vers une bonne entente générale.

Considérons que nous avons 3 populations à répartir dans un territoire que l'on va noter O . On suppose que les partitions nodales ne donnent pas de 3-partition minimale. On a vu qu'il était très simple de déterminer une 2-partition minimale : il suffit de considérer la partition nodale d'une fonction propre

associée à la deuxième valeur propre. On va donc essayer de tirer avantage de cette situation plus simple. Cela nous conduit à proposer un algorithme itératif pour construire une 3-partition (voir [Boz] et la **figure** suivante pour la mise en œuvre sur le carré) :

Algorithme

Étape 0. Soit $\mathcal{D}^0 = (D_1^0, D_2^0, D_3^0)$ une 3-partition quelconque telle que chaque sous-domaine est voisin des deux autres.

Étape 1. On calcule la première valeur propre sur chacun des sous-domaines et on note D_1^1 le sous-domaine de \mathcal{D}^0 pour lequel la valeur est la plus petite. On travaille maintenant sur $O \setminus \overline{D_1^1}$ et on calcule une 2-partition minimale sur ce domaine à l'aide des partitions nodales pour la deuxième valeur propre. On a

$$\mathfrak{L}_2(O \setminus \overline{D_1^1}) = \lambda_2(O \setminus \overline{D_1^1}) = \lambda_1(D_2^1) = \lambda_1(D_3^1) \leq \max(\lambda_1(D_1^0), \lambda_1(D_2^0), \lambda_1(D_3^0)) = \Lambda(\mathcal{D}^0),$$

où (D_2^1, D_3^1) sont les domaines nodaux d'une fonction propre associée à $\mathfrak{L}_2(O \setminus \overline{D_1^1})$.

On a ainsi construit une nouvelle 3-partition $\mathcal{D}^1 = (D_1^1, D_2^1, D_3^1)$ avec $\Lambda(\mathcal{D}^1) \leq \Lambda(\mathcal{D}^0)$.

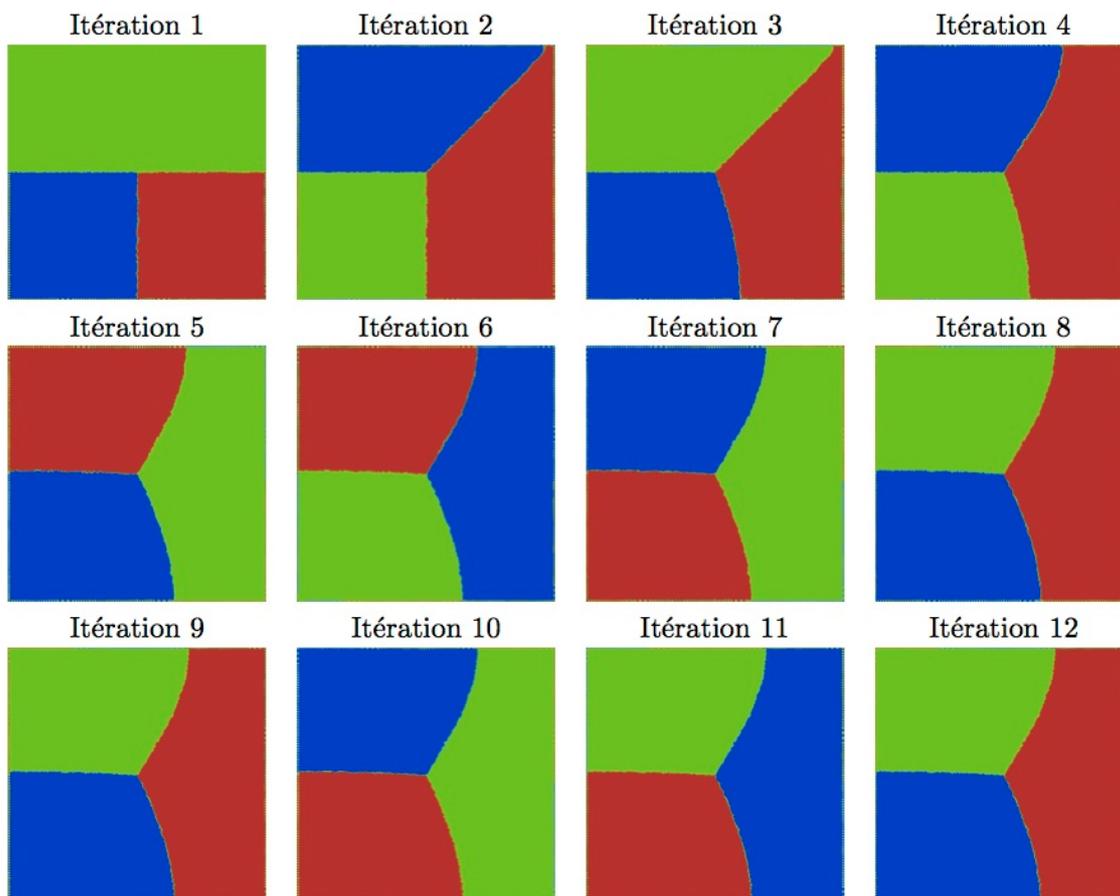
Étape n. À l'étape $n \geq 1$, on note D_1^n un des domaines de la dernière partition obtenue qui a la plus basse première valeur propre (en vert sur la **figure**). On construit ensuite une 2-partition associée à la deuxième valeur propre sur le domaine $O \setminus \overline{D_1^n}$. On note (D_2^n, D_3^n) cette 2-partition nodale. On a ainsi construit une nouvelle 3-partition $\mathcal{D}^n = (D_1^n, D_2^n, D_3^n)$ telle que

