CHAPITRE 5. SYSTÈMES ENTROPIQUES DE LOIS DE CONSERVATION

YANN BRENIER

1. Chapitre introductif

2. Résolution des EDP de transport linéaires

3. Méthodes d'optimisation pour les EDP elliptiques

4. Du parabolique à l'hyperbolique

5. Systèmes de lois de conservation entropiques

Nous avons vu qu'une reformulation possible (mais pas forcément la plus pertinente) de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 = 0$$

était donnée par un système de "lois de conservation" du premier ordre, vérifié par la champ de vecteur $B = \nabla \phi$, à savoir

$$\partial_t B + \nabla(\frac{|B|^2}{2}) = 0, \quad B = B(t,x) \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

qui donne la fameuse équation de Burgers dans le cas particulier $d = 1$

$$\partial_t B + \partial_x (B^2/2) = 0, \quad B = B(t,x) \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De façon plus générale, on appelle "système de lois de conservation du premier ordre tout système d'EDP de la forme

$$\partial_t U^\alpha + \partial_i (\mathcal{F}^{i\alpha}(U)) = 0, \;\; \alpha = 1, \cdots, m,$$

(avec sommation implicite sur les indices répétés) où $U = U(t,x) \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\mathcal{W}$ est un ouvert convexe lisse, et où la "fonction de flux" (c'est le nom consacré) $\mathcal{F} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^{d \times m}$ est lisse avec certaines propriétés de croissance contrôlée au bord de $\mathcal{W}$. Encore une fois, on peut remonter à Euler pour fonder la théorie, avec son équation de la dynamique des gaz, qui s'écrit, dans le cas "isotherme",

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot q = 0, \;\; \partial_t q + \nabla \cdot (\frac{q \otimes q}{\rho}) + \nabla \rho = 0$$

($\rho > 0$ et $q \in \mathbb{R}^d$ notant respectivement les champs de densité et de quantité de mouvement du gaz). On a alors

$$U = (\rho, q) \in \mathcal{W} =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(U) = (q, \frac{q \otimes q}{\rho} + \rho\, I_d).$$

On va dorénavant se limiter à la classe restreinte des "systèmes de lois de conservation avec entropie convexe", ou, plus brièvement "systèmes entropiques de lois de conservation" (SELC).

Définition 5.1. *On appelle SELC un système de lois de conservation pour lequel la fonction de flux $\mathcal{F}$ vérifie la condition de symétrie supplémentaire*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \ \ \forall \beta, \gamma \in \{1, \cdots, m\}, \ \ \partial^2_{\alpha\beta}\mathcal{E}\partial_\gamma \mathcal{F}^{i\alpha} = \partial^2_{\alpha\gamma}\mathcal{E}\partial_\beta \mathcal{F}^{i\alpha},$$

pour une certaine fonction lisse, appelée "entropie", $\mathcal{E} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$, strictement convexe au sens que $(\partial^2_{\alpha\beta}\mathcal{E})$ est une matrice définie positive en tout point de $\mathcal{W}$.

Cette propriété (a priori étrange) entraîne la "conservation de l'entropie" au sens que toute solution U, de classe C^1, du système de lois de conservation est solution de la loi de conservation supplémentaire

$$\partial_t(\mathcal{E}(U)) + \partial_i(\mathcal{Q}^i(U)) = 0,$$

où la fonction "de flux d'entropie" $\mathcal{Q} : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^d$ peut se déduire de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$.

[En effet, la condition de symétrie relativement à $\mathcal{E}$ équivaut à

$$\partial_\gamma(\partial_\alpha \mathcal{E}\partial_\beta \mathcal{F}^{i\alpha}) = \partial_\beta(\partial_\alpha \mathcal{E}\partial_\gamma \mathcal{F}^{i\alpha})$$

qui signifie que $\partial_\alpha \mathcal{E}\partial_\beta \mathcal{F}^{i\alpha}$ est le gradient d'une certaine fonction $Q^i : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$, i.e. $\partial_\alpha \mathcal{E}\partial_\beta \mathcal{F}^{i\alpha} = \partial_\beta Q^i$. Ainsi, toute solution C^1 U satisfait

$$-\partial_t(\mathcal{E}(U)) = \partial_\alpha \mathcal{E}(U)\partial_i(\mathcal{F}^{i\alpha}(U)) = \partial_\alpha \mathcal{E}(U)\partial_\beta \mathcal{F}^{i\alpha}(U)\partial_i U^\beta = \partial_\beta \mathcal{Q}^i(U)\partial_i U^\beta = \partial_i(\mathcal{Q}^i(U)),$$

ce qui est exactement la loi de conservation de l'entropie.]

Cette classe d'EDP contient de nombreux exemples issus de la mécanique des milieux continus, de la physique et de la géométrie (équations d'Euler des fluides compressibles, élastodynamique, magnétohydrodynamique, électromagnétisme, surfaces extrémales de l'espace de Minkowski, cordes classiques etc...). Comme déjà mentionné, l'exemple le plus simple est l'équation de Burgers (sans viscosité)

$$\partial_t u + \partial_x(\frac{u^2}{2}) = 0, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

où on a $\mathcal{F}(u) = u^2/2$ et pour laquelle on peut poser $\mathcal{E}(u) = u^2/2$, $\mathcal{Q}(u) = u^3/3$.

Plus générale est la classe des "lois de conservation scalaires", pour lesquelles $m = 1$ avec $\mathcal{W} = \mathbb{R}$, et, du coup, la condition de symétrie est trivialement satisfaite, pour toute fonction convexe $\mathcal{E}$, comme on pourra facilement le vérifier. Cette classe a des propriétés similaire à celle des équations d'Hamilton-Jacobi et pourra faire l'objet d'une étude plus détaillée car on en a une théorie très complète (existence de solutions globales, en un sens à préciser -on parlera de "solutions entropiques"-, unicité et stabilité dans L^1 des solutions par rapport à leurs données initiales).

