

# CHAPITRE 5. DU PARABOLIQUE À L'HYPERBOLIQUE

YANN BRENIER

## 1. CHAPITRE INTRODUCTIF

### 2. RÉOLUTION DES EDP DE TRANSPORT LINÉAIRES

### 3. MÉTHODES D'OPTIMISATION POUR LES EDP ELLIPTIQUES

### 4. DU PARABOLIQUE À L'HYPERBOLIQUE

**4.1. Le semi-groupe de la chaleur.** On introduit le "semi-groupe de la chaleur" sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$

$$(S_\epsilon(t)v)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\pi|y|^2)v(x + \sqrt{2\pi\epsilon t}y)dy, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Rappelons que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\pi|y|^2)dy = 1$$

et  $S_\epsilon(t)$  s'interprète donc, pour chaque  $t \geq 0$  et  $\epsilon > 0$ , (comme un opérateur de "moyenne locale" autour de chaque point  $x$ . Il est facile de voir que cet opérateur linéaire est bien défini sur tous les espaces  $L^p(\mathbb{R}^d)$ , pour  $p \in [1, +\infty]$  et, avec un peu de calcul, qu'il est contractant au sens large

$$\|S_\epsilon(t)v\|_{L^p} \leq \|v\|_{L^p}, \quad \forall t, s \geq 0.$$

(On pourra utiliser l'inégalité de Jensen pour le vérifier. Noter les cas  $p = 1$  et  $p = +\infty$  qui sont particulièrement simples.) On parle de semi-groupe car on peut vérifier, en utilisant le fait que les fonctions gaussiennes sont stables par convolution, que :

$$S_\epsilon(0) = I_d, \quad S_\epsilon(t+s) = S_\epsilon(t) \circ S_\epsilon(s), \quad \forall t, s \geq 0.$$

(Il ne s'agit en revanche pas d'un groupe et  $S(t)$  n'est pas défini pour  $t < 0$ ). Enfin, on parle de "chaleur", car on peut calculer que  $u(t, x) = (S_\epsilon(t)v)(x)$ , qui est de classe  $C^\infty$  en  $(t, x) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}^d$ , est solution, au sens classique, de l'équation de la chaleur  $\partial_t u = \epsilon \Delta u / 2$ , avec, pour "donnée initiale"  $u(0, \cdot) = v$ , puisque  $S(0) = I_d$ .

[Notons qu'on obtient une formule analogue pour l'équation de Schrödinger

$$\partial_t u = -\frac{\epsilon}{2i} \Delta u$$

(qui a des propriétés très différentes de celle de la chaleur) en posant

$$(\mathfrak{S}_\epsilon(t)v)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\pi|y|^2)v(x + \sqrt{2\pi\epsilon t}y)dy, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

ce qui représente une intégrale oscillante à valeurs complexes et définit alors  $t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{S}_\epsilon(t)$  comme un groupe d'isométries de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .]

**4.2. Lien (rapide !) avec le mouvement brownien.** Fixons  $T > 0$ . Par la propriété de semi-groupe, on a pour tout  $N \geq 1$

$$S_\epsilon(T) = S_\epsilon(T/N)^N$$

ce qui permet d'écrire

$$(S_\epsilon(T)v)(x) = \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \exp(-\pi \sum_{k=1}^N |y_k|^2) v \left( x + \sum_{k=1}^N y_k \sqrt{\frac{2\pi\epsilon T}{N}} \right) dy_1 \cdots dy_N,$$

ce qu'on peut interpréter comme l'espérance de la valeur de  $v$  au point atteint après une marche aléatoire, partie de  $x$ , faite de  $N$  pas indépendants  $y_k$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $k = 1, \dots, N$ , de loi gaussienne centrée,  $\epsilon$  mesurant le niveau du bruit.

[On peut d'ailleurs étudier le passage à la limite  $N \rightarrow \infty$  ce qui est une façon de définir le mouvement brownien et la mesure de Wiener, puis finalement d'écrire la solution  $u(T, x)$  de l'équation de la chaleur comme espérance de  $v$  évaluée au bout d'une trajectoire brownienne issue de  $x$  au temps 0 et parvenue au temps  $T$ .]

