CHAPITRE 2 : RÉSOLUTION DES EDP DE TRANSPORT LINÉAIRES

YANN BRENIER

1. Transport par champs de vecteurs lisses

On commence par un corollaire facile du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 1.1. *Soit* $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to v(t, x) \in \mathbb{R}^d$ *un champ de vecteur de classe* BC^∞. *Pour tout* $s \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$, *on note* $\xi_s^t(x)$ *l'unique solution de l'EDO* $y'(t) = v(t, y(t))$ *telle que* $y(s) = x$, *de sorte que*

$$\partial_t \xi_s^t = v(t, \xi_s^t(x)), \quad \xi_s^s(x) = x.$$

Alors (ξ_s^t) *définit une famille à deux paramètres de difféomorphismes de* $\mathbb{R}^d$, *appelée "flot", avec, pour tous* r, s, t *dans* $\mathbb{R}$: $\xi_s^t \circ \xi_r^s = \xi_s^t$, *et, en particulier,* $\xi_s^t = (\xi_t^s)^{-1}$. *On a de plus des constantes* L *et* M *telles que*

$$|\xi_s^t(x) - \xi_s^t(y)| \leq |x - y| \exp(|t - s|C), \quad |\xi_s^t(x) - \xi_r^t(y)| \leq |r - s|M, \quad |\xi_s^t(x) - \xi_s^r(y)| \leq |r - t|M.$$

Cela permet de résoudre trivialement l'équation de "transport" linéaire

$$\partial_t \omega + (v \cdot \nabla)\omega = \alpha. \tag{1.1}$$

En effet on obtient, par dérivation composée,

$$\partial_t \left(\omega(t, \xi_s^t(x)) \right) = \alpha(t, \xi_s^t(x))$$

et donc

$$\omega(t, \xi_s^t(x)) = \omega(s, x) + \int_s^t a(\theta, \xi_s^\theta(x)) d\theta$$

d'où (en posant $x = \xi_t^s(y)$)

$$\omega(t, y) = \omega(s, \xi_t^s(y)) + \int_s^t a(\theta, \xi_t^\theta(y)) d\theta, \tag{1.2}$$

ce qui donne la solution ω en fonction de sa valeur au temps s et du second membre ("terme source") α. D'où

Théorème 1.2. *Soit* $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to v(t, x) \in \mathbb{R}^d$ *un champ de vecteur de classe* BC^∞. *Soit* $s \in \mathbb{R}$, $\omega(s, \cdot)$ *et* α *deux fonctions* C^∞ *données. Alors l'équation de transport (1.1) admet une unique solution* ω *de classe* C^∞ *donnée par (1.2).*

Cela va nous permettre de résoudre l'équation "de continuité"

$$\partial_t q + \nabla \cdot (vq) = 0, \tag{1.3}$$

"par dualité" dans la classe des mesures de Borel q localement bornées sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$ qui sont "duales" des fonctions continues f à support compact, par la formule

$$< q, f >= \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} f(t,x)dq(t,x),$$

ou avec d'autres notations fréquemment utilisées

$$< q, f >= \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} f(t,x)q(dt,dx)$$

ou encore

$$< q, f >= \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} f(t,x)q(dtdx).$$

Le caractère "localement borné" signifie que pour tout compact $\mathcal{K}$ de $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$, il y a une constante C telle que

$$< q, f >\leq C\sup|f|$$

pour toute fonction f à support dans $\mathcal{K}$.
On introduit d'abord la notion de solution faible suivante :

Definition 1.3. *Soit* $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to v(t,x)\in\mathbb{R}^d$ *un champ de vecteur de classe* BC^∞. *Soient* q_0 *et* q *deux mesures de Borel localement bornées respectivement sur* $\mathbb{R}^d$ *et* $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$. *On dit que* q *est solution faible de (1.3) avec donnée initiale* q_0 *si, pour toute fonction* $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d}(\partial_t+v(t,x)\cdot\nabla)f(t,x)dq(t,x)+\int_{\mathbb{R}^d} f(0,x)dq_0(x)=0. \tag{1.4}$$

On montre alors

Théorème 1.4. *Soit* $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to v(t,x)\in\mathbb{R}^d$ *un champ de vecteur de classe* BC^∞. *Alors, pour toute donnée initiale* q_0, *(1.3) admet une unique solution faible* q *qui a la structure suivante*