Le cas des équations d'Euler est plus riche. On pourra vérifier (non sans calcul!) que, par exemple dans le cas isotherme, on a bien une entropie strictement convexe, à savoir,

$$\mathcal{E}(U) = \frac{|q|^2}{2\rho} + \rho(\log\rho - 1), \quad U = (\rho, q).$$

5.1. **Principe de moindre action et équations d'ondes.** Une sous classe des SELC peut être obtenue à partir du "principe de moindre action" appliqué, non plus à des trajectoires (voire des flots) comme on l'a vu dans des cours précédents, mais à des "champs scalaires". On se donne un "lagrangien", i.e. une fonction défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$,

$$(E, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to L(E, B) \in \mathbb{R}$$

et l'hypothèse la plus importante est que $L(E, B)$ est strictement convexe en $E \in \mathbb{R}$. Pour simplifier la discussion, on supposera L de la forme

$$L(E, B) = \sup_{D \in \mathbb{R}} DE - H(D, B)$$

où H appelée "hamiltonien" est lisse, avec une constante $r \in]0, 1]$ telle que

$$r \leq \partial_D^2 H(D, B) \leq 1/r, \quad \forall (D, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

On dira qu'une fonction ϕ ("champ scalaire") définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ satisfait le principe de moindre action relativement à L si, pour toute "perturbation" ψ dans $C_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\frac{d}{d\epsilon}_{|\epsilon=0} \int_\Omega \left(L(\partial_t \phi(t, x) + \epsilon \partial_t \psi(t, x), \nabla \phi(t, x) + \epsilon \nabla \psi(t, x)) - L(\partial_t \phi(t, x), \nabla \phi(t, x)) \right) dt dx = 0.$$

(On garde ici la terminologie de "moindre action", datant du 18ème siècle, bien qu'il s'agisse en fait de points critiques et non pas de minima.) Si ϕ est de classe C^2, cela se traduit par l'EDP d'ordre 2, qu'on peut voir comme équation d'ondes non-linéaires :

$$\partial_t((\partial_E L)(\partial_t \phi(t, x), \nabla \phi(t, x))) + \partial_i((\partial_{B_i} L)(\partial_t \phi(t, x), \nabla \phi(t, x))) = 0,$$

qui n'est pas très facile à manipuler telle quelle. L'hamiltonien H va nous permettre une écriture bien plus commode. Compte tenu des hypothèses, on a de façon élémentaire :

Lemme 5.2. *Pour chaque $B \in \mathbb{R}^d$ fixé,*

$$D \in \mathbb{R} \to \xi(D, B) = \partial_D H(D, B) \in \mathbb{R}$$

définit un difféomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ et on a les propriétés suivantes :

$$L(\xi(D, B), B) = \xi(D, B)D - H(D, B)$$

$$(\partial_E L)(\xi(D, B), B) = D, \quad (\partial_{B_i} L)(\xi(D, B), B) = -\partial_{B_i} H(D, B).$$

Ceci nous permet de réécrire l'EDP comme un système de lois de conservation, en introduisant les champs

$$(t, x) \in \Omega \to (D(t, x), B(t, x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

obtenus en posant

$$B_i(t, x) = \partial_i \phi(t, x), \quad D(t, x) = (\partial_E L)(\partial_t \phi(t, x), \nabla \phi(t, x)).$$

ce qui (par le lemme) donne

$$\partial_t \phi(t, x) = (\partial_D H)(D(t, x), B(t, x)).$$

On voit alors que l'équation du second ordre régissant le champ ϕ peut se réécrire comme système de lois de conservation pour (D, B) :

$$\partial_t B(t, x) = \partial_i \left((\partial_D H)(D(t, x), B(t, x)) \right), \quad \partial_t D(t, x) = \partial_i \left((\partial_{B_i} H)(D(t, x), B(t, x)) \right).$$

On obtient alors, pour toute solution classique ϕ,

$$\partial_t \left(H(D(t,x), B(t,x))\right) = \partial_i \left((\partial_D H)(D(t,x), B(t,x))(\partial_{B_i} H)(D(t,x), B(t,x))\right).$$

Si on suppose, de plus, que $H(D,B)$ est strictement convexe on aura finalement obtenu un SELC avec "entropie" H et "flux d'entropie"

$$\mathcal{Q}^i(D,B) = -\partial_D H(D,B)\partial_{B_i} H(D,B).$$

Evidemment, le cas le plus simple est obtenue quand

$$H(D,B) = \frac{D^2 + |B|^2}{2},$$

qui donne

$$L(E,B) = \frac{E^2 - |B|^2}{2},$$

et correspond à l'équation des ondes linéaire

$$\partial^2_{tt}\phi(t,x) = \Delta\phi(t,x)).$$

5.2. **Quelques résultats sur les systèmes entropiques de lois de conservation.** On va montrer un certain nombre de résultats généraux, dans le cas idéalisé, où on suppose, pour simplifier les preuves, quelques propriétés supplémentaires (qui ne sont pas strictement parlant satisfaites par les exemples mentionnés, comme les équations d'Euler et même celle de Burgers, mais tel est souvent le sort des théorèmes "généraux" !). Ainsi on supposera
i) $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$;
ii) Toutes les dérivées de F sont bornées;
iii) Il existe une constante $r \in]0,1]$ telle qu'en tout point de $\mathcal{W} = \mathbb{R}^m$, le spectre de la matrice $\partial^2_{\alpha\beta}\mathcal{E}$ est contenu dans $[r, 1/r]$,
et on se limitera aux solutions $U = U(t,x)$ qui sont $\mathbb{Z}^d-$périodiques en espace (autrement dit $x \in \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$).
Une première propriété, purement structurelle, est l'écriture du système entropique de lois conservation (SELC), sous forme symétrique :

Théorème 5.3. *Pour toute solution $U = U(t,x)$ du SELC, de classe C^1 sur $[0,T] \times \mathbb{T}^d$, on a le système symétrique du premier ordre,*

$$A^0_{\alpha\beta}(t,x)\partial_t U^\beta(t,x) + A^j_{\alpha\gamma}(t,x)\partial_j U^\gamma(t,x) = 0,$$

où les A^0, A^j, $j = 1, \cdots m$, sont des champs de matrices symétriques $m \times m$, définies positives dans le cas des A^0.