$$\Lambda(\mathcal{D}^n) \leq \Lambda(\mathcal{D}^{n-1}).$$

La suite $(\Lambda(\mathcal{D}^n))_{n \geq 0}$ est décroissante et positive, donc convergente. Si l'algorithme converge vers une partition $\mathcal{D}^\infty = (D_1^\infty, D_2^\infty, D_3^\infty)$, on a alors

$$\lambda_1(D_1^\infty) = \lambda_1(D_2^\infty) = \lambda_1(D_3^\infty).$$

Cet algorithme est mis en pratique à la figure ci-après pour le carré. Il permet de proposer un candidat pour former une 3-partition minimale du carré.



Algorithme itératif sur le carré

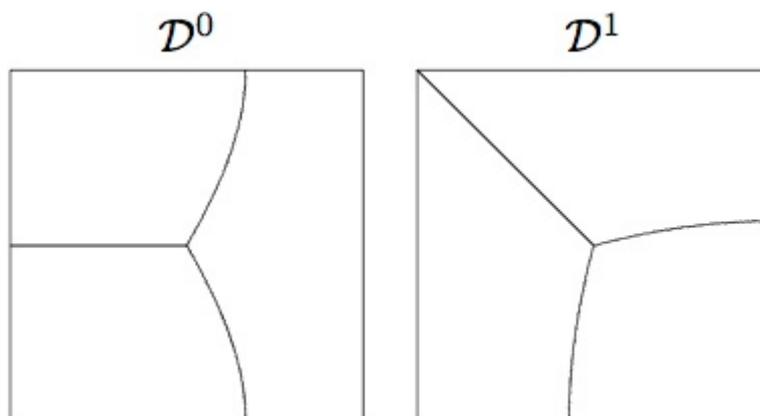
Partitions symétriques du carré

Lorsque le domaine considéré est symétrique, une autre méthode consiste à chercher des 3-partitions symétriques (voir [BHV], [BV], [BHHO], [BH]). Dans ce cas, il suffit de travailler sur un demi-domaine et à nouveau, on se ramène à étudier les domaines nodaux pour la deuxième valeur propre.

Le carré possède deux axes de symétrie : la médiatrice et la diagonale. En utilisant chacune de ces symétries, nous avons obtenu deux 3-partitions candidates \mathcal{D}^0 et \mathcal{D}^1 représentées à la figure suivante. On observe numériquement que

