Examen EDP du 24 janvier 2019. Notes manuscrites autorisées. Toutes les connexions internet, téléphoniques, etc... doivent être éteintes. L'heure sera régulièrement indiquée au tableau.

1. Exercice

Soit F une fonction strictement croissante et lisse (par exemple $F(v) = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$). Montrer que le système ("d'ondes non-linéaires")

$$\partial_t u = \partial_x(F(v)), \quad \partial_t v = \partial_x u,$$

où $u = u(t,x) \in \mathbb{R}$, $v = v(t,x) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, est un SELC (au sens du cours). [On montrera directement que toute solution C^1 admet une loi de conservation supplémentaire pour une entropie strictement convexe de la forme $\mathcal{E}(u,v) = G(v) + u^2/2$ et on calculera explicitement G en fonction de F, en particulier dans le cas $F(v) = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$.]

2. Problème

Etant donné un ouvert lisse et borné U de $\mathbb{R}^d$, on note $H_0^1(U)$ l'espace obtenu par complétion de $C_c^\infty(U)$ pour la norme

$$u \to ||u||_{H^1} = \sqrt{\int_U (|\nabla u(x)|^2 + u^2(x))\, dx}\ .$$

On considère le problème de minimisation

$$J_{\epsilon,min} = \inf_{u \in H_0^1(U)} J_\epsilon(u), \quad J_\epsilon(u) = \int_U (G_\epsilon(\nabla u(x)) + (u(x)-1)^2)dx,$$

où $\epsilon > 0$ est fixé et $G_\epsilon : y \in \mathbb{R}^d \to \epsilon|y|^2 + \sqrt{\epsilon + |y|^2}$.

1) Montrer que ce problème admet une unique solution u_ϵ.
2) Trouver l'EDP et les conditions aux limites satisfaites par u_ϵ.
3) Montrer que u_ϵ prend ses valeurs dans $[0,1]$
(on pourra supposer a priori $u_\epsilon \in H_0^1(U) \cap C^2(\overline{U})$ pour simplifier l'argument).
On se limite, pour la suite du problème, au cas particulier $d = 1$, $U =]0, L[$ et on suppose $\epsilon \in]0, L^2/4]$.
Pour $\sigma \in [0,1]$, on introduit

$$E_\sigma = \{u \in H_0^1(U), \quad \sup_{x \in]0,L[} u(x) = \sigma\}, \quad J_{\sigma,\epsilon,min} = \inf\{J_\epsilon(u), \quad u \in E_\sigma\}.$$

4) Montrer que pour tout $u \in E_\sigma$, $\int_0^L |u'(x)|dx \geq 2\sigma$
et en déduire que $J_{\sigma,\epsilon,min} \geq 2\sigma + (\sigma-1)^2 L$.
5) Montrer que $J_{\sigma,\epsilon,min} \leq 2\sigma + (\sigma-1)^2 L + O(\sqrt{\epsilon})$.
6) Calculer la limite de $J_{\epsilon,min}$ quand $\epsilon \downarrow 0$.
7) Deviner la limite de u_ϵ quand $\epsilon \downarrow 0$ et dire (au moins dans le cas $L \geq 1$) s'il y a convergence dans $H_0^1(]0,L[)$ (fort ou faible). Commenter sur la pertinence du problème de minimisation quand $\epsilon = 0$.

3. Exercice

Soit U un ouvert borné lisse de $\mathbb{R}^d$ et $f \geq 0$ positive. On considère le problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta^2 u &=& f & \text{dans } U \\ u = \Delta u &=& 0 & \text{sur } \partial U \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Montrer $u \geq 0$. (On pourra supposer que f, u et Δu sont dans $C^2(\overline{U})$ pour simplifier.)

4. Corrigé de l'exercice

Pour toute solution C^1 de du système ("d'ondes non-linéaires")

$$\partial_t v = \partial_x u, \quad \partial_t u = \partial_x(F(v))$$

on a, en posant

$$\mathcal{E}(v,u) = \frac{u^2}{2} + G(v),$$

$$\partial_t(\mathcal{E}(v,u)) = u\partial_t u + G'(v)\partial_t v = u\partial_x(F(v)) + G'(v)\partial_x u$$
$$= \partial_x(F(v)u),$$

à condition de prendre $G'(v) = F(v)$. Pour $F(v) = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$, $G(v) = \sqrt{1+v^2}$ convient.

