MÉTHODES D'OPTIMISATION POUR LES EDP ELLIPTIQUES

YANN BRENIER

1. Chapitre introductif

2. Résolution des EDP de transport linéaires

3. Méthodes d'optimisation pour les EDP elliptiques

3.1. **Présentation du chapitre.** L'EDO du second ordre

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -(\nabla p)(t, u(t)), \tag{3.1}$$

qu'on peut noter plus légèrement

$$u"(t) = -(\nabla p)(t, u(t)),$$

est l'archétype de la mécanique newtonienne (elle décrit la dynamique d'une particule de masse unité, de position $u(t) \in \mathbb{R}^d$ au temps t, dans un potentiel, dépendant du temps, $p(t, x)$ donné sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$). Elle apparaît aussi dans nos équations fétiches, celles d'Euler. En effet, concentrons nous sur le cas des fluides incompressibles en supposant la densité q constante, en la normalisant à 1. Les équations d'Euler s'écrivent alors, en coordonnées

$$\partial_t v_i + v^j \partial_j v_i + \partial_i p = 0, \quad \partial_i v^i = 0.$$

En introduisant le flot ξ défini par l'EDO du premier ordre

$$\partial_t \xi_s^t = v(t, \xi_s^t(x)), \quad \xi_s^s(x) = x,$$

on s'aperçoit aussitôt que, pour s et x fixés, $u(t) = \xi_s^t(x) \in \mathbb{R}^d$ est (modulo des hypothèses de régularité adéquates) précisément solution de (3.1). [Pour les amateurs de géométrie riemannienne, le résultat est plus compliqué sur une variété de riemannienne de métrique g, où, en coordonnées sur cartes locales, $v_i(t, x) = g_{ij}(x)v^i(t, x)$. On obtient

$$\frac{d}{dt}\left(g_{ij}(y(t))\frac{du^j(t)}{dt}\right) = -(\partial_i p)(t, u(t))$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme $u"(t) = f(t, u(t), u'(t))$, avec f à calculer, en faisant intervenir, un peu lourdement, les symboles de Christoffel Γ^i_{jk}.] Ce n'est pas surprenant, car, dans son article de 1757, Euler a fait exactement le chemin inverse. Il est en fait parti de l'équation "dynamique" (3.1) et a fait l'hypothèse que le potentiel p s'adapte pour maintenir le fluide incompressible ! Cela suggère une forme alternative des équations d'Euler décrivant le mouvement d'un fluide incompressible confiné dans un domaine D (i.e. la fermeture d'un ouvert borné suffisamment lisse) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ (ou, plus généralement sur une variété riemannienne de dimension d), à savoir, en fixant $s = 0$ pour simplifier,

$$\partial^2_{tt}\xi_0^t = -(\nabla p)(t, \xi_0^t(x)) \tag{3.2}$$

combiné à la propriété de conservation du domaine D et de son "élément de volume", écrite sous forme intégrale

$$\int_D \phi(t, \xi_0^t(x))dx = \int_D \phi(x)dx, \quad \forall \phi \in C^0(\mathbb{R}^d), \quad \forall t \tag{3.3}$$

Remarque. Dans cette écriture il n'est même pas nécessaire de supposer que ξ est généré par un champ de vecteur v ! C'est, en quelque sorte, une définition généralisée des équations d'Euler, où il n'est pas du tout nécessaire de supposer que les ξ_0^t sont des difféomorphismes de D, il suffit qu'elle soient des applications Boréliennes de x dépendant de t au moins de façon absolument continue -au sens du chapitre précédent. On reviendra plus tard sur cette formulation "généralisée".

Du principe de moindre action aux équations elliptiques semi-linéaires. On verra plus loin dans la sous-section 3.2 que l'équation dynamique (3.1) a un caractère "variationnel", au sens qu'elle est la condition d'optimalité de la minimisation d'une certaine "fonctionnelle", à savoir

$$J_{t_0,t_1,p}[u] = \int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - p(t, u(t)))dt \tag{3.4}$$

sur des intervalles de temps $[t_0, t_1]$ fixés assez petits (en un sens qu'on précisera), parmi toutes les courbes C^1 à valeur dans D à valeurs prescrites en t_0 et t_1. C'est ce qu'on appelle le "principe de moindre action" qu'Euler attribuait en 1757 à Maupertuis (alors président de l'académie des sciences de Berlin) bien que beaucoup l'attribuent plutôt à Euler lui-même (dans la suite, bien entendu, du "principe de Fermat" régissant l'optique géométrique, qui lui est antérieur) ! Ce résultat va nous inspirer, dans la sous-section 3.6, pour l'étude de certaines équations elliptiques "semi-linéaires". En effet, il est assez naturel de généraliser la variable t unidimensionnelle sur l'ouvert $]t_0, t_1[$ par la variable $y \in \mathbb{R}^m$ multidimensionnelle à valeur dans un ouvert borné lisse (pour simplifier) U de $\mathbb{R}^m$ et de minimiser la fonctionnelle

$$u \to \int_U (\frac{1}{2}|\nabla u(y)|^2 - p(y, u(y)))dy,$$

en prescrivant la valeur de u au bord de U. Cela nous conduira à la résolution de l'équation elliptique "semi-linéaire"

$$-\Delta u(y) = P(y, u(y))$$

sur U avec "conditions de Dirichlet" au bord de D, en notant $P(x, v) = \partial_v p(x, v)$. Du même coup on résoudra l'équation de Poisson (linéaire)

$$-\Delta \psi = \omega$$

(qu'on a déjà vu, dès le premier chapitre, dans la reformulation des équations... d'Euler en deux dimensions d'espace) et qui correspond au cas où $p(y, v)$ est juste linéaire en v : $p(y, v) = \omega(y)v$.