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d}\psi(t,x)dq(t,x)=\int_0^\infty(\int_{\mathbb{R}^d}\psi(t,x)dq_t(x))dt=\int_0^\infty(\int_{\mathbb{R}^d}\psi(t,\xi_0^t(x))dq_0(x))dt, \tag{1.5}$$

$\forall\psi\in C_c^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$. *Dans cette expression,* $t\in[0,+\infty[\to q_t$ *est continue à valeurs dans les mesures de Borel localement bornées sur* $\mathbb{R}^d$ *et explicitement définie, pour chaque* $t\in[0,+\infty[$, *comme mesure image de* q_0 *par* ξ_0^t, *i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)dq_t(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\phi(\xi_0^t(x))dq_0(x),\quad\forall\phi\in C_c^0(\mathbb{R}^d).$$

Preuve. Il est immédiat que (1.5) fournit une solution faible. En effet, en posant $\psi(t,x)=(\partial_t+v\cdot\nabla)\phi(t,x)$, on trouve

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d}((\partial_t+v\cdot\nabla)\phi)(t,x)dq(t,x)=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^d}((\partial_t+v\cdot\nabla)\phi)(t,\xi_0^t(x))dq_0(x)\right)dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^d}\partial_t(\phi(t,\xi_0^t(x)))dq_0(x)\right)dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \partial_t(\phi(t, \xi_0^t(x))dt \right) dq_0(x)$$

(Fubini)

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(0, x) dq_0(x).$$

L'unicité est un peu plus subtile et passe par un argument typique, dit de "dualité". Soient deux solutions pour la même donnée. Leur différence $\tilde{q}$ vérifie donc

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} ((\partial_t + v \cdot \nabla)\phi)(t, x) d\tilde{q}(t, x) = 0$$

et il nous suffit de prouver

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} \psi(t, x) d\tilde{q}(t, x) = 0, \forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d).$$

Il existe un $T > 0$ tel que $\psi(t, x) = 0$ pour $t \geq T$. Il nous suffit donc de résoudre

$$\partial_t \phi + (v \cdot \nabla)\phi = \psi, \quad \phi(T, \cdot) = 0$$

ce que nous savons déjà faire depuis le théorème 1.2. La solution est donnée par

$$\phi(t, y) = \int_T^t \psi(\theta, \xi_t^\theta(y)) d\theta,$$

qui est bien dans $C_c^\infty([0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ (en utilisant que $|\xi_t^\theta(y) - y| \leq |t - \theta| M$ et $\psi(t, x) = 0$ pour $t \geq T$).

Remarque. Un cas particulier de donnée initiale q_0 est la masse de Dirac en un point fixé $y \in \mathbb{R}^d$. L'unique solution est alors donnée par q_t où est la masse de Dirac en $\xi_0^t(y)$. Ainsi la théorie des EDO est entièrement contenue dans la résolution de l'équation de "continuité" ! C'est déjà un succès de l'approche EDP des EDO, mais incomplet car les hypothèses de régularité sur v sont peu raisonnables. On va voir qu'on peut les assouplir considérablement, quitte à abandonner les mesures de Borel générales en faveur de celles qui sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

Un corollaire amusant. Il est connu (cf. TD1) que lorsque le champ v est à divergence nulle, le "flot" ξ "conserve les volumes"

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi_t^s(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx, \quad \forall f \in C_c^0(\mathbb{R}^d), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La démonstration usuelle passe par le calcul différentiel et la formule (un peu laborieuse à établir)

$$\partial_t(\log \det D_x \xi_s^t(x)) = (\nabla \cdot v)(t, \xi_s^t(x)).$$

Pourtant, une démonstration plus élégante découle directement du théorème d'unicité. Notons d'abord que le mesure $dq(t, x) = dtdx$ est une solution faible pour la donnée initiale $dq_0(x) = dx$. En effet

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} (\partial_t + v(t, x) \cdot \nabla) f(t, x) dq(t, x) + \int_{\mathbb{R}^d} f(0, x) dq_0(x)$$

$$= \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} \partial_t f(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} f(0, x) dx = 0, \quad \forall f \in C_c^\infty([0, +\infty[\times\mathbb{R}^d).$$

(où on a utilisé que

$$\int_{\mathbb{R}^d} v(t,x)\cdot\nabla f(t,x)dx = 0$$

puisque v est à divergence nulle et f est à support compact en x). Or, le théorème 1.4 nous dit que $dq(t,x) = dq_t(x)dt$ où q_t est la mesure image de q_0 par ξ_0^t. Comme $dq(t,x) = dxdt$, on a ainsi obtenu que ξ_0^t conserve la mesure dx, i.e. "conserve les volumes".