Cette écriture "symétrique" du SELC est importante car elle est le point de départ du résultat d'existence et d'unicité de solutions classiques en temps petit :

Théorème 5.4. *Pour toute donnée initiale U_0 dans $H^s(\mathbb{T}^d)$, avec $s - d/2 > 1$, il existe un temps $T > 0$ (qui dépend de U_0) tel que le SELC admette une unique solution $U = U(t,x)$ de classe C^1 en $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{T}^d$ de donnée initiale U_0: $U(0,\cdot) = U_0$.*

Notons que l'exposant $s - d/2 > 1$ est celui qui garantit l'injection de $H^s(\mathbb{T}^d)$ dans $C^1(\mathbb{T}^d)$. On examine ensuite le lien entre solutions classiques et solutions faibles, définies comme suit :

Définition 5.5. *On appelle solution faible du SELC de donnée initiale U_0 sur un intervalle de temps $[0,T]$ toute fonction $U \in L^2([0,T]\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^m)$ telle que*

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{T}^d} \partial_t W_\alpha U^\alpha + \partial_i W_\alpha \mathcal{F}^{i\alpha}(U) + \int_{\mathbb{T}^d} W_\alpha(0,\cdot)U_0^\alpha = 0,$$

pour toute fonction $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{T}^d \to W = W(t,x)\in\mathbb{R}^m$, de classe C^∞, telle que $W(T,\cdot)=0$.

(Le choix de l'espace L^p avec $p=2$ est circonstanciel et lié aux hypothèses "idéalisées". Dans les applications concrètes, l'exposant p peut changer.)

Théorème 5.6. *Soit U solution du SELC, de classe C^1 sur $[0,T]\times\mathbb{T}^d$ et de donnée initiale U_0. Alors U est l'unique solution faible de donnée initiale U_0, vérifiant*

$$\int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{E}(U(t,x))dx \le \int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{E}(U_0(x))dx,$$

pour presque tout $t\in[0,T]$.

Dans cet énoncé, dit "d'unicité fort-faible", la condition que l'entropie de la solution faible reste presque toujours inférieure à celle de la donnée initiale joue un rôle clé.

[En effet, la méthode dite "d'intégration convexe" (héritée de Nash et Gromov et mise au point dans le contexte des équations d'Euler, puis de certains SELC, par De Lellis et Székelyhidi il y a une dizaine d'années) montre, au moins dans certains cas emblématiques, qu'on peut générer quantité de solutions faibles pour une donnée initiale fixée ! Il faut donc un critère supplémentaire pour assurer l'unicité "fort-faible".]

Preuve du Théorème 5.3. Soit U solution du SELC, de classe C^1 sur $[0,T]\times\mathbb{T}^d$. Comme on a

$$\partial_t(\mathcal{E}_{,\alpha}(U)) = \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(U)\partial_t U^\beta = \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(U)\mathcal{F}^{j\beta}_{,\gamma}(U)\partial_j U^\gamma$$

(où on a noté les dérivées partielles par rapport à $U\in\mathbb{R}^m$ par des virgules), il suffit pour prouver le théorème de poser

$$A^0_{\alpha\beta}(t,x) = \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(U(t,x))$$

$$A^j_{\alpha\gamma}(t,x) = \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(U(t,x))\mathcal{F}^{j\beta}_{,\gamma}(U(t,x))$$

$$= \mathcal{E}_{,\gamma\beta}(U(t,x))\mathcal{F}^{j\beta}_{,\alpha}(U(t,x))$$

(par la condition de symétrie caractérisant les SELC, au côté de la convexité de $\mathcal{E}$).

Fin de la preuve.

Eléments de preuve du Théorème 5.4. Le point de départ est un résultat de stabilité dans l'espace $L^2(\mathbb{T}^d)$, et plus généralement dans les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{T}^d)$, du système LINEAIRE à coefficients variables

$$A^0_{\alpha\beta}(t,x)\partial_t U^\beta(t,x) + A^j_{\alpha\gamma}(t,x)\partial_j U^\gamma(t,x) = M_{\alpha\gamma}(t,x)U^\gamma(t,x)$$

où les M, A^0, A^j, $j = 1, \cdots m$, sont des champs DONNES de matrices $m \times m$, symétriques dans le cas des A^j et symétriques définies positives dans le cas des A^0. Une fois acquis ce résultat "linéaire", on pourra aborder le système non-linéaire où les matrices A^k dépendent de l'inconnue U via les formules (vues plus haut)

$$A^0_{\alpha\beta}(t,x) = \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(U(t,x))$$

$$A^j_{\alpha\gamma}(t,x) = \mathcal{E}_{,\gamma\beta}(U(t,x))\mathcal{F}^{j\beta}_{,\alpha}(U(t,x)),$$

par un argument de point fixe, en "contrôlant" les non-linéarités par la norme $C^1(\mathbb{T}^d)$ de U, qui est elle-même contrôlée par la norme $H^s(\mathbb{T}^d)$ de U, dès que (grâce aux "injections de Sobolev") $s - d/2 > 1$. La preuve complète étant assez technique, on se contentera d'établir la "stabilité L^2" du système linéaire à coefficients variables :