Du principe de moindre action "collectif" à l'équation de Monge-Ampère réelle. On peut encore aller plus loin en examinant les équations d'Euler dans leur formulation (3.2,3.3). On verra dans la sous-section 3.3 que le principe de moindre action se relève du niveau "individuel" d'une particule fluide accélérée par le potentiel p selon (3.1) au niveau "collectif" du fluide tout entier ! Cela passera par la minimisation de la fonctionnelle

$$\mathbb{J}_{t_0,t_1}[\xi] = \int_{t_0}^{t_1} \int_D \frac{1}{2} |\partial_t \xi_0^t(x)|^2 dx dt$$

où le "flot" ξ_0^t est prescrit en $t = t_0$ et $t = t_1$ et contraint de conserver D et son élément de volume. Ceci nous permettra, en passant (car ce n'est pas le point central de ce chapitre, principalement consacré aux équations elliptiques), de donner une justification, en termes élémentaires (sans connaissances requises en géométrie riemannienne, dans le simple cas d'un domaine convexe borné de $\mathbb{R}^d$) de la fameuse interprétation géométrique des équations d'Euler des fluides incompressibles, par V.I. Arnold en 1966 [selon laquelle, dans le cas d'une variété riemannienne compacte D, elles décrivent les géodésiques -à vitesse constante- du groupe de Lie (formel) de dimension infinie des difféomorphismes conservant le volume de la variété, pour la métrique L^2 sur son algèbre de Lie (formelle), constituée des champs de vecteurs à divergence nulle]. On verra de plus que, étant données les valeurs de ξ_0^t en $t = t_0$ et $t = t_1$, on peut retrouver le champ de pression p comme maximiseur de la fonctionnelle

$$\mathbb{K}_{t_0,t_1}[p] = \int_{t_0}^{t_1} \int_D p(t,x) dx dt + \int_D K_{t_0,t_1,p}(\xi_0^{t_0}(x), \xi_0^{t_1}(x)) dx.$$

où

$$K_{t_0,t_1,p}(u_0,u_1) = \inf\{\int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - p(t,u(t)))dt,\ u \in C^1,\ u(t_0) = u_0,\ u(t_1) = u_1\}$$

Ce principe de moindre action "dual", qui implique la variable dual "p" au lieu de la variable "primale" ξ (selon un vocabulaire qui sera expliqué plus loin), est remarquable car la fonctionnelle $\mathbb{K}$ est inconditionnellement concave en p ! Il nous inspirera, dans la sous-section 3.5, la considération d'un problème voisin mais beaucoup plus simple (suivant le principe "qui peut le plus peut le moins"), à savoir la maximisation de la fonctionnelle

$$\phi \to \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \rho_0(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}|y - x|^2 - \phi(x) \right) \rho_1(y) dy$$

qui nous permettra d'aborder, dans la sous-section 3.5 une équation elliptique très fameuse en géométrie (riemannienne et kählerienne) et "complètement non-linéaire", l'équation de Monge-Ampère (réelle)

$$\rho_1(x + \nabla\phi(x)) \det(\mathbb{I}_d + D^2\phi(x)) = \rho_0(x),$$

qui a permis à Minkowski, il y a un peu plus d'un siècle, de montrer qu'on pouvait reconstruire des hypersurfaces convexes par la seule connaissance de leur courbure gaussienne. On utilisera pour cela une technique assez élémentaire d'analyse convexe, dérivée de la théorie de Monge-Kantorovich du "transport optimal" -dans laquelle se sont illustrés deux médailles Fields récentes (Villani 2010 et Figalli 2018). En un certain sens, l'équation de Monge-Ampère (réelle) se révèle comme la fille de celles d'Euler (comme celles de Poisson, de la chaleur, des ondes, comme on l'a vu dès le chapitre un), confirmant le génie du mathématicien suisse.

3.2. **Le principe de moindre action "individuel".**

Théorème 3.1. *Soit D la clôture d'un ouvert borné convexe lisse de $\mathbb{R}^d$ et soit $[0,T]$ un intervalle de temps borné. Soit p une fonction lisse sur le compact $[0,T]\times D$. Soit une solution u de classe C^2 de l'EDO d'ordre deux (3.1), prenant ses valeurs dans D. Alors, pour tout sous-intervalle $[t_0,t_1]\subset[0,T]$ tel que*

$$(t_1-t_0)^2\sum_{i,j=1}^d \partial^2_{x_ix_j}p(t,x)y_iy_j<\pi^2|y|^2,\quad \forall t\in[t_0,t_1],\ \forall x\in D,\ \forall y\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\},$$

on a, pour toute courbe C^1, $t\in[t_0,t_1]\to\tilde u(t)\in D$, différente de u,

$$J_{t_0,t_1,p}[\tilde u]\ >\ J_{t_0,t_1,p}[u]$$

où J est la fonctionnelle (3.4), i.e.

$$J_{t_0,t_1,p}[u]=\int_{t_0}^{t_1}(\frac{1}{2}|u'(t)|^2-p(t,u(t)))dt.$$

La preuve découle aisément de l'inégalité de Poincaré unidimensionnelle (qu'on peut facilement prouver par décomposition de Fourier en série de *sinus*).

Lemme 3.2. *Soit $t_0<t_1$. Alors pour toute courbe C^1*

$$[t_0,t_1]\to z(t)\in\mathbb{R}^d,$$

telle que $z(t_0)=z(t_1)=0$

$$\pi^2\int_{t_0}^{t_1}|z(t)|^2dt\le(t_1-t_0)^2\int_{t_0}^{t_1}|z'(t)|^2dt.$$

Preuve du Théorème. Comme p est lisse, il y a une constante $K=K(p)\ge 0$ telle que

$$p(t,\tilde u(t))\le p(t,u(t))+\nabla p(t,u(t))\cdot(\tilde u(t)-u(t))+\frac{1}{2}K(p)|\tilde u(t)-u(t)|^2.$$

Puisque D est convexe, on peut poser

$$K(p)=\sup_{|y|=1}\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial^2p(t,x)}{\partial x^i\partial x^j}y_iy_j.$$

Par inégalité de Poincaré, on a

$$\int_{t_0}^{t_1}|\tilde u(t)-u(t)|^2dt\le\frac{(t_1-t_0)^2}{\pi^2}\int_{t_0}^{t_1}|\tilde u'(t)-u'(t)|^2dt,$$

puisque $\tilde u(t_j)=u(t_j)$ pour $j=0,1$. Donc

$$\int_{t_0}^{t_1}[p(t,\tilde u(t))-p(t,u(t))-\nabla p(t,u(t))\cdot(\tilde u(t)-u(t))]dt\le\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}|\tilde u'(t)-u'(t)|^2dt,$$

tant que t_1-t_0 est assez petit de sorte que

$$\frac{(t_1-t_0)^2}{\pi^2}K(p)\le 1. \tag{3.5}$$

Comme u est solution de (3.1) on a

$$u''(t)=-(\nabla p)(t,u(t)).$$

Donc, en intégrant par partie,

$$\int_{t_0}^{t_1} [p(t,\tilde{u}(t)) - p(t,u(t)) - u'(t)\cdot(\tilde{u}'(t)-u'(t))]dt \le \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}|\tilde{u}'(t)-u'(t)|^2 dt,$$

d'où

$$\int_{t_0}^{t_1} [-p(t,u(t)) + \frac{1}{2}|u'(t)|^2]dt \le \int_{t_0}^{t_1} [-p(t,\tilde{u}(t)) + \frac{1}{2}|\tilde{u}'(t)|^2]dt,$$

ce qui finit la preuve (le cas d'égalité étant laissé en exercice).