### 4.3. Transformation de Hopf, lemme de Laplace et équation d'Hamilton-Jacobi.

Le semi-groupe  $S_\epsilon$  conserve manifestement la positivité, et, de façon un tout petit peu moins évidente, vérifie  $u_\epsilon(t, x) = (S_\epsilon(t)v)(x) > 0$ , dès que  $t > 0$  et à condition que  $v \geq 0$  ne soit pas presque partout nulle. Il est alors pertinent d'écrire  $u_\epsilon$  sous la forme exponentielle suivante

$$u_\epsilon(t, x) = \exp\left(-\frac{\phi_\epsilon(t, x)}{\epsilon}\right).$$

De

$$\partial_t u_\epsilon = \epsilon \Delta u_\epsilon / 2,$$

on tire assez facilement que

$$\partial_t \phi_\epsilon + \frac{1}{2} |\nabla \phi_\epsilon|^2 = \epsilon \Delta \phi_\epsilon / 2.$$

[En effet

$$\epsilon du_\epsilon / u_\epsilon = \epsilon d(\log u_\epsilon) = -d\phi_\epsilon$$

d'où

$$\begin{aligned} \epsilon \partial_t u_\epsilon &= -u_\epsilon \partial_t \phi_\epsilon, \\ \epsilon \nabla u_\epsilon &= -u_\epsilon \nabla \phi_\epsilon, \\ \epsilon \Delta u_\epsilon &= \epsilon^{-1} u_\epsilon |\nabla \phi_\epsilon|^2 - u_\epsilon \Delta \phi_\epsilon, \end{aligned}$$

et finalement

$$0 = -\epsilon \partial_t u_\epsilon + \epsilon^2 \Delta u_\epsilon / 2 = u_\epsilon |\nabla \phi_\epsilon|^2 / 2 - \epsilon u_\epsilon \Delta \phi_\epsilon / 2 + u_\epsilon \partial_t \phi_\epsilon,$$

comme prévu, en divisant par  $u_\epsilon$ .]

Cela nous donne espoir de résoudre l'équation complètement non-linéaire, dite d'Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0,$$

en passant à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  !

C'est ce qu'on appelle parfois la limite de "viscosité évanescence" qui nous permet de résoudre une équation "du premier ordre" comme limite d'une équation parabolique "du deuxième ordre" (en espace). Cette idée a été poursuivie par E. Hopf en 1950, dans le cas d'une variable d'espace. Notons que, pour  $\epsilon > 0$ , le gradient de  $\phi_\epsilon$ ,  $B = \nabla \phi_\epsilon$  est solution du système du deuxième ordre "quasi-linéaire":

$$\partial_t B + \nabla \left( \frac{|B|^2}{2} \right) = \epsilon \Delta B / 2,$$

qui s'appelle habituellement équation de Burgers en dimension 1 ( $d = 1$ )

$$\partial_t B + \partial_x (B^2 / 2) = \epsilon (\partial_x)^2 B / 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Il semblerait qu'il faudrait plutôt l'appeler équation de...Bateman !) Essayons maintenant de passer à la limite dans la formule donnant explicitement

$$u_\epsilon(t, x) = \exp\left(-\frac{\phi_\epsilon(t, x)}{\epsilon}\right)$$

comme solution de l'équation de la chaleur, à savoir, comme on l'a vu plus haut,

$$u_\epsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\pi|y|^2) v(x + \sqrt{2\pi\epsilon t} y) dy, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

On fait dépendre la donnée initiale de  $\epsilon$  et on l'écrit sous la forme :

$$v(x) = v_\epsilon(x) = \exp\left(-\frac{\psi(x)}{\epsilon}\right)$$

de sorte que  $\psi(x)$ , qui elle ne dépend pas de  $\epsilon$ , s'interprète comme la donnée initiale de  $\phi_\epsilon(t, x)$  et on suppose  $\psi$  uniformément continue. On suppose aussi  $\psi$  indépendante de  $\epsilon$  et de plus que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|\psi(x)|}{1 + |x|^2} = 0.$$

On a donc

$$u_\epsilon(t, x) = (2\pi\epsilon t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{|\xi - x|^2}{2\epsilon t}\right) v_\epsilon(\xi) d\xi$$