2. Transport par champs de vecteurs non lisses : existence

On va maintenant voir que l'existence de solutions faibles ne nécessite aucune régularité du champ v. Pour simplifier, on se limitera tout de même, pour simplifier les preuves, aux champs $v(t,x)$ (Lebesgue) intégrables et à divergence nulle (au sens des distributions, i.e.

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} v(t,x)\cdot\nabla f(t,x)dxdt = 0,$$

pour tout $f \in C_c^\infty([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d))$. Pour obtenir l'existence de solutions, le prix à payer est de ne plus considérer des données initiales q_0 mesures mais plutôt des fonctions localement Lebesgue intégrables et on se limitera même à des q_0 dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. On a un premier résultat facile d'existence :

Théorème 2.1. *Soit $(t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \to v(t,x) \in \mathbb{R}^d$ un champ de vecteur à divergence nulle Lebesgue intégrable. Alors, pour toute donnée initiale $q_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, (1.3) admet au moins une solution faible q qui a la structure suivante (avec abus de notation)*

$$dq(t,x) = q(t,x)dtdx$$

où q est (Lebesgue) mesurable bornée sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$.

Preuve. On utilise une méthode typique de régularisation et de compacité. On approche dans $L^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ le champ de vecteur v par un champ lisse (i.e. dans BC^∞) v^ϵ lui-même à divergence nulle. (Pour cela on prolonge $v(t,x)$ par zero pour $t \le 0$ et on convole en espace-temps par un noyau régularisant.) Ainsi les difféomorphismes correspondants ${}^\epsilon\xi_t^s$ conservent le volume

$$\int_{\mathbb{R}^d} f({}^\epsilon\xi_t^s(x))dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx, \quad \forall f \in C_c^0(\mathbb{R}^d), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(Notons aussi que la borne L^ϵ associée à ${}^\epsilon\xi$ peut exploser quand $\epsilon \downarrow 0$ et ne nous est d'aucune utilité.) Par le théorème 1.4, on a une unique solution faible q^ϵ avec donnée initiale q_0, qui s'écrit en fait

$$q^\epsilon(t,x) = q_0({}^\epsilon\xi_t^0(x))$$

(en utilisant que q_0 est une fonction, et non plus une mesure, et que les volumes sont conservés.) La formulation faible s'écrit par ailleurs

(2.6)
$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} (\partial_t + v^\epsilon(t,x)\cdot\nabla)f(t,x)q^\epsilon(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} f(0,x)q_0(x)dx = 0, \quad \forall f \in C_c^\infty([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d).$$

Comme q_0 est supposée (Lebesgue) mesurable bornée, automatiquement q^ϵ l'est aussi, sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$. Ainsi on peut extraire une suite (abusivement encore indexée par ϵ)

convergeant dans L^∞ faible-* vers une limite q mesurable bornée, i.e.

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} q^\epsilon(t,x)f(t,x)dxdt \to \int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} q(t,x)f(t,x)dxdt$$

pour tout $f \in L^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$. On peut donc faire un passage à la limite "fort-faible" $L^1 - L^\infty_{w*}$ dans la formule (2.6) et voir que q est solution faible :

$$\int_{[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d} (\partial_t + v(t,x)\cdot\nabla)f(t,x)q(t,x)dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} f(0,x)q_0(x) = 0, \quad \forall f \in C_c^\infty([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d).$$