5. Corrigé du problème

1) (On omet momentanément l'indice ϵ pour alléger l'écriture.) Ce problème admet une unique solution pour les raisons suivantes :
a) la fonctionnelle J est *strictement* convexe sur $H_0^1(U)$ (car G l'est sur $\mathbb{R}^d$) ;
b) elle est sci sur l'espace complété $H_0^1(U)$ (alors qu'elle ne le serait pas sur $C_c^\infty(U)$) ;
c) l'infimum J_{min} est positif ou nul (évident) et fini (il suffit de prendre $u = 0$ pour le voir) ;
d) Pour toute suite minimisante u_n, on voit que

$$\sup_n \int_U |\nabla u_n(x)|^2 < +\infty,$$

donc, par inégalité de Poincaré (cf. cours)

$$\sup_n ||u_n||_{H^1} < +\infty,$$

et il s'ensuit qu'il existe une sous-suite, encore notée u_n qui converge faiblement dans $H_0^1(U)$ vers une limite u.
Comme la fonctionnelle est convexe sci on a forcément $J(u) \leq \liminf J(u_n)$ et donc $J(u) = J_{min}$ ce qui montre que u est optimale. Comme J est strictement convexe, le minimum est forcément unique.

2) En perturbant u par $\eta\phi$, où ϕ est arbitrairement donnée dans $H_c^1(U)$, et en dérivant $J(u+\eta\phi)$ par rapport à η en $\eta = 0$, on voit que

$$\int_U (\nabla\phi(x) \cdot (\nabla G)(\nabla u(x)) + 2\phi(x)(u(x)-1))\, dx = 0,$$

ce qui est la formulation "variationnelle" de l'EDP

$$-\nabla \cdot ((\nabla G)(\nabla u)) + 2(u-1) = 0,$$

avec condition aux limites de "Dirichlet homogène" $u = 0$ sur ∂U. Comme

$$\nabla G(y) = 2\epsilon y + \frac{2y}{\sqrt{\epsilon + |y|^2}},$$

on a, plus explicitement

$$-\epsilon\Delta u - \nabla \cdot (\frac{\nabla u}{\sqrt{\epsilon + |\nabla u|^2}}) + u - 1 = 0,$$

soit, en coordonnées (et en notant les dérivées partielles avec des virgules),

$$-\epsilon u_{,kk} - \left(\frac{u_{,k}}{\sqrt{\epsilon + |\nabla u|^2}}\right)_{,k} + u - 1 = 0,$$

ou encore

$$-\epsilon u_{,kk} - \frac{((\epsilon + |\nabla u|^2)\delta_{ij} - u_{,i}u_{,j})u_{,ij}}{\sqrt{\epsilon + |\nabla u|^2}^3} + u - 1 = 0.$$

3) Si on suppose u de classe C^2 on peut appliquer le principe du maximum. Soit x_0 un point de maximum de u sur $\overline{U}$. Si $x_0 \in \partial U$, on a $u(x_0) = 0$ (car $u \in H^1_0(U)$) et tout va bien. Si x_0 est intérieur, i.e. $x_0 \in U$, on a $\nabla u(x_0) = 0$ et la matrice $u_{,ij}(x_0)$ est semi-définie négative En utilisant l'EDP et en remarquant que la matrice

$$(\epsilon + |\nabla u|^2)\delta_{ij} - u_{,i}u_{,j}$$

est toujours symétrique définie positive, on obtient

$$\frac{((\epsilon + |\nabla u|^2)\delta_{ij} - u_{,i}u_{,j})u_{,ij}}{\sqrt{\epsilon + |\nabla u|^2}^3}(x_0) \geq 0,$$

$u_{,kk}(x_0) \geq 0$ et donc $u(x_0) \leq 1$. Pour un point de minimum intérieur, on devrait avoir $u(x_0) \geq 1$ pour exactement la même raison. Comme u est nulle sur le bord de U, ce n'est pas possible. Ainsi le minimum est forcément atteint sur le bord et vaut donc 0. Finalement on a bien montré que u est à valeurs dans $[0, 1]$.