(en effectuant le changement de variable  $y \rightarrow \xi = x + \sqrt{2\pi\epsilon t} y$ )

$$= (2\pi\epsilon t)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{\epsilon} \left( \frac{|\xi - x|^2}{2t} + \psi(\xi) \right)\right) d\xi.$$

Comme

$$u_\epsilon(t, x) = \exp\left(-\frac{\phi_\epsilon(t, x)}{\epsilon}\right),$$

on a

$$\phi_\epsilon(t, x) = -\epsilon \log u_\epsilon(t, x) = \log(2\pi\epsilon t) \epsilon d/2 - \epsilon \log \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(\xi; t, x)\right) d\xi,$$

où

$$F(\xi; t, x) = -\frac{|\xi - x|^2}{2t} - \psi(\xi).$$

C'est alors qu'on utilise le fameux "lemme de Laplace" (qui est au départ de la théorie des "grandes déviations" en théorie des probabilités):

**Lemme 4.1.** *Soit  $A$  un ensemble Lebesgue mesurable non négligeable dans  $\mathbb{R}^d$  et une fonction  $F$  Lebesgue mesurable, telle que*

$$0 < \int_A \exp(F(\xi)) d\xi < +\infty$$

alors, lorsque  $\epsilon \downarrow 0$ ,

$$\epsilon \log \left( \int_A \exp\left(\frac{F(\xi)}{\epsilon}\right) d\xi \right) \rightarrow \sup \text{ess}_A F.$$

**Preuve.** On prend d'abord  $\epsilon$  sous la forme

$$\epsilon = \frac{1}{1+R}$$

de sorte que

$$I = \int_A \exp\left(\frac{F(\xi)}{\epsilon}\right) d\xi = \int_A \exp(F(\xi)) \exp(RF(\xi)) d\xi.$$

On note  $L$  le sup essentiel de  $F$  sur  $A$  et

$$J = \int_A \exp(F(\xi)) d\xi.$$

On a  $J > 0$  et  $J < +\infty$  par hypothèse. Le log de  $J$  est donc fini.

On commence par la majoration évidente

$$I \leq \exp(RL) \int_A \exp(F(\xi)) d\xi$$

et donc

$$\epsilon \log I = \frac{1}{R+1} \log I \leq \frac{1}{R+1} (RL + \log J) \rightarrow L, \quad \epsilon \downarrow 0.$$

Pour la minoration de  $I$ , on considère  $\lambda < L$ , quelconque. Par définition de  $L$  comme sup essentiel de  $F$  sur  $A$ , on peut trouver un sous ensemble mesurable  $B$  de  $A$  de mesure de Lebesgue positive tel que  $F(\xi) \geq \lambda$  pour tout  $\xi \in B$ . On a forcément

$$K = \int_B \exp(F(\xi)) d\xi \in ]0, +\infty[.$$

[En effet  $K$  est plus petit que  $I$  et donc fini. Par ailleurs,  $K \geq \exp(\lambda) \int_B d\xi > 0$ .] On a donc

$$I \geq \int_B \exp(F(\xi)) \exp(RF(\xi)) d\xi \geq \exp(R\lambda) \int_B \exp(F(\xi)) d\xi = \exp(R\lambda) K$$

et donc

$$\epsilon \log I = \frac{1}{R+1} \log I \geq \frac{1}{R+1} (R\lambda + \log K) \rightarrow \lambda, \quad \epsilon \downarrow 0.$$

Comme  $\lambda$  peut être choisi arbitrairement proche de  $L$ , le lemme est démontré.