Proposition 5.7. *Supposons que $(t,x) \to A^0(t,x)$ et $(t,x) \to M(t,x)$ sont des champs donnés de matrices symétriques de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^d$. On note*

$$C = \partial_t A^0 - \partial_j A^j + M + M^T$$

et on suppose qu'il existe des constantes $r \in]0,1]$ et $\kappa \geq 0$ telles que, en tout point (t,x), le spectre de $A^0(t,x)$ et celui de $C(t,x)$ sont respectivement contenus dans $[r, 1/r]$ et $[0,\kappa]$. Alors le système linéaire d'EDP du 1er ordre

$$A^0_{\alpha\beta}(t,x)\partial_t U^\beta(t,x) + A^j_{\alpha\gamma}(t,x)\partial_j U^\gamma(t,x) = M_{\alpha\gamma}(t,x)U^\gamma(t,x)$$

génère des solutions U, stables dans l'espace $L^2(\mathbb{T}^d)$, au sens que

$$||U(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq ||U(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{T}^d)} \exp(\kappa|t-s|)/r^2, \quad \forall t,s \in \mathbb{R}.$$

En multipliant le système par U^α et en sommant en α on a, au moins formellement,

$$\partial_t \left(U^\alpha A^0_{\alpha\beta} U^\beta\right) - \partial_j \left(U^\alpha A^j_{\alpha\beta} U^\beta\right) = U^\alpha C_{\alpha\beta} U^\beta.$$

En intégrant en $x \in \mathbb{T}^d$, on obtient donc

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d} U^\alpha A^0_{\alpha\beta} U^\beta = \int_{\mathbb{T}^d} U^\alpha C_{\alpha\beta} U^\beta.$$

Comme on suppose que le spectre de C est contenu dans $[0,\kappa]$ et celui de A^0 dans $[r, 1/r]$, on déduit

$$|\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d} U^\alpha A^0_{\alpha\beta} U^\beta| \leq \kappa/r \int_{\mathbb{T}^d} U^\alpha A^0_{\alpha\beta} U^\beta$$

et donc

$$\int_{\mathbb{T}^d} U^\alpha(t,\cdot)A^0_{\alpha\beta}(t,\cdot)U^\beta(t,\cdot) \leq \exp(\kappa|t-s|/r)\int_{\mathbb{T}^d} U^\alpha(s,\cdot)A^0_{\alpha\beta}(s,\cdot)U^\beta(s,\cdot),$$

d'où finalement

$$||U(t,\cdot)||_{L^2(\mathbb{T}^d)} \leq ||U(s,\cdot)||_{L^2(\mathbb{T}^d)} \exp(\kappa|t-s|/r)/r^2, \quad \forall t,s \in \mathbb{R}.$$

N.B. On obtient (plus laborieusement) le même type d'estimation pour la norme H^s pour s entier positif et on peut, à partir de $s - d/2 > 1$ ainsi contrôler la norme C^1 de U (ce qui est crucial pour le passage au non-linéaire).

Fin de l'esquisse de preuve.

Preuve du Théorème 5.6. Soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{T}^d \to U(t,x) \in \mathbb{R}^m$ une solution faible du SELC au sens de la Definition 5.5 et soit $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{T}^d \to V(t,x) \in \mathbb{R}^m$ une fonction C^∞. On introduit les fonctions

$$\eta(u,v) = \mathcal{E}(u) - \mathcal{E}(v) - \mathcal{E},_\alpha(v)(u^\alpha - v^\alpha) \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^m,$$

$$\zeta^{i\alpha}(u,v) = \mathcal{F}^{i\alpha}(u) - \mathcal{F}^{i\alpha}(v) - \mathcal{F}^{i\alpha},_\gamma(v)(u^\gamma - v^\gamma) \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^m, \quad i \in \{1,\cdots,d\}, \quad \alpha \in \{1,\cdots,m\}.$$

Compte tenu des hypothèses sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, on a

$$r|u-v|^2 \leq \eta(u,v) \leq |u-v|^2/r, \quad |\zeta(u,v)| \leq C\eta(u,v)$$

(où C est une constante qui dépend de la norme du sup des dérivées secondes de $\mathcal{F}$) et, ainsi, la quantité

$$\int_{\mathbb{T}^d} \eta(U(t,x),V(t,x))dx$$

va nous permettre d'estimer

$$||U(t,\cdot) - V(t,\cdot)||^2_{L^2}.$$

Calculons, au sens des distributions sur $]0,T[\times\mathbb{T}^d$, $\partial_t(\eta(U,V))$, et, pour commencer,

$$\partial_t\left(\mathcal{E}(V) + \mathcal{E},_\alpha(V)(U^\alpha - V^\alpha)\right)$$

$$= \mathcal{E}_{,\alpha}(V)\partial_t V^\alpha + \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)\partial_t V^\beta(U^\alpha - V^\alpha) + \mathcal{E}_{,\alpha}(V)(-\partial_i(\mathcal{F}^{i\alpha}(U)) - \partial_t V^\alpha)$$

(en utilisant que U est solution du SELC au sens faible et donc au sens des distributions, ce qui justifie l'écriture du terme $\mathcal{E}_{,\alpha}(V)\partial_i(\mathcal{F}^{i\alpha}(U))$ au sens des distributions)

$$= \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)(R^\beta[V] - \mathcal{F}^{i\beta},_\gamma(V)\partial_i V^\gamma)(U^\alpha - V^\alpha)$$

$$-\partial_i(\mathcal{E}_{,\alpha}(V)\mathcal{F}^{i\alpha}(U)) + \mathcal{E}_{,\alpha\gamma}(V)\partial_i V^\gamma \mathcal{F}^{i\alpha}(U)$$

[où on a introduit le "résidu"

$$R^\beta[V] = \partial_t V^\beta + \partial_i(\mathcal{F}^{i\beta}(V)) = \partial_t V^\beta + \mathcal{F}^{i\beta},_\gamma(V)\partial_i V^\gamma$$

qui fait de $V \to R[V]$ un opérateur non-linéaire dont on remarque qu'il s'annule dès que V est solution C^1 du SELC, ce qu'on mettra à profit plus loin]

$$= \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)(U^\alpha - V^\alpha)R^\beta[V] - \mathcal{E}_{,\gamma\beta}(V)\mathcal{F}^{i\beta},_\alpha(V)\partial_i V^\gamma(U^\alpha - V^\alpha)$$

$$-\partial_i(\mathcal{E}_{,\alpha}(V)\mathcal{F}^{i\alpha}(U)) + \mathcal{E}_{,\beta\gamma}(V)\partial_i V^\gamma \mathcal{F}^{i\beta}(U)$$