4) (Pour cette question (et les suivantes) on note explicitement la dépendance par rapport à $\epsilon \geq 0$.) Soit $u \in E_\sigma$. Comme u est dans $H^1_0(]0, L[)$, u est une fonction absolument continue (car sa dérivée est dans L^2). Soit x_0 un point où u atteint sa valeur maximale $u(x_0) = \sigma$. On a donc

$$\int_0^L |u'(x)|dx \geq |u(x_0) - u(0)| + |u(L) - u(x_0)| = |\sigma - 0| + |0 - \sigma| = 2\sigma.$$

Par définition de J_ϵ on a donc

$$J_\epsilon(u) \geq \int_0^L \left(|u'(x)| + (u(x) - 1)^2\right) dx \geq 2\sigma + L(1 - \sigma)^2,$$

en utilisant le résultat précédent et le fait que $1 - u(x) \geq 1 - \sup u = 1 - \sigma \geq 0$.

5) Comme $0 < \sqrt{\epsilon} \leq L/2$, on voit que la fonction u définie par $u(x) = \sigma \min\{1, x/\sqrt{\epsilon}\}$ lorsque $x \in [0, L/2]$, et étendue par symétrie à $[L/2, L]$, appartient bien à E_σ. (Elle est lipschitzienne et s'annule au bord, elle est donc dans $H^1_0(]0, L[)$, et admet σ pour valeur maximale.) Il est facile d'évaluer

$$J_\epsilon(u) = \int_0^L (\epsilon|u'(x)|^2 + \sqrt{\epsilon + |u'(x)|^2} + (u(x) - 1)^2)dx$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{\epsilon}} (\epsilon\sigma^2/\epsilon + \sqrt{\epsilon + \sigma^2/\epsilon} + (\sigma x/\sqrt{\epsilon} - 1)^2)dx + 2\int_{\sqrt{\epsilon}}^{L/2} (\sqrt{\epsilon} + (\sigma - 1)^2)dx$$

$$\leq 2(\sqrt{\epsilon}\sigma^2 + \sqrt{\epsilon^2 + \sigma^2} + \sqrt{\epsilon}) + L\sqrt{\epsilon} + L(\sigma - 1)^2$$

$$\leq 2\sigma + L(\sigma - 1)^2 + C\sqrt{\epsilon}$$

où C est une constante qui ne dépend que de L (sachant que $\sqrt{\epsilon} \leq L/2$).

6) On sait que la solution optimale u_ϵ prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et donc appartient à l'un des E_σ pour $\sigma \in [0, 1]$. On a donc

$$J_{\epsilon,min} = J_\epsilon(u_\epsilon) = \inf_{0\leq\sigma\leq 1} J_{\sigma,\epsilon,min}.$$

Comme (d'après la question précédente)

$$2\sigma + L(\sigma - 1)^2 \leq J_{\sigma,\epsilon,min} \leq 2\sigma + L(\sigma - 1)^2 + C\sqrt{\epsilon},$$

on voit que $J_{\epsilon,min}$ ne peut que converger vers

$$I = \inf_{0\leq\sigma\leq 1} (2\sigma + L(\sigma - 1)^2).$$

Ce qui donne comme limite $2 - 1/L$ si $L \geq 1$ (car l'inf est alors atteint pour $\sigma = 1 - 1/L$) et L autrement (auquel cas l'inf est atteint pour $\sigma = 0$).

7) Le résultat précédent suggère que la limite de u_ϵ est la constante $1 - 1/L$ si $L \geq 1$ et la constante 0 si $L < 1$. Dans le premier cas, la convergence ne peut pas avoir lieu dans l'espace $H_0^1(]0, L[)$ (faible ou fort) car la constante $1 - 1/L$ n'en est pas élément. Le cas $L < 1$ est moins clair. De toutes façons, si $\epsilon = 0$, dans le cas général d'un ouvert borné lisse U de $\mathbb{R}^d$, l'espace $H_0^1(U)$ n'est pas la bonne complétion de $C_c^\infty(U)$ pour la norme adaptée au problème qui devrait plutôt être

$$u \to \int_U |\nabla u| dx + \sqrt{\int_U u^2(x) dx} \; .$$

6. Exercice (Bi-Laplacien

Soit U un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et f positive ($f : U \to \mathbb{R}^+$). On considère le problème aux limites suivant:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta^2 u & = & f & \text{dans } U \\ u = \Delta u & = & 0 & \text{sur } \partial U \end{array} \right. \tag{6.2}$$