ANALYSE DES EDP

Yann Brenier
CNRS, DMA-ENS (PSL), 45 rue d'Ulm 75005 Paris

FIMFA-ENS-2018/2019

Cours de M1, année 2018/2019.

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Depuis qu'Euler a décrit en termes d'EDP le mouvement des fluides en 1755/1757, les EDP sont omniprésentes en mécanique, physique et géométrie. On verra plus loin un fac simile de l'article de 1757. L'écriture est déjà moderne et claire. (On peut comparer avec le travail de d'Alembert sur les cordes vibrantes datant de 1747 pour voir la supériorité d'Euler.) Il n'y a pas vraiment de théorie générale des EDP, sauf dans le cas linéaire où Lars Hörmander en a fait une synthèse monumentale. Comme beaucoup des EDP les plus intéressantes sont quand même non-linéaires, on peut voir dans le travail de Jean Leray en 1934 sur les équations de Navier-Stokes (une extension de celles d'Euler aux fluides visqueux) le vrai point de départ de l'analyse des EDP (au moins non-linéaires), où apparaissent déjà, avant la lettre, les distributions, les formulations faibles, les espaces de Sobolev etc...

RETOUR DE LERAY A EULER

C'était le choix de Laure Saint-Raymond, il y a quelques années, d'ouvrir son cours FIMFA d'EDP par l'analyse des ENS suivant Leray. (Son cours est disponible en ligne sur le site FIMFA.)
On a choisi ici plutôt de remonter plus directement à la source, i.e. à Euler et à ses équations des fluides "parfaits" (i.e. non visqueux), ce que Richard Feynman appelait les équations de "l'eau sèche". Avant de procéder à leur analyse, on va commencer par montrer, plus formellement, que les équations d'Euler contiennent déjà implicitement (au moins asymptotiquement) les EDP linéaires les plus simples: celle des ondes, celle de la chaleur, celle de Poisson, qui sont les protoypes des EDP, respectivement "hyperboliques, paraboliques et elliptiques".

ASPECTS GEOMETRIQUES ET CALCUL DES VARIATIONS

Dans le cas des fluides incompressibles, on expliquera, à la suite du travail de Vladimir Arnold en 1966, mais en termes beaucoup plus élémentaires, comment les équations d'Euler décrivent en fait les géodésiques d'une (sorte de) variété Riemannienne de dimension infinie (à savoir le groupe des difféomorphismes conservant le volume avec métrique L^2). Les équations d'Euler concernent donc aussi la géométrie, et, de plus, en dimension infinie ! Cette observation est par ailleurs intéressante pour l'analyse car elle indique la possibilité d'aborder les EDP par des méthodes de "calcul de variations", i.e. par optimisation de "fonctionnelles" sur des espaces de fonction, ce qui correspond au "principe de moindre action" en physique, à la suite de Fermat, d'Alembert, Euler et Maupertuis.

DE LA GEOMETRIE A ... L'ECONOMIE (PLANIFIEE !)

On verra plus tard l'application d'un principe "variationnel", quasi identique à celui d'Arnold, à l'une des EDP géométriques les plus fameuses, celle de Monge-Ampère (réelle) dont on sait, depuis Minkowski, qu'elle permet de reconstruire des surfaces convexes par la seule connaissance de leur courbure de Gauss. (Cette équation a la propriété d'être "complètement non-linéaire", en un sens à préciser.) La méthode s'inspire de la "théorie du transport optimal", fondée par Monge vers 1780 et dans la laquelle se sont illustrés deux récentes médailles Fields, Cédric Villani (2010) puis Alessio Figalli (2018). Le problème de minimisation y est en fait, de façon surprenante pour une EDP complètement non-linéaire, un "programme linéaire" (un peu comme en économie mathématique), en dimension infinie, d'ailleurs résolu en 1942 par Leonid Kantorovich, prix Nobel... d'économie!

(Curieusement, Kantorovich était collègue à Leningrad d'Alexandrov, lequel a joué un rôle de premier plan dans les EDP complètement non-linéaires, dont celle de Monge-Ampère, mais il semble qu'il n'y ait pas eu d'interaction entre eux à ce sujet.)

"LISEZ EULER, IL EST NOTRE MAITRE A TOUS !" (Laplace)

EN 1755/57, EULER INTRODUIT, POUR LES FLUIDES, LA PREMIERE "THEORIE DES CHAMPS" EN PHYSIQUE

"LISEZ EULER, IL EST NOTRE MAITRE A TOUS !" (Laplace)

EN 1755/57, EULER INTRODUIT, POUR LES FLUIDES, LA PREMIERE "THEORIE DES CHAMPS" EN PHYSIQUE ET, DU MEME COUP, LES PREMIERES EDP (NON-LINEAIRES) JAMAIS ECRITES

"LISEZ EULER, IL EST NOTRE MAITRE A TOUS !" (Laplace)

EN 1755/57, EULER INTRODUIT, POUR LES FLUIDES, LA PREMIERE "THEORIE DES CHAMPS" EN PHYSIQUE ET, DU MEME COUP, LES PREMIERES EDP (NON-LINEAIRES) JAMAIS ECRITES

$$\boxed{\partial_t q + \mathrm{div}(qv) = 0, \quad \partial_t(qv) + \mathrm{div}(qv \otimes v) = -\mathrm{grad}(p(q))}$$