3.3. **Le principe de moindre action "collectif".**

Théorème 3.3. *Soit une solution "généralisée" (ξ, p) des équations d'Euler au sens de (3.2,3.3), i.e.*

$$\partial^2_{tt}\xi^t_0 = -(\nabla p)(t,\xi^t_0(x)),$$

$$\int_D \phi(t,\xi^t_0(x))dx = \int_D \phi(x)dx, \quad \forall\phi\in C^0(\mathbb{R}^d), \quad \forall t.$$

Alors pour tout intervalle de temps $[t_0,t_1]$ suffisamment petit au sens de (3.5) (avec les notations de la sous-section 3.2), et pour toute application $(t,x)\in[t_0,t_1]\times D \to \eta^t(x)\in\mathbb{R}^d$ de carré sommable, conservant D et son élément de volume au sens

$$\int_D \phi(t,\eta^t(x))dx = \int_D \phi(x)dx, \quad \forall\phi\in C^0(\mathbb{R}^d), \quad \forall t\in[t_0,t_1],$$

telle que

$$\eta^{t_0} = \xi^{t_0}_0, \quad \eta^{t_1} = \xi^{t_1}_0,$$

et différent de ξ_0, on a

$$\mathbb{J}_{t_0,t_1}[\eta] > \mathbb{J}_{t_0,t_1}[\xi_0]$$

où

$$\mathbb{J}_{t_0,t_1}[\eta] = \int_{t_0}^{t_1}\int_D \frac{1}{2}|\partial_t\eta^t(x)|^2 dxdt.$$

Preuve du Théorème. La démonstration découle immédiatement du Théorème 3.3. En effet, pour chaque $x\in D$ fixé, on a, en posant $u(t)=\xi^t_0(x)$ et $\tilde{u}(t)=\eta^t(x)$,

$$\int_{t_0}^{t_1} [-p(t,u(t)) + \frac{1}{2}|u'(t)|^2]dt \le \int_{t_0}^{t_1} [-p(t,\tilde{u}(t)) + \frac{1}{2}|\tilde{u}'(t)|^2]dt,$$

et donc

$$\int_{t_0}^{t_1} [-p(t,\xi^t_0(x))) + \frac{1}{2}|\partial_t\xi^t_0(x)|^2]dt \le \int_{t_0}^{t_1} [-p(t,\eta^t(x))) + \frac{1}{2}|\partial_t\eta^t(x)|^2]dt.$$

En intégrant en x et en prenant en compte la conservation des volumes par à la fois ξ_0 et η, on trouve l'inégalité (large) voulue :

$$\int_D\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}|\partial_t\xi^t_0(x)|^2 dtdx \le \int_D\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}|\partial_t\eta^t(x)|^2 dtdx$$

(et on laisse le cas d'égalité en exercice).

3.4. **Le principe de moindre action "dual".**

Théorème 3.4. *Soit une solution "généralisée" (ξ, p) des équations d'Euler au sens de (3.2,3.3). Alors pour tout intervalle de temps $[t_0, t_1]$ suffisamment petit au sens de (3.5) (avec les notations de la sous-section 3.2), le champ de pression p maximise la fonctionnelle*

$$\mathbb{K}_{t_0,t_1}[p] = \int_{t_0}^{t_1} \int_D p(t,x)dxdt + \int_D K_{t_0,t_1,p}(\xi_0^{t_0}(x), \xi_0^{t_1}(x))dx.$$

où

$$K_{t_0,t_1,p}(u_0,u_1) = \inf\{\int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - p(t,u(t)))dt,\ u \in C^1,\ u(t_0) = u_0,\ u(t_1) = u_1\}.$$

Preuve du Théorème. Soit $\tilde{p}$ un "compétiteur" pour p. Par définition de

$$K_{t_0,t_1,\tilde{p}}(u_0,u_1) = \inf\{\int_{t_0}^{t_1} (\frac{1}{2}|u'(t)|^2 - \tilde{p}(t,u(t)))dt,\ u \in C^1,\ u(t_0) = u_0,\ u(t_1) = u_1\},$$

on a, pour tout $x \in D$ fixé,

$$K_{t_0,t_1,\tilde{p}}\left(\xi_0^{t_0}(x), \xi_0^{t_1}(x)\right) \leq \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}|\partial_t \xi_0^t(x)|^2 - \tilde{p}(t, \xi_0^t(x))\right) dt.$$

En intégrant en $x \in D$ cette relation on obtient aussitôt

$$\begin{aligned}\int_D K_{t_0,t_1,\tilde{p}}\left(\xi_0^{t_0}(x), \xi_0^{t_1}(x)\right) dx &\leq \int_D \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}|\partial_t \xi_0^t(x)|^2 - \tilde{p}(t, \xi_0^t(x))\right) dtdx \\ &= \int_D \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}|\partial_t \xi_0^t(x)|^2 - \tilde{p}(t, x))\right) dtdx\end{aligned}$$

(en utilisant que ξ_0 conserve les volumes). Pour p on obtient, pour chaque $x \in D$, l'égalité (et non plus l'inégalité)

$$K_{t_0,t_1,p}\left(\xi_0^{t_0}(x), \xi_0^{t_1}(x)\right) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}|\partial_t \xi_0^t(x)|^2 - p(t, \xi_0^t(x))\right) dt$$