3. Transport par champs de vecteurs non lisses : unicité

L'obtention de solutions faibles est donc obtenue sans grand effort. L'unicité est un problème sérieux et qui n'a été compris qu'à la fin des années 80 par R. DiPerna et P.-L. Lions. Dans le cas des champs à divergence nulle, ils obtiennent l'unicité dès que les dérivées en espace $\partial_i v_j$ (ou, mieux, les seules dérivées symétrisées $\partial_i v_j + \partial_j v_i$) sont localement intégrables sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^d$. On peut même supposer que les dérivées $\partial_i v_j$ sont seulement des mesures de Borel localement bornées (comme l'a fait L. Ambrosio vers 2005). Dans ce dernier cadre, on peut, inclure, quand $d = 2$, tous les champs de la forme $v(x) = (-\partial_2\psi(x), \partial_1\psi(x))$, où ψ est une fonction continue, affine par morceaux sur une triangulation (régulière) de $\mathbb{R}^2$, comme dans certaines méthodes d'éléments finis (dits "mixtes"). On voit alors facilement qu'un flot $\xi_s^t(x)$ est naturellement bien défini mais seulement au sens du "presque partout" en x !

Les résultats remarquables de DiPerna-Lions et Ambrosio élargissent considérablement la théorie des EDO, au prix d'y inclure la notion de presque partout au sens de Lebesgue. Ainsi, en un certain sens, on sera capable de résoudre de façon unique l'EDO

$$y'(t) = v(t, y(t)), \quad y(0) = x$$

pour Lebesgue presque tout x ! Il est étonnant, compte tenu de la (relative) simplicité de la preuve, qu'un tel dépassement de la théorie de Cauchy-Lipschitz n'ait été obtenu que dans les années 80, fort longtemps après l'apparition de l'intégrale de Lebesgue. Pour montrer la finesse du résultat, on peut considérer le cas de champs de vecteur, de type "sablier", défini sur $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$), pour $x = (x_1, \cdots, x_d) = (\tilde{x}, x_d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$ par $v(x) = x|x|^{-d}$ quand $|\tilde{x}| < x_d$, $v(x) = -x|x|^{-d}$ quand $|\tilde{x}| < -x_d$. A l'aide de prolongements adéquats à $|x_d| \leq |\tilde{x}|$, on peut s'assurer que v est bien à divergence nulle, localement intégrable avec des dérivées (symétrisées) localement intégrables hors de l'origine. En revanche, à l'origine, la norme L^1 des dérivées diverge logarithmiquement. Pour un tel champ, on voit facilement que l'unicité des solutions faibles n'est pas possible ("instabilité de l'écoulement dans un sablier").

4. Un résultat d'unicité pour l'équation de continuité

On suppose ici que le champ de vecteur $(t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d \to v(t,x) \in \mathbb{R}^d$ et ses dérivées symétrisées $\partial_i v_j + \partial_j v_i$ sont (Lebesgue) intégrables sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$. On suppose aussi qu'il est à divergence nulle. Ces hypothèses sont loin d'être optimales, mais elles simplifient les preuves. L'essentiel est qu'on demande aux dérivées partielles (symétrisées) de v en espace d'être simplement intégrables, ce qui diffère radicalement de l'usuelle théorie de Cauchy-Lipschitz. On a alors :

Théorème 4.1. *Soit $q_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $q \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ une solution faible de l'équation de continuité admettant q_0 pour donnée initiale. Alors, pour toute fonction $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $\beta \circ q$ est solution faible, pour la donnée initiale $\beta \circ q_0$.*

Ce résultat est évident dans le cas de champs lisses à divergence nulle. (Exercice : le vérifier.)

Corollaire 4.2. *Soit $q_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe au plus une unique solution faible $q \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ à l'équation de continuité qui admette q_0 pour donnée initiale.*

4.1. **Préalable sur les fonctions absolument continues.**

Definition 4.3. *On dit d'une fonction y sur $[0,T]$ qu'elle est absolument continue si elle est primitive d'une fonction Lebesgue intégrable, autrement dit s'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ et $z \in L^1([0,T])$ (qu'on appelle dérivée de y et qu'on note aussi y') telles que*

$$y(t) = y_0 + \int_0^t z(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]$$

où de façon équivalente si

$$\int_0^T (h'(t)y(t) + h(t)z(t))dt + h(0)y_0, \quad \forall h \in C_c^\infty([0,T[).$$