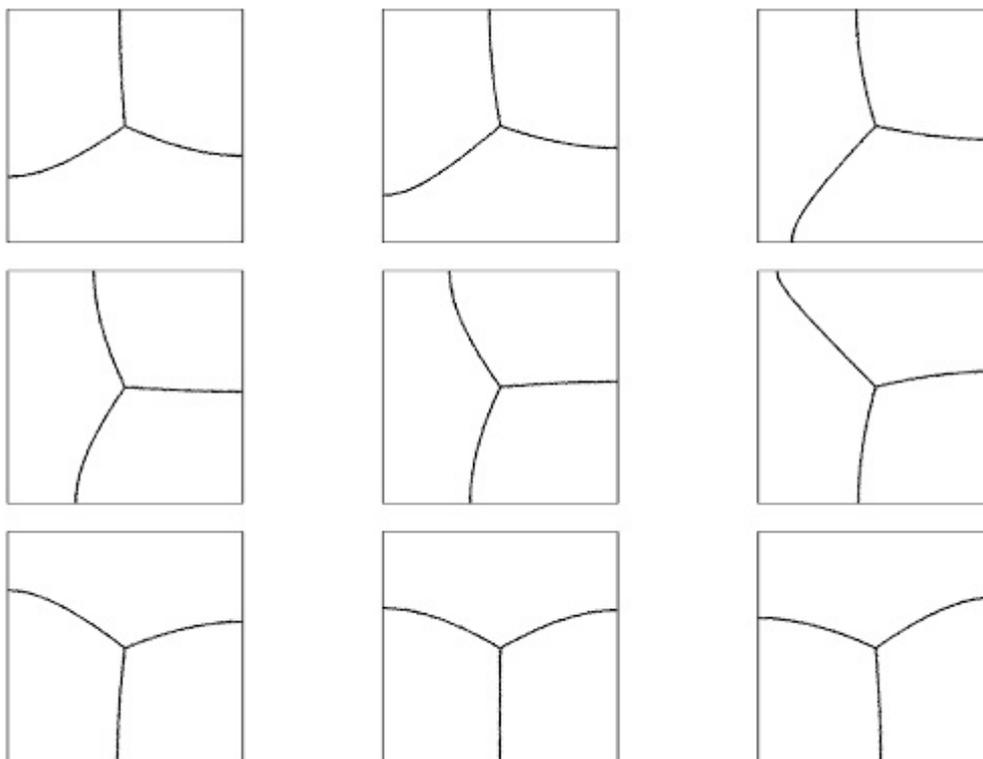
$$\Lambda(\mathcal{D}^0) = \Lambda(\mathcal{D}^1) (\simeq 66.581165).$$

Nous savons démontrer (dans [BHHO]) l'égalité en supposant que le centre du carré est un point triple pour ces deux configurations, mais pour l'instant, cette hypothèse repose sur des simulations numériques et n'a pas été justifiée rigoureusement.



Candidats symétriques pour le carré

En utilisant des combinaisons linéaires des vecteurs propres qui ont permis de construire les deux partitions nodales précédentes \mathcal{D}^0 et \mathcal{D}^1 , il est possible de construire une famille continue $(\mathcal{D}^t)_{0 \leq t \leq 1}$ de 3-partitions telle que $\Lambda(\mathcal{D}^t)$ reste constante. Des exemples sont donnés à la figure suivante.

Exemples de 3-partitions du carré telles que $\Lambda(\mathcal{D}^t)$ est constant

Nous avons ainsi une collection de candidats mais nous ne savons pas montrer que ces candidats sont des 3-partitions spectrales minimales. À vrai dire, nous ne savons pas démontrer que le centre du carré est effectivement un point triple !

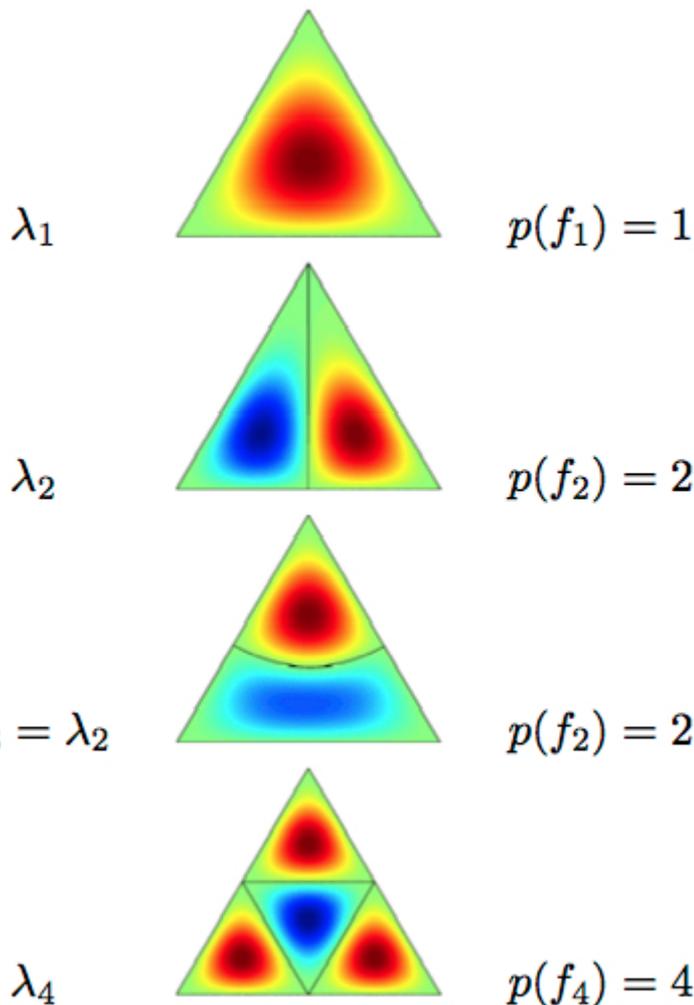
Quelques candidats pour des domaines simples