(grâce au Théorème 3.1, en utilisant l'hypothèse (3.5) de petitesse de l'intervalle $[t_0, t_1]$) et donc, en intégrant en x,

$$\int_D K_{t_0,t_1,p}\left(\xi_0^{t_0}(x), \xi_0^{t_1}(x)\right) dx = \int_D \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}|\partial_t \xi_0^t(x)|^2 - p(t, x))\right) dtdx.$$

En soustrayant l'égalité portant sur p de l'inégalité portant sur $\tilde{p}$, on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1} \int_D \tilde{p}(t,x)dxdt + \int_D K_{t_0,t_1,\tilde{p}}(\xi_0^{t_0}(x), \xi_0^{t_1}(x))dx \\ &\leq \int_{t_0}^{t_1} \int_D p(t,x)dxdt + \int_D K_{t_0,t_1,p}(\xi_0^{t_0}(x), \xi_0^{t_1}(x))dx,\end{aligned}$$

i.e. le résultat voulu, à savoir :

$$\mathbb{K}_{t_0,t_1}[\tilde{p}] \leq \mathbb{K}_{t_0,t_1}[p].$$

Ainsi on a montré que le champ de pression p satisfait un principe de maximisation qu'on peut considérer comme "dual" du principe de minimisation que satisfait ξ_0 au travers du Théorème 3.3. L'avantage de ce nouveau problème est qu'il s'agit, étant donnés un intervalle $[t_0, t_1]$ et deux transformations $\xi_0^{t_0}$ et $\xi_0^{t_1}$ conservant D et son volume, d'un problème de maximisation *concave* en p alors que pour ξ_0 le problème correspondant de minimisation n'est pas convexe à cause de la contrainte de conservation des volumes qui n'est pas du tout convexe ! De plus, on observe que le problème en p n'implique aucune dérivée partielle contrairement au problème en ξ_0 où figure ∂_t. La résolution du problème en p a été achevée (en un certain sens) dans la thèse d'Alessio Figalli (sous la direction jointe de Luigi Ambrosio et Cédric Villani) en 2007. Comme cela dépasse le cadre de ce cours, on n'ira pas plus loin dans cette direction. En revanche, on abordera, dans la sous-section 3.5, la résolution du problème de maximisation concave, de structure voisine mais nettement plus simple, de la fonctionnelle

$$\phi \to \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\rho_0(x)dx + \int_{\mathbb{R}^d} \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}|y-x|^2 - \phi(x)\right)\rho_1(y)dy$$

où les fonctions ρ_0 et ρ_1, positives, à support compact et d'intégrale de Lebesgue égale à 1, sont données sur $\mathbb{R}^d$. Il nous permettra (comme on l'a déjà indiqué dans l'introduction de ce chapitre) d'aborder l'équation de Monge-Ampère (réelle) mentionnée plus haut :

$$\rho_1(x + \nabla\phi(x))\det(\mathbb{I}_d + D^2\phi(x)) = \rho_0(x).$$

On observera encore que la fonctionnelle à maximiser est bien concave et ne comporte aucune dérivée partielle, alors que l'EDP en jeu est particulièrement non-linéaire avec des non-linéarités portant (au moins quand $d > 1$) sur les dérivées partielles de plus haut degré, à savoir

$$D^2\phi(x) = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^j}(t,x), \quad i,j = 1,\cdots,d\right).$$

On parle dans ce cas d'EDP totalement (ou complètement) non-linéaire ("fully nonlinear" en anglais). Notons le fort contraste avec la classe d'EDP vue plus haut

$$-\Delta u(y) = P(y, u(y))$$

qu'on qualifie de "semi-linéaires" (les dérivées de plus haut degré y figurant linéairement) et qui correspond, comme déjà indiqué, à la minimisation de la fonctionnelle

$$u \to \int_U (\frac{1}{2}|\nabla u(y)|^2 - p(y,u(y)))dy,$$

où $P(y,v) = \partial_v p(y,v)$ et où interviennent les dérivées partielles de u.

3.5. **Equation de Monge-Ampère réelle par minimisation convexe.** On va maintenant résoudre une équation elliptique "totalement" non-linéaire, en un sens généralisé qui nous garantira à la fois l'existence et l'unicité de solutions, cela par une méthode d'optimisation convexe très simple.

Théorème 3.5. *Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0. Soient deux mesures de probabilité boréliennes sur B, μ_0 et μ_1. On suppose que μ_0 est a.c. par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e. $\mu_0(dx) = \rho_0(x)dx$ avec $\rho_0 \geq 0$ dans $L^1(B)$ d'intégrale 1. Alors, il existe une unique application borélienne T envoyant μ_0 sur μ_1 qui s'écrive $T(x) = \nabla a(x)$, $\rho_0(x)dx$ presque partout, pour une fonction convexe Lipschitzienne a sur B.*

On peut dire qu'on ainsi résolu, en un sens généralisé, dans le cas où $\mu_1(dy) = \rho_1(y)dy$ avec $\rho_1 \in L^1(B)$, l'équation de Monge-Ampère (réelle)

$$\rho_1(\nabla a(x))\det(D^2 a(x)) = \rho_0(x),$$

avec a convexe Lipschitzienne sur B. En effet, en supposant que le changement de variable $x \in B \to y = \nabla a(x) \in B$, $dy = \det(D^2 a(x))dx$ est valide, on a, pour tout $u \in C^0(B)$,

$$\int_B u(y)\rho_1(y)dy = \int_B u(\nabla a(x))\rho_1(\nabla a(x))\det(D^2 a(x))dx = \int_B u(\nabla a(x))\rho_0(x)dx,$$

ce qui dit bien que $x \to \nabla a(x)$ envoie $\rho_0(x)dx$ sur $\rho_1(y)dy$ quand l'équation de MA est satisfaite.
Comme on va le voir, la démonstration du théorème 3.5 passe par la résolution du problème d'optimisation (dit de Monge-Kantorovich)

$$\inf\{\int_B a(x)\mu_0(dx) + \int_B b(y)\mu_1(dy), \quad (a,b) \in C^0(B) \times C^0(B)\},$$

sous contrainte $a(x) + b(y) \geq x \cdot y$, $\forall x, y \in B$. Ainsi on va résoudre une EDP totalement non-linéaire à l'aide d'un "programme linéaire" où ne figure aucune dérivée partielle !