**Fin de la preuve.** Appliquons maintenant le lemme de Laplace, pour tout  $t > 0$  et tout  $x$  fixés, à la solution  $\phi_\epsilon(t, x)$  de l'équation de Hamilton-Jacobi "parabolisée"

$$\partial_t \phi_\epsilon + \frac{1}{2} |\nabla \phi_\epsilon|^2 = \epsilon \Delta \phi_\epsilon / 2$$

avec donnée initiale  $\phi_\epsilon(0, \cdot) = \psi$ , qui ne dépend pas de  $\epsilon$ . On rappelle que

$$\phi_\epsilon(t, x) = \log(2\pi\epsilon t)^{d/2} - \epsilon \log \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{1}{\epsilon} F(\xi; t, x)\right) d\xi,$$

où

$$F(\xi; t, x) = -\frac{|\xi - x|^2}{2t} - \psi(\xi).$$

Comme on a supposé

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \frac{|\psi(\xi)|}{1 + |\xi|^2} = 0,$$

les hypothèses du lemme sont satisfaites en posant  $A = \mathbb{R}^d$  et  $F(\xi) = F(\xi; t, x)$  (avec abus de notation,  $(t, x)$  étant fixé). On obtient donc, à la limite,

$$\phi(t, x) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi - x|^2}{2t} + \psi(\xi)$$

ce qui fournit une formule naturelle, dite de Hopf (ou Hopf-Cole), pour la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0.$$

[On aurait pu deviner cette formule par le raisonnement fallacieux, quoiqu'instructif, suivant: on écrit l'équation sous la forme

$$\sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left( \partial_t \phi + w \cdot \nabla \phi - \frac{|w|^2}{2} \right) = 0$$

(jusqu'ici rien d'incorrect) et on fait le pari (a priori injustifié) que

$$\phi(t, x) = \inf_{w \in \mathbb{R}^d} \Phi(t, x; w)$$

où la fonction "génératrice"  $\Phi$  est solution de l'équation linéaire sous-jacente, à coefficient constant en  $(t, x)$ ,  $w \in \mathbb{R}^d$  étant vu comme un paramètre,

$$\partial_t \Phi + w \cdot \nabla \Phi - \frac{|w|^2}{2} = 0,$$

avec comme donnée initiale  $\Phi(0, x; w) = \psi(x)$ . On trouve (quasi) immédiatement

$$\Phi(t, x; w) = \Phi(0, x - tw, w) + t \frac{|w|^2}{2} = \psi(x - tw) + t \frac{|w|^2}{2},$$

ce qui nous donnerait

$$\phi(t, x) = \inf_{w \in \mathbb{R}^d} \psi(x - tw) + t \frac{|w|^2}{2} = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi - x|^2}{2t} + \psi(\xi),$$

ce qui est bien la formule de Hopf. Bien qu'injustifié, ce raisonnement permet pourtant de deviner ou de retrouver rapidement le résultat !]

On parle naturellement de "solution de viscosité" (sous-entendu : "évanescence"). Notons que la solution fournie par la formule de Hopf est de régularité limitée quand  $t$  grandit, à moins que  $\psi$  soit convexe et lisse. En effet, dans le cas contraire, dès que  $t$  devient assez grand, pour  $x$  fixé, l'inf peut être atteint en plusieurs points  $\xi$  distincts, ce qui ruine la régularité de  $\phi$  en  $(t, x)$ , quelle que soit la régularité de  $\psi$ . On a là une propriété très caractéristique des équations d'évolution du premier ordre, la perte de régularité en temps fini de leurs solutions, ce qui rend leur étude particulièrement ardue.

**4.4. La théorie de Crandall-Evans-Lions des solutions de viscosité.** Il est tentant d'aller au delà de la formule assez miraculeuse de Hopf pour traiter des équations non-linéaires plus générales, typiquement,

$$\partial_t \phi + H(t, x, \nabla \phi) = 0.$$

voire

$$\partial_t \phi + H(t, x, \nabla \phi, D^2 \phi) = 0,$$

en supposant que la fonction  $(t, x, w, M) \rightarrow H(t, x, w, M) \in \mathbb{R}$

i) soit suffisamment lisse par rapport à toutes les variables (respectivement  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $w \in \mathbb{R}^d$  et  $M$  dans l'ensemble des matrices symétriques  $d \times d$ );

ii) admette des bornes du type

$$|H(t, x, w, M)| \leq C(1 + |w|^\alpha + |M|^\beta)$$

pour des constantes  $C, \alpha, \beta$  convenables,

iii) soit monotone décroissante par rapport à la dernière variable

(au sens que  $H(t, x, w, M) \leq H(t, x, w, \tilde{M})$  dès que  $\tilde{M} - M$  est une matrice symétrique positive au sens large).