Pour d'autres géométries simples, nous ne savons pas démontrer davantage de résultats. Nous avons déjà mentionné le cas du disque. Considérons maintenant le triangle équilatéral. La figure suivante donne les

premières fonctions propres. Comme pour le carré et le disque, on constate que l'on a

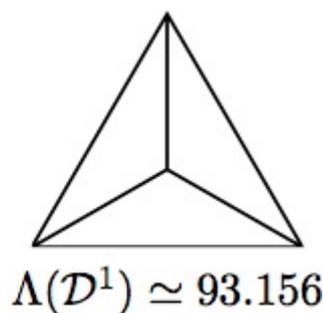
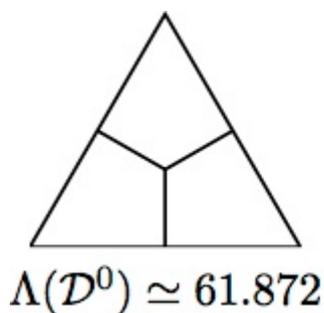
$$\lambda_k(O) = \mathfrak{L}_k(O) = V_k(O), \quad \text{pour } k = 1, 2, 4.$$

$$\lambda_k(O) < \mathfrak{L}_k(O) < V_k(O), \quad \text{pour } k = 3.$$



Partitions nodales des premières fonctions propres sur le triangle équilatéral

Nous pouvons faire la même étude des candidats symétriques en utilisant les symétries par une médiatrice et on obtient deux candidats \mathcal{D}^0 et \mathcal{D}^1 dont l'un est à éliminer car $\Lambda(\mathcal{D}^0) < \Lambda(\mathcal{D}^1)$.



Candidats pour le triangle équilatéral

Conclusion

Il reste très frustrant de ne pas pouvoir déterminer les partitions minimales dans le cas de domaines simples comme le carré, le disque ou le rectangle. On arrive parfois à déterminer des candidats en faisant des hypothèses sur la « forme » de la partition (symétrie, points singuliers de la frontière,...). La mise au point d'algorithmes performants devrait permettre d'établir des conjectures et de mieux comprendre la transition (par déformation) entre partitions minimales nodales et non nodales. Les premières simulations numériques nous permettent de faire les conjectures suivantes :

- la 3-partition minimale du disque est celle partageant le disque en trois secteurs d'angle $\pi/3$.
- les partitions D^t présentées **plus haut** donnent des 3-partitions minimales pour le carré.
- la partition D^0 est une 3-partition minimale pour le triangle équilatéral.
- Enfin une conjecture qui fait rêver est la conjecture hexagonale qui dit que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{L}_k(O)}{k} = \frac{\lambda_1(Hex)}{Aire(O)},$$

où $\lambda_1(Hex)$ est la première valeur propre du Laplacien sur un hexagone d'aire 1. Dans un langage plus poétique, cette conjecture dit que la structure de nid d'abeille est celle qui, pour k grand, assurera la meilleure cohabitation.

Références

[Bér] P. Bérard. On ne peut pas entendre la forme d'un tambour. **Exposé** (2001).

[BV] V. Bonnaillie-Noël, and G. Vial. Computations for nodal domains and spectral minimal partitions. **Page web** (2010).

[Hel] B. Helffer. À la découverte des partitions spectrales minimales. Journées SMF-Académie de Sciences à Rennes. **Exposé** (2011).

[Oud] E. Oudet. **Page web**

Pour ceux qui veulent en savoir plus

[BH] V. Bonnaillie-Noël, and B. Helffer. Numerical analysis of nodal sets for eigenvalues of Aharonov-Bohm Hamiltonians on the square and application to minimal partitions. *Experimental Mathematics*, 20, 3, p. 304-322 (2011).