(où on a utilisé la propriété de symétrie de $\mathcal{F}$ relativement à $\mathcal{E}$ et aussi remplacé l'indice muet α par β dans le tout dernier terme)

$$= \mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)(U^\alpha - V^\alpha)R^\beta[V] + \mathcal{E}_{,\gamma\beta}(V)\partial_i V^\gamma(\zeta^{i\beta}(U,V) + \mathcal{F}^{i\beta}(V)) - \partial_i(\mathcal{E}_{,\alpha}(V)\mathcal{F}^{i\alpha}(U))$$

(où on a utilisé la définition de ζ). Notons que, par définition de $\mathcal{Q}$,

$$\mathcal{E}_{,\gamma\beta}(V)\partial_i V^\gamma \mathcal{F}^{i\beta}(V) = \partial_i\left(\mathcal{E}_{,\beta}(V)\mathcal{F}^{i\beta}(V)\right) - \mathcal{F}^{i\beta}_{,\gamma}(V)\mathcal{E}_{,\beta}(V)\partial_i V^\gamma$$

$$= \partial_i\left(\mathcal{E}_{,\beta}(V)\mathcal{F}^{i\beta}(V) - \mathcal{Q}^i(V)\right).$$

On a ainsi obtenu, au sens des distributions sur $]0,T[\times\mathbb{T}^d$,

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\mathcal{E}(V)+\mathcal{E}_{,\alpha}(V)(U^\alpha-V^\alpha)\right)\\&=\mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)(U^\alpha-V^\alpha)R^\beta[V]+\mathcal{E}_{,\gamma\beta}(V)\partial_iV^\gamma\zeta^{i\beta}(U,V)-\partial_i\left(\mathcal{Q}^i(V)\right).\end{aligned}$$

Comme U est solution faible au sens de la définition 5.5, on peut exprimer cette équation sous forme intégrale tout en y incorporant la donnée initiale U_0. Ce faisant, on trouve en particulier, pour toute fonction test $\psi(t,x)=\chi(t)\otimes 1$ avec $\chi\in C^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $]-\infty,T[$,

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\chi'(t)\int_{\mathbb{T}^d}\left(\mathcal{E}(V)+\mathcal{E}_{,\alpha}(V)(U^\alpha-V^\alpha)\right)(t,x)dxdt\\&-\chi(0)\int_{\mathbb{T}^d}\left(\mathcal{E}(V(0,x))+\mathcal{E}_{,\alpha}(V(0,x))(U_0^\alpha(x)-V^\alpha(0,x))\right)dx\\&=\int_0^T\chi(t)\int_{\mathbb{T}^d}\left(\mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)(U^\alpha-V^\alpha)R^\beta[V]+\mathcal{E}_{,\gamma\beta}(V)\partial_iV^\gamma\zeta^{i\beta}(U,V)\right)(t,x)dxdt.\end{aligned}$$

C'est ici qu'on va incorporer le terme $\mathcal{E}(U)$ dans le membre de gauche de façon à faire apparaiitre à gauche le terme

$$\eta(U,V)=\mathcal{E}(U)-\mathcal{E}(V)-\mathcal{E}_{,\alpha}(V)(U^\alpha-V^\alpha).$$

On trouve (en changeant tous les signes)

$$\begin{aligned}-\int_0^T\chi'(t)\int_{\mathbb{T}^d}\eta(U,V)(t,x)dxdt&=-\int_0^T\chi'(t)\int_{\mathbb{T}^d}\mathcal{E}(U)(t,x)dxdt\\&-\chi(0)\int_{\mathbb{T}^d}\eta(U_0(x),V(0,x))dx+\chi(0)\int_{\mathbb{T}^d}\mathcal{E}(U_0(x))dx\\&-\int_0^T\chi(t)\int_{\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)(U^\alpha-V^\alpha)R^\beta[V](t,x)dxdt\\&-\int_0^T\chi(t)\int_{\mathbb{T}^d}\mathcal{E}_{,\gamma\beta}(V)\partial_iV^\gamma\zeta^{i\beta}(U,V)(t,x)dxdt.\end{aligned}$$

Compte tenu des hypothèses faites sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, on peut, en supposant dorénavant $\chi\geq 0$, facilement majorer le tout dernier terme par

$$c\int_0^T\chi(t)\lambda(t)\int_{\mathbb{T}^d}\eta(U,V)(t,x)dxdt,$$

où on note $\lambda(t)$ la constante de Lipschitz en $x\in\mathbb{T}^d$ de $V(t,\cdot)$ et par c une constante dépendant seulement des fonctions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. En notant temporairement

$$\theta(t)=\int_{\mathbb{T}^d}\eta(U,V)(t,x)dx,\quad h(t)=\int_{\mathbb{T}^d}\mathcal{E}(U(t,x))dx,$$

$$\theta_0=\int_{\mathbb{T}^d}\eta(U_0(x),V(0,x))dx,\quad h_0=\int_{\mathbb{T}^d}\mathcal{E}(U_0(x))dx,$$

$$\rho(t)=\int_{\mathbb{T}^d}\left(\mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)(U^\alpha-V^\alpha)R^\beta[V]\right)(t,x)dx$$

on a donc obtenu

$$-\int_0^T \chi'(t)\theta(t)dt \leq -\int_0^T \chi'(t)h(t)dt+\chi(0)(\theta_0-h_0)-\int_0^T \chi(t)\rho(t)dt+c\int_0^T \chi(t)\lambda(t)\theta(t)dt.$$