C'est tout l'objet de la théorie initiée par Crandall, Evans et Lions (P.-L.) au début des années 1980, sous le nom de théorie des "solutions de viscosité", d'abord dans le cas des équations du premier ordre de type Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \phi + H(t, x, \nabla \phi) = 0.$$

Une solution de viscosité  $\phi$ , supposée a priori seulement continue (voire Lipschitz mais en tous cas pas  $C^1$ ), y est définie d'une façon particulièrement originale et ingénieuse. On se donne une fonction test  $\zeta(t, x)$  et on considère n'importe quel point  $(t_0, x_0)$  où  $\phi - \zeta$  atteint son minimum (ou, plus généralement, un minimum local). Si  $\phi$  était aussi lisse que  $\zeta$ , on déduirait donc que

$$\partial_t \phi(t_0, x_0) = \partial_t \zeta(t_0, x_0), \quad \nabla \phi(t_0, x_0) = \nabla \zeta(t_0, x_0),$$

ce qui nous suggère de remplacer, au point  $(t_0, x_0)$ , les dérivées de  $\phi$  (qui sont typiquement mal ou pas définies) par celles de  $\zeta$ . Ainsi on demandera que

$$\partial_t \zeta(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, \nabla \zeta(t_0, x_0)) \geq 0.$$

Pour les points de maximum, on demandera l'inégalité dans l'autre sens :

$$\partial_t \zeta(t_0, x_0) + H(t_0, x_0, \nabla \zeta(t_0, x_0)) \leq 0.$$

[Avec un peu d'imagination, on verra là une sorte de version (max, +) des formulations faibles au sens des distributions !]

Il est très remarquable que cette théorie, contrairement à celle des distributions, ne fait pas appel à la théorie de l'intégration de Lebesgue et aux espaces  $L^p$ , mais seulement à celle des fonctions continues. Elle aurait pu donc être découverte bien avant Lebesgue, mais il a fallu attendre les années 1980 pour qu'elle apparaisse (ce qui fournit un thème de réflexion sur la chronologie d'éventuelles mathématiques extra-terrestres:-).

**4.5. La formule de Feynman-Kac, le principe de moindre action et la programmation dynamique.** On sait (probablement depuis Euler!) que, pour des matrices carrées  $m \times m$   $A$  et  $B$  on a

$$\exp(t(A + B)) = \lim_{N \uparrow \infty} (\exp(tA/N) \exp(tB/N))^N, \quad \forall t \geq 0.$$

On va étendre (formellement) cette formule (dite de Lie-Trotter) aux deux opérateurs linéaires en dimension infinie:

i) le semi groupe de la chaleur (qu'on a introduit au début du chapitre)

$$S_\epsilon(t) = \exp(\epsilon t \Delta / 2)$$

(avec une notation symbolique très parlante)

ii) l'opérateur de multiplication (plus trivial)  $T_\epsilon(t) = \exp(t\Phi/\epsilon)$  défini par :

$$(T_\epsilon(t)v)(x) = v(x) \exp(t\Phi(x)/\epsilon),$$

où la fonction  $\Phi : x \in \mathbb{R}^d \rightarrow \Phi(x) \in \mathbb{R}$  (appelée "potentiel") est donnée (avec des hypothèses convenables de régularité et de comportement à l'infini qu'on ne précisera pas ici). En appliquant, formellement, la formule de Lie-Trotter, on trouve

$$\exp(t(\epsilon\Delta/2 + \Phi/\epsilon)) = \lim_{N \uparrow \infty} (S_\epsilon(t/N)T_\epsilon(t/N))^N,$$

ce qui s'interprète en disant que l'équation parabolique

$$\partial_t u = (\epsilon\Delta/2 + \Phi/\epsilon)u = \epsilon\Delta u/2 + u\Phi/\epsilon$$

admet comme solution  $u = u(t, x)$ , de donnée initiale  $u_0$ ,

$$u(t, x) = \lim_{N \uparrow \infty} ((S_\epsilon(t/N)T_\epsilon(t/N))^N u_0)(x).$$

(En fait, cette formule se justifie complètement avec un peu d'analyse fonctionnelle).