[BHHO] V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer, and T. Hoffmann-Ostenhof. Spectral minimal partitions, Aharonov-Bohm hamiltonians and application the case of the rectangle. *J. Phys. A : Math. Theor.* 42, 18, 185203 (2009).

[BHV] V. Bonnaillie-Noël, B. Helffer, and G. Vial. Numerical simulations for nodal domains and spectral minimal partitions. *ESAIM Control Optim. Calc.Var.* 16, 1, p. 221-246 (2010).

[BBO] B. Bourdin, D. Bucur, and E. Oudet. Optimal partitions for eigenvalues. *SIAM J. Sci. Comput.* 31, 6, p. 4100-4114 (2009/10).

[Boz] F. Bozorgnia. Numerical algorithm for spatial segregation of competitive systems. *SIAM J. Sci. Comput.* 31, 5, p. 3946-3958 (2009).

- [BBH] D. Bucur, G. Buttazzo, and A. Henrot. Existence results for some optimal partition problems. *Adv. Math. Sci. Appl.* 8, p. 571-579 (1998).
- [BHIM] K. Burdzy, R. Holyst, D. Ingerman, and P. March. Configurational transition in a Fleming-Viot-type model and probabilistic interpretation of Laplacian eigenfunctions. *J. Phys. A : Math. Gen.* 29, p. 2633-2642 (1996).
- [CL] L.A. Caffarelli, and F.H. Lin. An optimal partition problem for eigenvalues. *Journal of scientific Computing* 31 (1/2) DOI : 10.1007/s10915-006-9114.8 (2007)
- [CTV] M. Conti, S. Terracini, and G. Verzini.
An optimal partition problem related to nonlinear eigenvalues. *Journal of Functional Analysis* 198, p. 160-196 (2003).
A variational problem for the spatial segregation of reaction-diffusion systems. *Indiana Univ. Math. J.* 54, p. 779-815 (2005).
On a class of optimal partition problems related to the Fucik spectrum and to the monotonicity formula. *Calc. Var.* 22, p. 45-72 (2005).
- [CBH] O. Cybulski, V. Babin, and R. Holyst. Minimization of the Renyi entropy production in the space-partitioning process. *Physical Review E* 71 046130 (2005).
- [Hal] T. C. Hales. The honeycomb conjecture. *Disc. Comp. Geom.* 25 p. 1-22 (2001).
- [HHO] B. Helffer, and T. Hoffmann-Ostenhof. On spectral minimal partitions : the case of the disk. *CRM proceedings* 52, p. 119-136 (2010).
- [HHOT] B. Helffer, T. Hoffmann-Ostenhof, S. Terracini. Nodal domains and spectral minimal partitions. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 26, p. 101-138 (2009).
- [Ple] A. Pleijel. Remarks on Courant's nodal theorem. *Comm. Pure. Appl. Math.* 9, p. 543-550, 1956.

P.S. :

Les auteurs tiennent à remercier les différents interlocuteurs et relecteurs qui ont permis d'améliorer ce texte, notamment Serge Cantat, Loren Coquille, Carole Gaboriau, Jérôme Germoni, Étienne Ghys, Luc Hillairet et Petru Mironescu.

Notes

- [1] On dit qu'un ouvert du plan est un domaine s'il est connexe, c'est-à-dire si, pour toute paire de points x, y de D , on peut trouver un chemin dans D qui joint x à y .
- [2] On appelle partition de O en k zones, l'ensemble de k domaines deux à deux disjoints D_1, \dots, D_k tel que la réunion de ses domaines et de leurs frontières recouvrent $O : \cup_{1 \leq i \leq k} \overline{D_i} = \overline{O}$.
- [3] On pourrait également regarder la somme des désagréments des populations mais les problèmes sont très différents.
- [4] **Pierre-Simon Laplace** (1749-1827) est un mathématicien, astronome et physicien français.
- [5] Ce résultat vient du théorème de Krein-Rutman qui est une généralisation à la dimension infinie du théorème de Perron-Frobenius pour le cas matriciel.

Affiliation des auteurs

,

Pour citer cet article : **Virginie Bonnaille-Noël** et **Bernard Helffer**, « **À la découverte des partitions spectrales minimales** » — *Images des Mathématiques*, CNRS, 2012.

En ligne, URL : [**http://images.math.cnrs.fr/A-la-decouverte-des-partitions.html**](http://images.math.cnrs.fr/A-la-decouverte-des-partitions.html)