Presque tout $\tau \in [0,T[$ est un point de Lebesgue de la fonction θ et de la fonction h. En un tel point, que l'on fixe, on prend $\epsilon > 0$ assez petit pour que $\tau + \epsilon < T$ et on prend $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ de sorte que :
i) pour $t \in [-1, \tau - \epsilon]$, $\chi(t) = 1$;
ii) pour $t > \tau + \epsilon$, $\chi(t) = 0$;
iii) pour $t \in [\tau - \epsilon, \tau + \epsilon]$, $\chi(t)$ est décroissante. A la limite $\epsilon \downarrow 0$, on trouve alors

$$\theta(\tau) \leq h(\tau) + \theta_0 - h_0 - \int_0^\tau \rho(t)dt + c\int_0^\tau \lambda(t)\theta(t)dt.$$

C'est ici que nous utilisons crucialement l'hypothèse que

$$\int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{E}(U)(\tau,x)dx \leq \int_{\mathbb{T}^d} \mathcal{E}(U_0(x))dx$$

pour presque tout $\tau \in [0,T]$, i.e. $h(\tau) \leq h_0$. On en déduit, pour presque tout $\tau \in [0,T[$,

$$\theta(\tau) \leq \theta_0 - \int_0^\tau \rho(t)dt + c\int_0^\tau \lambda(t)\theta(t)dt$$

et, par le lemme de Grönwall, on a donc obtenu :

Proposition 5.8. *Pour presque tout $t \in [0,T]$,*

$$\theta(t) \leq \theta_0 \exp(c\int_0^t \lambda(s)ds) - \int_0^t \rho(s)\exp(c\int_s^t \lambda(\sigma)d\sigma)ds.$$

où $\lambda(t)$ est la constante de Lipschitz en $x \in \mathbb{T}^d$ de $V(t,\cdot)$, c une constante dépendant seulement des fonctions $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et

$$\theta(t) = \int_{\mathbb{T}^d} \eta(U,V)(t,x)dx, \quad \theta_0 = \int_{\mathbb{T}^d} \eta(U_0(x),V(0,x))dx,$$

$$\rho(t) = \int_{\mathbb{T}^d} \left(\mathcal{E}_{,\alpha\beta}(V)(U^\alpha - V^\alpha)R^\beta[V]\right)(t,x)dx.$$

Si on suppose que V est une solution lisse du SELC avec donnée initiale U_0, on a automatiquement $R[V] = 0$, puisque

$$R^\beta[V] = \partial_t V^\beta + \partial_i(\mathcal{F}^{i\beta}(V)),$$

et $\theta_0 = 0$. On a donc

$$\int_{\mathbb{T}^d} \eta(U,V)(t,x)dx = 0,$$

pour presque tout $t \in [0,T]$. Comme cette quantité domine, à une constante près, le carré de la norme L^2 de $U(t,\cdot) - V(t,\cdot)$, on en conclut que $U = V$ ce qui montre bien l'unicité de V parmi toutes les solutions faibles issues de U_0 et dont l'entropie au temps t ne dépasse pas celle de U_0, presque surement. Ceci termine la preuve du théorème 5.6.

Fin de la preuve du théorème 5.6.

5.3. **Le concept de "solutions dissipatives".**

Au cours de la démonstration du théorème 5.6, on a établi la proposition 5.8 qui nous suggère un nouveau concept de solution généralisée pour le SELC. Cette idée remonte à DiPerna dans les années 1980 et, plus explicitement, à Lions dans les années 1990 (dans le cas des équations d'Euler, en régime incompressible, ce qui sort du cadre strict des SELC -mais en est en fait juste un cas limite-). On remarque que l'inégalité énoncée dans la proposition, est *convexe* relativement à U. En effet $\eta(U,V)$ est convexe en U par définition et au second membre ne figurent que des termes linéaires en U. C'est une propriété remarquable qui fournit facilement de la "compacité faible". Plus précisément, considérons l'espace, qu'on note $C_w^0([0,T], L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^m)$ de toutes les fonctions

$$U : t \in [0,T] \to U(t,\cdot) \in L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^m)$$

qui sont continues par rapport à t relativement à la topologie faible de $L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^m)$, i.e. telles que pour toute fonction $\psi \in L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^m)$,

$$t \in [0,T] \to \int_{\mathbb{T}^d} U^\alpha(t,x)\psi_\alpha(x)dx$$

est une fonction continue.

Définition 5.9. *On dit qu'une fonction $U \in C_w^0([0,T], L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^m))$ est une solution "dissipative" (au sens de DiPerna et Lions) du SELC avec donnée initiale U_0 si elle vérifie $U(0,\cdot) = U_0$ et l'inégalité de la proposition 5.8 pour toute fonction lisse V.*

On a alors

Proposition 5.10. *Etant donné $U_0 \in L^2(\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^m)$, considérons l'ensemble des solutions dissipatives du SELC avec donnée initiale U_0. Alors :*
i) dans la mesure où il n'est pas vide, il est convexe;
ii) dès que le SELC admet une solution lisse de donnée initiale U_0, l'ensemble est un singleton et se réduit à cette solution.

Ce résultat est loin d'être satisfaisant. Néanmoins, on a deux constats intéressants :
i) il est souvent assez facile (bien que parfois passablement technique), par un procédé d'approximation bien choisi, de montrer l'existence de solutions dissipatives sur des intervalles de temps arbitrairement longs, ce qui n'est, en général, pas possible pour les solutions lisses;
ii) le concept est très utile quand on veut montrer que le SELC peut être dérivé, en un certain sens d'un autre système d'EDP plus compliqué (ou plus "fondamental") en passant à la limite sur de petits paramètres. Il y a beaucoup d'exemples de cette nature qui ont été établis dans le dernier quart de siècle. (Passages de Navier-Stokes et Boltzmann vers Euler -dans le cas incompressible- respectivement par Pierre-Louis Lions et Laure Saint-Raymond, passage d'Euler vers sa limite "hydrostatique", passage de Schrödinger -non linéaire- vers Euler, etc...etc...).