Montrons l'équivalence des deux définitions. Comme y est intégrable, on a

$$y(t) = y_0 + \int_0^t z(s)ds, \quad \forall t \in [0,T]$$

ssi, pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty([0,T[)$,

$$\int_0^T [y(t) - y_0 - \int_0^t z(s)ds]\phi(t)dt = 0$$

ou, de façon équivalente, en introduisant

$$h(t) = -\int_t^T \phi(\tau)d\tau,$$

ssi pour toute fonction $h \in C_c^\infty([0,T[)$ (noter que $h \to \phi$ est bijective de $C_c^\infty([0,T[)$ dans $C_c^\infty([0,T[)$),

$$\int_0^T [y(t) - y_0 - \int_0^t z(s)ds]h'(t)dt = 0,$$

i.e.

$$\int_0^T y(t)h'(t)dt + h(0)y_0 - \int_0^T \int_0^T z(s)h'(t)1_{0<s<t<T}dsdt = 0$$

ou encore (par Fubini)

$$\int_0^T y(t)h'(t)dt + h(0)y_0 + \int_0^T z(s)h(s)ds = 0$$

ce qui conduit bien à

$$\int_0^T (y(t)h'(t) + z(t)h(t))dt + y_0h(0) = 0, \quad \forall h \in C_c^\infty([0,T[).$$

Remarque: au sens des distributions, l'absolue continuité de y signifie que sa dérivée distribution est une mesure bornée "absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue" et s'identifie donc à une fonction Lebesgue intégrable sur $[0, T]$. Un critère équivalent est que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute suite d'intervalle disjoints $[a_k, b_k] \subset [0, T]$ on a

$$\sum_k |b_k - a_k| \leq \delta \Rightarrow \sum_k |y(b_k) - y(a_k)| \leq \epsilon$$

Proposition 4.4. *Soit y a.c. sur $[0, T]$ de dérivée $y' \in L^1([0, T])$. Alors, pour toute fonction $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $\beta \circ y$ est a.c., de dérivée $\beta' \circ y\ y'$, ou, de façon équivalente,*

$$\int_0^T (h'(t)\beta(y(t)) + h(t)\beta'(y(t))y'(t))dt + h(0)\beta(y_0), \quad \forall h \in C_c^\infty([0, T[).$$

On peut donner une preuve simple par approximation. Soit $z^{(n)}$ une approximation lisse de $z = y'$ dans $L^1([0, T])$. On pose

$$y^{(n)}(t) = y_0 + \int_0^t z^{(n)}(s)ds$$

qui converge clairement vers y dans $C^0([0, T])$. On a, classiquement,

$$\beta(y^{(n)}(t)) = \beta(y_0) + \int_0^t \beta'(y^{(n)}(s))z^{(n)}(s)ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

(car $z^{(n)}$ est la dérivée de $y^{(n)}$). Il suffit alors de passer à la limite en n pour obtenir

$$\beta(y(t)) = \beta(y_0) + \int_0^t \beta'(y(s)z(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

ce qui prouve, en passant, que $\beta \circ y$ est bien a.c. et de dérivée $\beta' \circ y\ y'$.

Remarque. Le cadre "absolument continu" est difficile à dépasser si on veut conserver les règles de dérivation composée ("chain rule"). En effet, si l'on considère le cadre plus large des fonctions y de "variation bornée" sur $[0, T]$, qui sont définies comme primitives de mesures de Borel bornées μ, au sens

$$y(t) = y_0 + \mu([0, t[)$$

on voit que la règle de composition des dérivées s'effondre. Ainsi, s_0 étant fixé dans $]0, T[$, on prend $\mu = \delta_{s_0}$ et $y_0 = 0$, ce qui donne

$$y(t) = 1_{\{t > s_0\}}$$

et donc $y^2 = y^3 = y$ ce qui rend impossible les identités

$$\frac{d}{dt}(y^2) = 2y\frac{d}{dt}y, \quad \frac{d}{dt}(y^3) = 3y^2\frac{d}{dt}y,$$

en un sens raisonnable.