Preuve du Théorème 3.5. La preuve n'utilise que deux théorèmes assez classiques d'analyse : celui de dualité convexe de Fenchel-Rockafellar (qu'on trouve dans le livre d'analyse fonctionnelle de Brezis, au premier chapitre, comme corollaire du théorème de Hahn-Banach) et celui de Rademacher montrant la différentiabilité presque partout des fonctions Lipschitz continues.

On introduit l'espace de Banach

$$\mathcal{W} = C^0(B \times B)$$

équipé de la norme du sup et on se donne une fonction continue c sur $B \times B$. (Plus tard, on particularisera $c(x,y) = x \cdot y$.) On introduit aussi les fonctions convexes sur $\mathcal{W}$, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, respectivement définies pour chaque $w \in \mathcal{W}$ par :

$$\Phi(w) = 0, \text{ si } w \geq c, \;\; +\infty \text{ sinon},$$

$$\Psi(w) = \int_B a(x)\mu_0(dx) + \int_B b(y)\mu_1(dy) \text{ si } w = a \oplus b,$$

pour des fonctions continues a et b sur B, et $+\infty$ autrement. [Notons que Ψ est défini sans ambigüité car μ_0 et μ_1 ont même masse.] Observons qu'il y a au moins un point $w \in \mathcal{W}$ où Φ est continue et Ψ bornée. [Prendre par exemple pour w la fonction constante égale à 1 plus le sup de c sur $B \times B$.] Comme Φ et Ψ sont convexes, cela suffit pour appliquer le théorème de Fenchel-Rockafellar (comme énoncé dans le livre de Brezis d'anayse fonctionnelle, par exemple). Il nous dit que

$$\inf\{\Phi(w) + \Psi(w), \; w \in \mathcal{W}\} = \max\{-\Phi^*(-\mu) - \Psi^*(\mu), \; \mu \in \mathcal{W}'\}$$

où $\mathcal{W}'$ est le Banach dual $\mathcal{W}$, i.e. celui des mesures de Borel μ bornées sur $B \times B$ (par le théorème de Riesz), et où Φ^*, Ψ^* sont les transformées de Legendre-Fenchel de Φ et Ψ, i.e.

$$\Phi^*(\mu) = \sup\{< \mu, w > -\Phi(w), \;\; w \in \mathcal{W}\}$$

$$\Psi^*(\mu) = \sup\{< \mu, w > -\Psi(w), \;\; w \in \mathcal{W}\},$$

où le "crochet de dualité" est ici défini par :

$$< \mu, w >= \int_{B\times B} w(x,y)\mu(dx,dy), \;\; \forall w \in \mathcal{W}, \;\; \forall \mu \in \mathcal{W}'.$$

La notation "max" est utilisée à dessein pour indiquer que le sup est atteint dans le second membre (alors que ce n'est pas forcément le cas de l'inf du côté gauche).

Remarque "culturelle" : Le lecteur "averti" pourra reconnaitre dans le théorème de Fenchel-Rockafellar l'équivalent $(\max, +)$ de celui de Plancherel en analyse de Fourier, la transformation de Legendre-Fenchel se substituant à celle de Fourier par la même occasion. Notons que le passage de $(+, \times)$ à $(\max, +)$ correspond aussi à celui de la géométrie algébrique à la géométrie "tropicale" !

Calculons maintenant Φ^* et Ψ^*. On obtient d'abord $\Phi^*(-\mu) = +\infty$, sauf si $\mu \geq 0$, auquel cas

$$\Phi^*(-\mu) = -\int_{B\times B} c(x,y)\mu(dx,dy).$$

Ensuite $\Psi^*(\mu) = +\infty$, sauf si les deux projections de μ sont respectivement μ_0 et μ_1, auquel cas $\Psi^*(\mu) = 0$. Ainsi on a obtenu qu'il existe $\mu_{\rm opt} \geq 0$, de projections μ_0 et μ_1 qui maximise $\int_{B\times B} c(x,y)\mu(dx,dy)$ parmi toutes les mesures de Borel positives sur $B \times B$ dont les deux projections sont respectivement μ_0 et μ_1. On a aussi la relation de dualité :

$$\int_{B\times B} c(x,y)\mu_{\rm opt}(dx,dy) = \inf\{\int_B a(x)\mu_0(dx) + \int_B b(y)\mu_1(dy), \quad a \oplus b \geq c\}.$$

A priori cet inf n'est pas atteint. Considérons pourtant une suite minimisante (a_n, b_n). Assez miraculeusement, on peut construire une nouvelle suite minimisante $(\tilde{a}_n, \tilde{b}_n)$. encore plus performante, juste en posant

$$\tilde{b}_n(y) = \sup_{x\in B} c(x,y) - a_n(x),$$

$$\tilde{a}_n(x) = \sup_{y\in B} c(x,y) - \tilde{b}_n(y).$$

(En effet on a $\tilde{b}_n \leq b_n$, $\tilde{a}_n \leq a_n$ et $\tilde{a}_n \oplus \tilde{b}_n \geq c$.) Cette nouvelle suite est uniformément équicontinue sur B (sachant que c est continue sur $B \times B$ qui est compact). On la note de nouveau (a_n, b_n) pour alléger l'écriture. Comme on peut ajouter une constante arbitraire à a_n et retrancher la même de b_n, on peut supposer que les $\tilde{a}_n$ et les $\tilde{b}_n$ sont uniformément bornées sur B. (En effet, on peut ajuster a_n se sorte que le sup de $x \to c(x,0) - a_n(x)$ sur B est égal à 0, ce qui assure que $a_n \geq \inf c$ et $\tilde{b}_n(0) = 0$. Il s'ensuit que les $|\tilde{b}_n|$ sont uniformément bornées par une constante R, puisqu'uniformément équicontinues. Par définition, les $\tilde{a}_n$ sont bornées supérieurement par $R + \sup c$ et inférieurement par $\inf c$.) On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli (sous sa forme la plus simple) pour s'assurer que (a_n, b_n) converge uniformément vers une limite (a, b) sur B. On peut même s'assurer que

$$a(x) = \sup_{y\in B} c(x,y) - b(y)$$

(suivant le procédé déjà utilisé). On voit tout de suite que (a,b) minimise la fonctionnelle (qui est clairement continue sur $C(B)\times C(B)$)

$$(a,b)\to\int_B a(x)\mu_0(dx)+\int_B b(y)\mu_1(dy)$$

parmi les couples (a,b) tels que $a\oplus b\geq c$. On a donc

$$\int_{B\times B} c(x,y)\mu_{\rm opt}(dx,dy)=\int_B a(x)\mu_0(dx)+\int_B b(y)\mu_1(dy),$$

d'où l'on déduit

$$\int_{B\times B}(a(x)+b(y)-c(x,y))\mu_{\rm opt}(dx,dy)=0,$$

puisque μ_0 et μ_1 sont les deux projections de $\mu_{\rm opt}$. Comme $\mu_{\rm opt}$ est une mesure positive, cela impose

$$a(x)+b(y)=c(x,y)$$

pour $\mu_{\rm opt}-$presque tous x,y dans B.