On peut aussi aller dans l'autre sens, en dérivant des équations plus simples à partir de SELC. On peut, par exemple, passer des équations d'Euler -dans le cas isotherme-vers l'équation de la chaleur, comme on l'avait montré heuristiquement dans le chapitre introductif.

5.4. **Retour à l'équation de la chaleur.**

Dans le chapitre introductif, on a expliqué (formellement) comment l'équation de la chaleur pouvait s'obtenir comme équation "asymptote" de l'équation d'Euler dans le cas compressible isotherme, au prix du changement de variable temporel $t \to t^2/2$. Plus précisément, on obtient le système "non autonome" (i.e. dépendant explicitement du temps)

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0,$$
$$2t\left[\partial_t(\rho v) + \nabla \cdot (\rho v \otimes v)\right] + \rho v + \nabla \rho = 0,$$

et l'équation de la chaleur (dans le cas de solutions positives ou nulles) est obtenue asymptotiquement en négligeant le terme linéaire en t, ce qui donne

$$\rho v + \nabla \rho = 0$$

et, donc,

$$\partial_t \rho = \Delta \rho.$$

Pour l'équation d'Euler, on a, comme entropie convexe,

$$\mathcal{E}(U) = \frac{|q|^2}{2\rho} + \rho \log \rho - \rho, \quad U = (\rho, \rho v)$$

et donc, si on se place pour simplifier sur le cube périodique $\mathbb{T}^d$, on a pour toute solution lisse

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho + \frac{|q|^2}{2\rho}) dx = 0.$$

Après le changement de variable temporel, cette conservation devient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho) dx + 2t \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|q|^2}{2\rho} dx = -\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|q|^2}{\rho} dx.$$

Asymptotiquement (en négligeant le terme linéaire en t), on retrouve la relation de "dissipation de l'entropie" bien connue pour l'équation de la chaleur,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho) dx = -\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|q|^2}{\rho} dx,$$

ou encore, puisque $q = -\nabla \rho$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho) dx = -\int_{\mathbb{T}^d} \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} dx,$$

le second membre étant souvent appelée "information de Fisher". Cette relation entre entropie, information de Fisher et équation de la chaleur (qui en définitive remonte -encore- aux équations d'Euler !) a joué un rôle important dans la "théorie du transport optimal" (évoquée dans un chapitre précédent et qui fera l'objet d'un cours FIMFA de M2 par François Bolley), en particulier dans les contributions de C. Villani.
On peut élaborer ces idées pour donner une définition originale de l'équation de la chaleur, développée par Ambrosio, Gigli et Savaré dans les 10 à 15 dernières années. On peut

retrouver leur concept sous une forme légèrement différente en raisonnant comme suit. On considère un couple (ρ, q) avec $\rho > 0$, $q = \rho v$, solution lisse (pour simplifier la discussion) de l'équation de continuité

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0,$$

qui est linéaire en $U = (\rho, q)$. On ne suppose rien d'autre pour l'instant. Calculons l'évolution de l'entropie

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho) dx = \int_{\mathbb{T}^d} \log \rho \, \partial_t \rho dx = - \int_{\mathbb{T}^d} \log \rho \nabla \cdot (\rho v) dx$$
$$= \int_{\mathbb{T}^d} \nabla \rho \cdot v dx,$$

ce qu'on peut aussi écrire

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho) dx + \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|q|^2 + |\nabla \rho|^2}{2\rho} dx = \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|q + \nabla \rho|^2}{2\rho} dx.$$

En intégrant en temps sur $[0, t]$ et notant ρ_0 la valeur initiale de ρ, on déduit

$$\int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho)(t, x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|q|^2 + |\nabla \rho|^2}{2\rho} (t', x) dx dt' =$$
$$\int_{\mathbb{T}^d} (\rho_0 \log \rho_0 - \rho_0)(x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|q + \nabla \rho|^2}{2\rho} (t', x) dx dt'.$$

C'est alors qu'on s'aperçoit que $q + \nabla \rho = 0$ [et donc $(\rho, \rho v)$ est solution de l'équation de la chaleur] si et seulement si on a l'inégalité, pour tout $t \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho)(t, x) dx + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^d} \frac{|q|^2 + |\nabla \rho|^2}{2\rho} (t', x) dx dt' \leq \int_{\mathbb{T}^d} (\rho_0 \log \rho_0 - \rho_0)(x) dx.$$

Ainsi, pour l'équation de la chaleur, écrite sous la forme

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot q = 0, \quad q = -\nabla \rho,$$

on obtient le concept suivant de solutions, au moins dans le cas des solutions $\rho \geq 0$:

Définition 5.11. *On dit que $\rho \in C^0_{w*}([0, T], C^0(\mathbb{T}^d)')$ est solution "dissipative" de donnée initiale ρ_0 si elle vérifie $\rho(0, \cdot) = \rho_0$, et s'il existe $q \in C^0([0, T] \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)'$ telle que*

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot q = 0$$

(au sens des distributions) et si elle vérifie pour tout $t \in [0, T]$, l'inégalité

$$\int_{\mathbb{T}^d} (\rho \log \rho - \rho)(t, \cdot) + \int_{[0,t] \times \mathbb{T}^d} \frac{|\nabla \rho|^2 + |q|^2}{2\rho} \leq \int_{\mathbb{T}^d} (\rho_0 \log \rho_0 - \rho_0).$$

Bien entendu, dans cette définition, il convient d'écrire plus précisément l'inégalité qui a priori n'est pas clairement définie en supposant seulement

$$\rho \in C^0_{w*}([0, T], C^0(\mathbb{T}^d)'), \quad q \in C^0([0, T] \times \mathbb{T}^d; \mathbb{R}^d)'.$$

[Notons qu'on travaille ici avec l'espace de mesures $C^0(\mathbb{T}^d)'$ plutôt qu'avec l'espace $L^2(\mathbb{T}^d)$ comme on l'a fait pour les SELC.]