Plus explicitement, on voit que

$$\begin{aligned} (S_\epsilon(t/N)T_\epsilon(t/N)v)(x) &= (2\pi\epsilon t/N)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\frac{t\Phi(x_0)}{\epsilon N} - N\frac{|x-x_0|^2}{2\epsilon t}\right)v(x_0)dx_0 \\ &= (2\pi\epsilon t/N)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\epsilon^{-1}t/N \left(\Phi(x_0) - \frac{1}{2}\left|\frac{x-x_0}{t/N}\right|^2\right)\right)v(x_0)dx_0 \end{aligned}$$

et donc, itérativement,

$$\begin{aligned} &\forall t \geq 0, \quad \forall x_N \in \mathbb{R}^d, \quad (S_\epsilon(t/N)T_\epsilon(t/N))^N v(x_N) \\ &= (2\pi\epsilon t/N)^{-Nd/2} \int_{(\mathbb{R}^d)^N} \exp\left(\epsilon^{-1}\frac{t}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\Phi(x_k) - \frac{1}{2}\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{t/N}\right|^2\right)\right)v(x_0)dx_0 \cdots dx_{N-1}. \end{aligned}$$

On a envie de passer à la limite  $N \uparrow \infty$  et de conjecturer que l'équation

$$\partial_t u = \epsilon \Delta u / 2 + u \Phi / \epsilon,$$

avec donnée initiale  $u_0$ , admet pour solution :

$$u(t, x) = \int_{\Omega_{t,x}} \exp(\epsilon^{-1} \int_0^t \left( \Phi(\xi_s) - \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi_s}{ds} \right|^2 \right) ds) u_0(\xi_0) d\xi$$

où  $\Omega_{x,t} \subset (\mathbb{R}^d)^{[0,t]}$  serait l'ensemble des chemins  $s \in [0, t] \rightarrow \xi_s \in \mathbb{R}^d$  tels que  $\xi_t = x$  et " $d\xi$ " serait une sorte de mesure de Lebesgue sur cet ensemble ! C'est la fameuse formule de Feynman-Kac, qui, telle quelle, n'a pas de sens (vu l'impossibilité avérée de construire la mesure de Lebesgue sur le produit infini  $(\mathbb{R}^d)^{[0,t]}$ ), et il faut en fait introduire la mesure de Wiener, associée au mouvement brownien, pour la rendre rigoureuse (ce qui dépasse le cadre de ce cours).

[En fait l'idée de cette formule remonte à la thèse de Feynman où l'équation de Schrödinger

$$i\epsilon \partial_t u = (-\epsilon^2 \Delta / 2 + \Phi) u$$

est "résolue" par la célèbre formule "de Feynman"

$$u(t, x) = \int_{\Omega_{t,x}} \exp(-i\epsilon^{-1} \int_0^t \left( \Phi(\xi_s) - \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi_s}{ds} \right|^2 \right) ds) u_0(\xi_0) d\xi$$

qui ne peut en aucun cas être justifiée dans le cadre de la théorie de la mesure usuelle, contrairement à celle de Feynman-Kac, pour laquelle la mesure de Wiener suffit. Elle est néanmoins le point de départ d'une part essentielle de la physique théorique moderne : QED, modèle standard, théorie des cordes, etc...]

Une application, tout à fait formelle et injustifiée à ce stade, du lemme de Laplace à la formule de Feynman-Kac permet même de conjecturer que, dans la limite  $\epsilon \downarrow 0$ , on trouve pour l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \phi + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \Phi = 0,$$

la solution suivante, avec donnée initiale  $\phi_0$ ,

$$\phi(t, x) = \inf_{\xi \in \Omega_{t,x}} \phi_0(\xi_0) + \int_0^t \left( \frac{1}{2} \left| \frac{d\xi_s}{ds} \right|^2 - \Phi(\xi_s) \right) ds,$$

dite "formule de programmation dynamique" qui peut complètement se justifier dans le cadre des solutions de viscosité à la Crandall-Evans-Lions, mais, là encore, cela dépasse les limites de ce cours. En fait la formule reste valable quand le potentiel  $\Phi$  dépend aussi de la variable  $t$  et on rapprochera ce résultat du principe de moindre action évoqué dans un précédent chapitre.