Supposons dorénavant que $c(x,y)=x\cdot y$ et que μ_0 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et s'écrit donc

$$\mu_0(dx)=\rho_0(x)dx,$$

pour une fonction Lebesgue intégrable $\rho_0\geq 0$ sur B, d'intégrale 1. On a ainsi

$$a(x)=\sup_{y\in B}\quad x\cdot y-b(y)$$

ce qui montre que a est à la fois Lipschitz et convexe sur B. Le théorème de Rademacher nous dit qu'une fonction Lipschitzienne sur B est différentiable Lebesgue presque partout à l'intérieur de B. Sachant que B est lisse, sa frontière est de mesure de Lebesgue nulle. On voit donc que l'ensemble des points x de B qui sont soit au bord de B soit à l'intérieur de B et où a n'est pas différentiable est de mesure de Lebesque nulle et donc, puisque μ_0 est supposée a.c. par rapport à Lebesgue, aussi de μ_0-mesure nulle. Comme $\mu_{\rm opt}$ admet μ_0 pour projection, on déduit que, pour $\mu_{\rm opt}$ presque tout couple $(x^*,y^*)\in B\times B$, x^* est à l'intérieur de B et a est différentiable en x^*. On peut en plus supposer que

$$a(x^*)+b(y^*)=x^*\cdot y^*,$$

puisque, comme on l'a vu, cette propriété est vraie $\mu_{\rm opt}$ presque partout. Comme on a

$$a(x)+b(y^*)\geq x\cdot y^*$$

pour tout $x\in B$, on en tire que x^* est un point de minimum de la fonction $x\to a(x)-x\cdot y^*$. Donc, en différentiant, on obtient que

$$\nabla a(x^*)=y^*.$$

Cette propriété est donc vraie $\mu_{\rm opt}$ presque partout ce qui implique

$$\mu_{\rm opt}(dx,dy)=\delta(y-\nabla a(x))\rho_0(x)dx,$$

au sens précis que

$$\int_{B\times B} w(x,y)\mu_{\rm opt}(dx,dy)=\int_B w(x,\nabla a(x))\rho_0(x)dx,\quad \forall w\in C(B\times B).$$

(Notons, en passant, que cela implique l'unicité de la solution optimale μ_{opt}.) Par projection (i.e. en prenant $w(x,y) = u(y)$) , on en déduit

$$\int_B u(y)\mu_1(dy) = \int_B u(\nabla a(x))\rho_0(x)dx, \quad \forall u \in C(B),$$

ce qui nous dit exactement que $x \to \nabla a(x)$ envoie la mesure $\rho_0(x)dx$ sur la mesure $\mu_1(dy)$. Comme a est Lipschitz et convexe, on a montré la partie d'existence du théorème 3.5.

Reste à montrer l'unicité. Pour cela, soit $\tilde{a}$ une fonction convexe Lipschitzienne telle que $x \to y = \nabla\tilde{a}(x)$ envoie $\rho_0(dx)$ sur $\mu_1(dy)$ et posons

$$\tilde{b}(y) = \sup_{x\in B} \; x \cdot y - \tilde{a}(x), \quad y \in B.$$

Montrons d'abord que

$$\tilde{a}(x) + \tilde{b}(\nabla\tilde{a}(x)) = x \cdot \nabla\tilde{a}(x)$$

est vraie pour Lebesgue presque tout $x \in B$. [En effet, notons d'abord que presque tout $x^* \in B$ est un point intérieur de B et de différentiabilité pour $\tilde{a}$ (par Rademacher). Posons $y^* = \nabla\tilde{a}(x^*)$. Observons que y^* est à valeur dans B, puisque $\nabla\tilde{a}$ envoie $\rho(x)dx$ sur $\mu_1(dy)$ et que ses deux mesures ont leur support dans B (qui est fermé). La fonction $x \in B \to x \cdot y^* - \tilde{a}(x)$ est Lipschitz concave sur B, dérivable en $x = x^*$ qui est à l'intérieur de B, et de dérivée nulle. Elle y atteint donc son maximum, qui est, par définition $\tilde{b}(y^*)$. On a donc $\tilde{b}(y^*) = x^* \cdot y^* - \tilde{a}(x^*)$. Comme $y^* = \nabla\tilde{a}(x^*)$, on a obtenu le résultat voulu.]
Posons maintenant

$$\mu(dx, dy) = \delta(y - \nabla\tilde{a}(x))\rho_0(x)dx.$$

On a donc

$$\int_{B\times B} x \cdot y\mu(dx, dy) = \int_B x \cdot \nabla\tilde{a}(x)\rho_0(x)dx$$

$$= \int_B (\tilde{a}(x) + \tilde{b}(\nabla\tilde{a}(x))\rho_0(x)dx = \int_{B\times B} (\tilde{a}(x) + \tilde{b}(y))\mu(dx, dy)$$

$$= \int_{B\times B} (\tilde{a}(x) + \tilde{b}(y))\mu_{\text{opt}}(dx, dy)$$

(puisque μ_{opt} et μ ont les mêmes projections)

$$\geq \int_{B\times B} x \cdot y\mu_{\text{opt}}(dx, dy)$$

(puisque $\tilde{a}(x) + \tilde{b}(y) \geq x \cdot y$). Donc μ est aussi optimale que μ_{opt} et, comme on l'a vu, cette dernière est unique solution optimale. On a donc, par définition de μ :

$$\delta(y - \nabla\tilde{a}(x))\rho_0(x)dx = \mu(dx, dy) = \mu_{\text{opt}}(dx, dy) = \delta(y - \nabla a(x))\rho_0(x)dx,$$

et ceci n'est évidemment possible que si $\nabla\tilde{a}(x) = \nabla a(x)$ pour $\rho_0(x)dx$ presque tout x. On a ainsi obtenu l'unicité dans le théorème 3.5.