Il s'agit d'abord d'écrire les fonctions convexes $\rho\log\rho-\rho$ et $q^2/(2\rho)$ comme transformées de Legendre-Fenchel. On rappelle notamment que

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} u\rho-\exp(u)$$

$$=\rho\log\rho-\rho,\quad \text{si } \rho>0,\quad 0\quad \text{si } \rho=0\ \text{ et }\ +\infty\ \text{ si } \rho<0, \text{ alors que}$$

$$\sup\{a\rho+A\cdot q\ ;\quad 2a+|A|^2\leq 0,\quad a\in\mathbb{R}, A\in\mathbb{R}^d\}$$

$$=|q|^2/(2\rho)\quad \text{si } \rho>0,\ \ 0\ , \text{si } \rho=0 \text{ et } q=0, \text{ et enfin }\ +\infty\ \text{ sinon.}$$

Ainsi on peut réécrire plus précisément l'inégalité, à l'aide de fonctions test (et d'une intégration par partie pour transformer $\nabla\rho$: exercice !). On exigera donc que, pour tout $t\in[0,T]$, pour toute fonction $u\in C^\infty(\mathbb{T}^d)$ et toute fonction lisse

$$(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{T}^d\to(a,b,A,B)(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\quad \text{t.q.}\quad 2a+|A|^2\leq 0,\quad 2b+|B|^2\leq 0,$$

on a, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\int_{\mathbb{T}^d}\big(u(x)\rho(t,dx)-e^{u(x)}dx\big)+\int_0^t\int_{\mathbb{T}^d}(a(s,x)+b(s,x)-(\nabla\cdot B)(s,x))\rho(s,dx)ds$$

$$+\int_{[0,t]\times\mathbb{T}^d}A(s,x)\cdot q(ds,dx)\leq\int_{\mathbb{T}^d}(\rho_0\log\rho_0-\rho_0),$$

ce qui est évidemment assez lourd mais est au moins clairement défini quand

$$\rho\in C^0_{w*}([0,T],C^0(\mathbb{T}^d)'),\quad q\in C^0([0,T]\times\mathbb{T}^d;\mathbb{R}^d)'.$$

Comme pour les SELC, l'existence de solutions dissipatives globales en temps $t\geq 0$ est relativement aisée à prouver (au prix, malgré tout, d'une certaine technicité). En revanche, contrairement à se qui se passe dans le cas des SELC, la définition de solution dissipative pour l'équation de la chaleur conduit assez facilement à leur unicité pour une donnée initiale ρ_0 fixée. L'idée est qu'en prenant l'inégalité sous sa forme initiale, on voit que la demi-somme de deux solutions dissipatives distinctes est encore solution dissipative, pour la même donnée initiale bien entendu. Comme l'entropie de Boltzmann $\rho\to\rho\log\rho-\rho$ est *strictement* convexe la demi-somme va vérifier l'inégalité *stricte*. Or (comme on l'a vu, au moins dans le cas où (ρ,q) est lisse) l'inégalité stricte est en fait impossible. D'où contradiction. Observons aussi que, dans la formulation dissipative, la linéarité de l'équation de la chaleur n'est pas du tout évidente. Il est bon d'observer que cette formulation peut se généraliser (à l'aide de techniques de "transport optimal", déjà mentionnées dans un chapitre précédent, au sujet de l'équation de Monge-Ampère) à des espaces métriques très généraux (bien au delà de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ et même des variétés riemanniennes), comme l'ont fait Luigi Ambrosio, Nicola Gigli et Giuseppe Savaré (cf. Inventiones 2014). Dans certains cas, l'équation de la chaleur (ainsi définie) peut même cesser d'être linéaire... de quoi faire retourner Fourier dans sa tombe ! Par ailleurs ce genre de formulation "dissipative" s'étend (avec des résultats en général plus faibles) à des équations, voire des systèmes, paraboliques non-linéaires. Citons juste un exemple qu'on peut déduire de la magnétohydrodynamique (MHD) idéale incompressible par le même changement temporel $t\to t^2/2$ qui nous a permis d'obtenir l'équation de la chaleur à partir des équations d'Euler (dans le cas compressible isotherme). La MHD idéale incompressible s'écrit

$$\partial_t v + \nabla \cdot (v \otimes v - B \otimes B) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot v = 0,$$
$$\partial_t B + \nabla \cdot (B \otimes v - v \otimes B) = 0,$$

où v, p et B sont respectivement la vitesse, la pression et le champ magnétique. Précisons qu'en coordonnées la seconde équation s'écrit :

$$\partial_t B^i + \partial_j (B^i v^j - B^j v^i) = 0.$$

Elle exprime le "transport" du champ magnétique par le champ de vitesse et s'appelle parfois équation d'induction magnétique. Pour ce système on a (au moins formellement) la conservation suivante :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d} (|B|^2 + |v|^2) dx = 0.$$

où on s'est placé pour simplifier sur le cube périodisé $\mathbb{T}^d$.
Après changement temporel, on trouve comme système asymptote :

$$\partial_t B + \nabla \cdot (B \otimes v - v \otimes B) = 0,$$
$$v = \nabla \cdot (B \otimes B) + \nabla p, \quad \nabla \cdot v = 0$$

où on peut éliminer p en prenant la divergence de la seconde équation ce qui nous donne l'équation de Poisson en p (écrite en coordonnées) :

$$-\Delta p = \partial_i \partial_j (B^i B^j).$$

On obtient (formellement) la relation de "dissipation" :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{T}^d} |B|^2 dx = 2 \int_{\mathbb{T}^d} |v|^2 dx,$$

où on s'est encore placé pour simplifier sur le cube périodisé $\mathbb{T}^d$. Ce système (dont il est n'est même pas évident d'établir la nature parabolique) peut être alors formulé de façon "dissipative" dans le même esprit que celui utilisé pour l'équation de la chaleur, mais de façon sensiblement plus complexe.

FIMFA, DMA, Ecole Normale Supérieure, FR-75005 Paris, France
E-mail address: `yann.brenier@ens.fr,`