4.2. **Preuve du théorème 4.1.** Soit γ un noyau régularisant sur $\mathbb{R}^d$ qu'on suppose radialement symétrique. Comme q est solution faible de l'équation de continuité

$$\partial_t q + \nabla \cdot (qv) = 0$$

avec donnée initiale q_0, on peut, pour tout x fixé dans $\mathbb{R}^d$, considérer la fonction test $(t, y) \to h(t)\gamma_\epsilon(y - x)$, et déduire

$$\int_0^T (I_\epsilon(t, x) + J_\epsilon(t, x))dt + K_\epsilon(x) = 0$$

où

$$I_\epsilon(t, x) = h'(t) \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_\epsilon(y - x)q(t, y)dy$$

$$J_\epsilon(t, x) = h(t) \int_{\mathbb{R}^d} q(t, y)v(t, y) \cdot (\nabla\gamma_\epsilon)(y - x)dy$$

$$K_\epsilon(x) = h(0) \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_\epsilon(y - x)q_0(y)dy.$$

Concentrons nous sur $J_\epsilon(t, x)$ qui diffère de

$$L_\epsilon(t, x) = h(t) \int_{\mathbb{R}^d} q(t, y)v(t, x) \cdot (\nabla\gamma_\epsilon)(y - x)dy$$

seulement par $h(t)r_\epsilon(t, x)$ où

$$r_\epsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} q(t, y)(v(t, y) - v(t, x)) \cdot (\nabla\gamma_\epsilon)(y - x)dy$$

On va montrer plus loin le point clé suivant qui utilise crucialement l'hypothèse que les $\partial_i v_j + \partial_j v_i$ sont Lebesgue intégrables.

Lemme 4.5. *r_ϵ converge fortement vers 0 dans L^1.*

Tirons en les conséquences dès maintenant. On peut écrire

$$I_\epsilon(t, x) = h'(t)q_\epsilon(t, x)$$

où on note

$$q_\epsilon(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} q(t, y)\gamma_\epsilon(y - x)dy$$

la régularisation (en espace seulement) de q par γ. De même,

$$L_\epsilon(t, x) = -h(t)v(t, x) \cdot \nabla q_\epsilon(t, x),$$

$$K_\epsilon(x) = h(0)q_{0,\epsilon}(x).$$

On a donc

$$\int_0^T [h'(t)q_\epsilon(t, x) - h(t)(v(t, x) \cdot \nabla q_\epsilon(t, x) + r_\epsilon(t, x))]dt + h(0)q_{0,\epsilon}(x) = 0.$$

Or, ϵ étant fixé, par construction,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |v(t, x) \cdot \nabla q_\epsilon(t, x) + r_\epsilon(t, x)|dtdx < +\infty$$

(puisque q et v sont respectivement supposés dans L^∞ et L^1). Donc, pour presque tout x, fixé,

$$\int_0^T |v(t,x)\cdot\nabla q_\epsilon(t,x)+r_\epsilon(t,x)|dt<+\infty,$$

ce qui entraine que $t\to q_\epsilon(t,x)$ est absolument continue et de dérivée

$$t\to -v(t,x)\cdot\nabla q_\epsilon(t,x)-r_\epsilon(t,x).$$

On en déduit donc que $t\to\beta(q_\epsilon(t,x))$ est aussi absolument continue et de dérivée

$$t\to -\beta'(q_\epsilon(t,x))(v(t,x)\cdot\nabla q_\epsilon(t,x)+r_\epsilon(t,x)),$$

laquelle se réécrit (par la règle de dérivation composée classique)

$$t\to -v(t,x)\cdot\nabla(\beta(q_\epsilon(t,x)))-\beta'(q_\epsilon(t,x))r_\epsilon(t,x),$$

ce qui nous permet d'affirmer

$$\int_0^T (h'(t)\beta(q_\epsilon(t,x))-h(t)v(t,x)\cdot\nabla(\beta(q_\epsilon(t,x)))-h(t)\beta'(q_\epsilon(t,x))r_\epsilon(t,x))\,dt$$
$$+h(0)\beta(q_{0,\epsilon}(x))=0.$$

On peut, dès lors, multiplier cette relation par $\phi(x)$, où $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, et intégrer en $x\in\mathbb{R}^d$. On trouve, en utilisant que v est à divergence nulle et en intégrant par partie (sachant que $\phi(x)$ et $\beta(q_\epsilon(t,x))$ sont lisses en x),

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}[h'(t)\phi(x)\beta(q_\epsilon(t,x))+h(t)v(t,x)\cdot\nabla\phi(x)\beta(q_\epsilon(t,x))$$
$$-h(t)\beta'(q_\epsilon(t,x))r_\epsilon(t,x)\phi(x)]dxdt+\int_{\mathbb{R}^d}h(0)\phi(x)\beta(q_{0,\epsilon}(x))dx=0.$$

Il est alors facile de passer à la limite en $\epsilon\downarrow 0$, en utilisant bien entendu le lemme 4.5, pour obtenir

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}[h'(t)\phi(x)\beta(q(t,x))+h(t)v(t,x)\cdot\nabla\phi(x)\beta(q(t,x))]dxdt$$
$$+\int_{\mathbb{R}^d}h(0)\phi(x)\beta(q_0(x))dx=0,$$

ce qui prouve, finalement, que $\beta\circ q$ est bien solution faible.