3.6. **Equations elliptiques linéaires et semi-linéaires par minimisation.** Dans ce paragraphe on va voir l'application de méthodes d'optimisation (non convexe !) pour résoudre quelques exemples de problèmes elliptiques de difficulté croissante.

Meilleure constante de Poincaré et spectre du Laplacien. Etant donné un ouvert borné U de $\mathbb{R}^d$, on considère le problème

$$\lambda = \inf\{\int_U |\nabla u(x)|^2 dx, \quad u \in C_c^\infty(U), \text{ t.q. } \int_U |u(x)|^2 dx = 1.\ \}$$

Cette constante est la constante optimale de l'inégalité de Poincaré (que nous avons déjà vue dans le cas $d = 1$). Elle est strictement positive. En effet, à rotation et translation près, on peut, sans modifier la valeur de λ, supposer que l'adhérence de U est incluse dans le cube $Q = [0, L]^d$, où L est le diamètre de U. Toute fonction $u \in C_c^\infty(U)$ peut alors être prolongée dans Q par zéro au delà de U et on peut donc la décomposer en série de sinus sous la forme

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} A_k \sin(\pi k_1 x_1/L) \cdots \sin(\pi k_d x_d/L),$$

d'où l'on tire

$$\int_Q |\nabla u(x)|^2 dx \geq \pi^2 d/L^2 \int_Q |u(x)|^2 dx.$$

et donc $\lambda \geq \pi^2 d/L^2$.

Considérons une suite minimisante u_n. Elle a (à extraction de sous-suite près) une limite faible u dans l'espace de Hilbert, noté $H_0^1(U)$ (ou $W_0^{1,2}(U)$) et appelé espace de Sobolev, obtenu par complétion de $C_c^\infty(U)$ pour la norme

$$u \to \left(\int_U \left(|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Cette espace s'injecte de façon compacte dans $L^2(U)$. On est donc certain que la norme L^2 de la limite u reste égale à 1. Il est alors facile de conclure que u est solution du problème de minimisation dans l'espace complété $H_0^1(U)$. Notons que u est forcément solution, au sens des distributions dans U, de l'EDP

$$-\Delta u = \lambda\ u.$$

On peut la voir comme première fonction propre de l'opérateur $-\Delta$ (avec "conditions de Dirichlet homogène" au bord de U), $\lambda > 0$ étant la plus petite valeur propre. La minoration $\lambda > \pi^2 d/L^2$donne un premier indice (très grossier) des liens profonds entre la géométrie de U et la théorie spectrale de $-\Delta$ (avec en arrière-plan la théorie du "chaos quantique").

Meilleure constante de Sobolev. On note

$$I(U, p, q) = \inf\{\int_U |\nabla u(x)|^p dx, \quad u \in C_c^\infty(U), \text{ t.q. } \int_U |u(x)|^q dx = 1\ \}$$

où $p, q \in]1, +\infty[$ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On voit facilement, en effectuant des changements de variable linéaires du type $x \to rx + a$ avec $r > 0$ et $a \in \mathbb{R}^d$ sur les fonctions $u \in C_c^\infty(U)$, que :

i) dans le cas $U = \mathbb{R}^d$, $I(U,p,q) = 0$ sauf si $1 - d/p = 0 - d/q$;
ii) dans le cas où U est borné (et où on utilise uniquement des rétractions avec $r > 1$) $I(U,p,q) = 0$ sauf si

$$1 - d/p \geq 0 - d/q.$$

(Retenons l'indice $1 - d/p$ qui signifie "une dérivée dans L^p en d dimensions d'espace". Il permet de comparer les espaces de Sobolev entre eux.) Dans le cas U borné avec exposant "sous-critique", i.e. $1 - d/p > 0 - d/q$, on peut assez facilement généraliser la méthode utilisée pour la meilleure constante de Poincaré, en utilisant qu'une suite u_n telle que

$$\sup_n \int_U |\nabla u_n(x)|^p dx < +\infty$$

admet une sous-suite fortement convergente dans $L^q(U)$. On déduit au moins l'existence d'une solution généralisée optimale, cela dans l'espace de Sobolev obtenu par complétion de $C_c^\infty(D)$ pour la norme

$$u \to ||u||_{L^q(U)} + ||\nabla u||_{L^p(U)}.$$

Il est aussi assez facile de voir qu'une telle solution vérifie forcément au sens des distributions dans U l'équation :

$$-\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \mu u|u|^{q-2}$$

où la constante μ (souvent appele "valeur propre non-linéaire") est à ajuster pour assurer la normalisation $||u||_{L^q(U)} = 1$. En particulier, dans le cas le plus utile $p = 2$, on trouve l'équation semi-linéaire

$$-\Delta u = \mu u|u|^{q-2}.$$

Dans le cas "critique" $1 - d/p = 0 - d/q$, il est encore facile de voir que $I(U,p,q)$ ne dépend pas de U! Plus subtilement (et cela fera l'objet d'un TD), lorsque U est borné, il n'y a pas de solution optimale, même dans l'espace complété. On peut même montrer que les suites minimisantes u_n ont la curieuse propriété, à extraction de sous-suite près, de se concentrer au sens qu'il existe un point x_∞ de U telle que $|u_n|^q$ converge au sens des mesures de Borel vers la masse de Dirac au point x_∞. C'est le fameux phénomène de "concentration", ou encore de "formation de bulles", si fréquent en analyse géométrique (y compris dans la résolution de la conjecture de Poincaré par Perelman). Pour un résultat positif, on va donc se concentrer sur le seul cas $U = \mathbb{R}^d$ et montrer

Théorème 3.6. *Dans le cas critique* $1 - d/p = 0 - d/q$,

$$I(\mathbb{R}^d, p, q) = \inf\{\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^p dx, \quad u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \ \text{t.q.} \ \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^q dx = 1 \ \}$$

est atteint, par une unique solution u (modulo translations et dilatations), dans le Banach E, complété de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *pour la norme*

$$||u||_E = ||u||_{L^q(\mathbb{R}^d)} + ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Du même coup, l'équation

$$-\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \mu u|u|^{q-2}$$

est résolue sur $\mathbb{R}^d$ *dans l'espace E, la constante* μ *étant à ajuster de sorte que*

$$||u||_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 1.$$

Il y a plusieurs preuves possibles, en particulier par la méthode de P.-L. Lions, dite de "concentration-compacité" (dont on verra un aperçu en TD) des années 1990. Une preuve étonnamment simple (à condition de négliger certains aspects techniques, comme on va le faire!) découle directement du théorème 3.5 sur la résolution de l'équation de Monge-Ampère. Elle a été publiée par Cordero-Erausquin, Nazaret et Villani en 2002. L'idée de base est de considérer, pour deux fonctions u et v dans $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que $||u||_{L^q(\mathbb{R}^d)} = ||v||_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 1$, les deux mesures boréliennes de probabilités

$$F(x)dx = |u(x)|^q dx, \quad G(y)dy = |v(y)|^q dy.$$

Comme on l'a vu plus haut, on peut construire une unique application borélienne T qui transporte la première mesure vers la seconde et s'écrive, pour $F(x)dx$ presque tout x,

$$T(x) = \nabla\Phi(x),$$

où Φ est convexe Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$. De plus, en un sens généralisé, Φ est solution de l'équation de Monge-Ampère

$$G(\nabla\phi(x))\det(D^2\Phi(x)) = F(x).$$

On va simplement évaluer l'intégrale

$$J = \int_{\mathbb{R}^d} G(y)^{1-1/d} dy$$

et, assez magiquement, tout va découler (existence, unicité et formule explicite pour les solutions du problème de la meilleure constante de Sobolev) quasi-automatiquement de deux inégalités très élémentaires. Celle de Young

$$\frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{p'}}{p'} \geq a \cdot b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d, \quad 1/p' + 1/p = 1, \quad p \in]1, \infty[$$

(avec égalité si et seulement si $b = a|a|^{p-2}$ ou $a = b|b|^{p'-2}$) et celle qui dit que, pour toute suite finie de réels positifs, la moyenne géométrique est toujours inférieure à la moyenne arithmétique avec égalité si et seulement si les dits réels sont tous égaux.

Par construction de $T = \nabla\Phi$, on a d'abord

$$J = \int_{\mathbb{R}^d} G(y)^{1-1/d} dy = \int_{\mathbb{R}^d} G(\nabla\Phi(x))^{-1/d} F(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \det(D^2\Phi(x))^{1/d} F(x)^{1-1/d} dx.$$

(Ici la preuve mériterait d'être précisée car l'équation de M.-A. n'est pas a priori satisfaite au sens classique. On passera ici sur ce point passablement technique qui utilise la notion de solution au sens d'Alexandrov.) C'est maintenant qu'intervient l'inégalité de la moyenne géométrique, sachant que la convexité de Φ assure (au moins formellement) que les valeurs propres de $D^2\Phi$ sont réelles et positives (au sens large), ce qui nous donne, ponctuellement,

$$\det(D^2\Phi(x))^{1/d} \leq 1/d \, \Delta\Phi(x).$$

On en tire $J \leq \tilde{J}$ où

$$\tilde{J} = 1/d \int_{\mathbb{R}^d} \Delta\Phi(x) F(x)^{1-1/d} dx$$
$$= -1/d \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\Phi(x) \cdot \nabla(F(x)^{1-1/d}) dx$$

(par intégration par partie)

$$= -s/d \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\Phi(x) \cdot u(x)|u(x)|^{s-2} \nabla u(x) dx$$

(en posant $s = (1-1/d)q$ et par définition de $F = |u|^q$)

$$\leq s/d ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{(s-1)p'} |\nabla\Phi(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'}$$

(par Young-Hölder, avec $1/p' = 1 - 1/p$)

$$= s/d ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x) |\nabla\Phi(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'},$$

(notant que $(s-1)p' = q$ et sachant que $F = |u|^q$)

$$= s/d ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |y|^{p'} G(y) dy \right)^{1/p'},$$

(puisque $G(y)dy$ est l'image par $T = \nabla\Phi$ de $F(x)dx$). Ainsi, on a obtenu que, pour tous u et v de norme 1 dans L^q,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |v(y)|^s dy \leq s/d ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v(y)|^q |y|^{p'} \right)^{1/p'}$$

avec $s = (1-1/d)q$ et ceci s'étend à u et v pris dans le Banach complété E. Notons de plus que cette inégalité devient égalité si et seulement si l'inégalité géométrique et celle de Hölder sont toutes deux saturées. On trouve alors (à la suite d'un calcul un peu laborieux) une constante $r > 0$ et un point x_0 tels que $T(x) = (x - x_0)r$, $u(x) = r^{-d} v((x - x_0)r)$ et, enfin, $u(x) = (\mu + |x - x_0|^\alpha)^\beta \nu$ pour des constantes α, β, μ, ν à ajuster en fonction de p et d via q et s (en fait $\alpha = p'$ et $\beta = 1 - d/p = -d/q$). [Observons que, concernant u et v, on est bien sorti de l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour se retrouver dans le complété E.]

Ceci se traduit donc par la remarquable relation suivante, de dualité entre deux problèmes d'optimisation *non convexes* (pas question, a priori, d'appliquer ici le théorème de dualité convexe de Fenchel-Rockafellar!),

$$\max_{v \in S_1(L^q)} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} |v(y)|^s dy}{\left(\int_{\mathbb{R}^d} |v(y)|^q |y|^{p'} dy \right)^{1/p'}} = s/d \min_{u \in S_1(L^q)} ||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \ s = (1-1/d)q, \ 1 - d/p = -d/q,$$

où $S_1(L^q)$ note la sphère unité de L^q intersectée avec E. L'existence, l'unicité (modulo translations et dilatations) de solutions (dans le Banach complété E) au problème de la meilleure constante de Sobolev, et leur forme explicite, ne sont en fait que des corollaires de cette relation de dualité non-convexe.

CNRS, DMA-ENS, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France
E-mail address: yann.brenier@ens.fr