4.3. **Preuve du Lemme 4.5.** Rappelons que

$$r_\epsilon(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}q(t,y)(v(t,y)-v(t,x))\cdot(\nabla\gamma_\epsilon)(y-x)dy$$

et donc

$$r_\epsilon(t,x)=\int_{\mathbb{R}^d}q(t,x+\epsilon z)(v(t,x+\epsilon z)-v(t,x))\epsilon^{-1}\cdot(\nabla\gamma)(z)dz$$
$$=\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 q(t,x+\epsilon z)(\partial_i v_j+\partial_j v_i)(t,x+\theta\epsilon z)z^i z^j g'(|z|^2)d\theta dz.$$

(On utilise ici les notations en coordonnées $i,j=1$ à d et le caractère radial de $\gamma(z)$ noté $g(|z|^2)$; observer aussi que l'utilisation de la formule de la moyenne se justifie par l'hypothèse que les dérivées symétrisées de v sont intégrables: il suffit de convoler v en espace pour obtenir une approximation lisse v_δ, convergeant dans L^1 vers v quand $\delta \downarrow 0$, d'utiliser la formule de la moyenne pour v_δ et de passer à la limite en δ en observant que les dérivées symétrisées passent aussi à la limite dans L^1.) Observons que

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 q(t,x)(\partial_i v_j + \partial_j v_i)(t,x) z^i z^j g'(|z|^2) d\theta dz = q(t,x)(\partial_i v_j + \partial_j v_i)(t,x) c_g \delta^{ij}$$

(où c_g dépend seulement de g)

$$= q(t,x)\nabla \cdot v(t,x) c_g = 0,$$

puisqu'on a supposé v à divergence nulle. Donc, pour conclure, il suffit de montrer que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} | \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 [q(t, x+\epsilon z) D_{ij}(t, x+\theta\epsilon z) - q(t,x) D_{ij}(t,x)] z^i z^j g'(|z|^2) d\theta dz | dx dt \to 0.$$

où on note $D_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i$. On peut se convaincre que cette quantité tend bien vers zéro du fait de l'intégrabilité des D_{ij} combinée à l'appartenance de q à L^∞.

4.4. **Preuve du Corollaire 4.2.** Soient deux solutions faibles dans L^∞ de même donnée initiale. Notons leur différence w. Par linéarité, w est elle-même solution faible, dans L^∞, avec donnée initiale nulle. Il en est donc de même de $\rho = w^2$, d'où

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} [h'(t)\rho(t,x)\phi(x) + h(t)\rho(t,x)\nabla\phi(x) \cdot v(t,x)] dx dt = 0.$$

Comme on suppose que v est intégrable sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, la relation précédente montre que

$$t \to \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t,x)\phi(x) dx$$

est absolument continue, nulle en $t = 0$, et de dérivée

$$t \to \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t,x)\nabla\phi(x) \cdot v(t,x) dx$$

(qui est intégrable puisque v l'est et que ρ est dans L^∞). On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(t,x)\phi(x) dx = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \rho(s,x)\nabla\phi(x) \cdot v(t,x) dx ds.$$

Soit $\mathcal{K}$ un compact de $\mathbb{R}^d$. Pour tout ϵ on peut trouver $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\phi(x) = 1$ si $x \in \mathcal{K}$ et $|\nabla\phi(x)| \leq \epsilon$ pour tout x (prendre une fonction "plateau"). On obtient donc

$$\int_{\mathcal{K}} \rho(t,x) dx \leq \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \rho(s,x)|v(t,x)| dx ds$$

pour tout $t \in [0,T]$. On conclut que $\rho = 0$ ce qui montre l'unicité des solutions faibles.

CNRS, DMA-ENS, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France
E-mail address: yann.brenier@ens.fr