"LISEZ EULER, IL EST NOTRE MAITRE A TOUS !" (Laplace)

EN 1755/57, EULER INTRODUIT, POUR LES FLUIDES, LA PREMIERE "THEORIE DES CHAMPS" EN PHYSIQUE ET, DU MEME COUP, LES PREMIERES EDP (NON-LINEAIRES) JAMAIS ECRITES

$$\boxed{\partial_t q + \mathrm{div}(qv) = 0, \quad \partial_t(qv) + \mathrm{div}(qv \otimes v) = -\mathrm{grad}(p(q))}$$

OU $(q, p, v) \in \mathbb{R}^{1+1+3}$ (dans les notations d'Euler) SONT LES CHAMPS DE DENSITE, PRESSION ET VITESSE DU FLUIDE ET LA PRESSION p EST SUPPOSEE FONCTION DE q SEUL.

"En coordonn'ees":

$$\partial_t q + \partial_j(qv^j) = 0, \quad \partial_t(qv_i) + \partial_j(qv^j v_i) = -\partial_i(p(q)).$$


PRO JUVENTUTE 1957
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$
LEONHARD EULER 1707-1783
5
+5 HELVETIA

XXI. Nous n'avons donc qu'à égaler ces forces accélératrices avec les accélerations actuelles que nous venons de trouver, & nous obtiendrons les trois équations suivantes :

$$P - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dx}\right) = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$Q - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$R - \frac{1}{q}\left(\frac{dp}{dz}\right) = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Si nous ajoutons à ces trois équations premièrement celle, que nous a fournie la considération de la continuité du fluide :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)+\left(\frac{d.qu}{dx}\right)+\left(\frac{d.qv}{dy}\right)+\left(\frac{d.qw}{dz}\right)=0.$$

Si le ſluide n'étoit pas compreſſible, la denſité q ſeroit la même en Z, & en Z', & pour ce cas on auroit cette équation :

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0.$$

qui eſt auſſi celle ſur laquelle j'ai établi mon Mémoire latin allégué ci-deſſus.

qui obeïroit à ſon action. Cette idée de l'effort eſt de la derniere importance dans toute la Théorie, tant de l'équilibre que du mouvement, ayant fait voir, que la ſomme de tous les efforts eſt toujours un *maximum* ou *minimum*. Cette belle propriété convient admirablement avec le beau principe de la moindre action ; dont nous devons la découverte à notre Illuſtre Préſident, M. de *Maupertuis*.

tombent dans la ſurface même. Or nous voyons par là ſuffiſamment, combien nous ſommes encore éloignés de la connoiſſance complette du mouvement des fluides, & que ce que je viens d'expliquer, n'en contient qu'un foible commencement. Cependant tout ce que la Théorie des fluides renferme, eſt contenu dans les deux équations rapportées cy-deſſus (§. XXXIV.), de ſorte que ce ne ſont pas les principes de Méchanique qui nous manquent dans la pourſuite de ces recherches, mais uniquement l'Analyſe, qui n'eſt pas encore aſſés cultivée, pour ce deſſein : & partant on voit clairement, quelles découvertes nous reſtent encore à faire dans cette Science, avant que nous puiſſions arriver à une Théorie plus parfaite du mouvement des fluides.

D'EULER A LA CHALEUR (ET A FOURIER)
PAR UN CHANGEMENT NON-LINEAIRE DU TEMPS

$$t \to \tau = t^2/2, \quad (\tilde{q}, \tilde{v})(t,x) = (q(\tau,x), \tau' v(\tau,x)), \quad \tau' = \frac{d\tau}{dt} = t$$

(de sorte que $\tilde{v}(t,x)dt = v(\tau,x)d\tau$)

D'EULER A LA CHALEUR (ET A FOURIER) PAR UN CHANGEMENT NON-LINEAIRE DU TEMPS

$$t \to \tau = t^2/2, \quad (\tilde{q}, \tilde{v})(t, x) = (q(\tau, x), \tau' v(\tau, x)), \quad \tau' = \frac{d\tau}{dt} = t$$

(de sorte que $\tilde{v}(t, x)dt = v(\tau, x)d\tau$)

$$\boxed{\partial_t \tilde{q} + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v}) = 0, \quad \partial_t(\tilde{q}\tilde{v}) + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v} \otimes \tilde{v}) = -\mathrm{grad}(p(\tilde{q}))}$$

(en supposant, comme Euler, que p est une fonction de q)

D'EULER A LA CHALEUR (ET A FOURIER) PAR UN CHANGEMENT NON-LINEAIRE DU TEMPS

$$t \to \tau = t^2/2, \quad (\tilde{q}, \tilde{v})(t, x) = (q(\tau, x), \tau' v(\tau, x)), \quad \tau' = \frac{d\tau}{dt} = t$$

(de sorte que $\tilde{v}(t, x)dt = v(\tau, x)d\tau$)

$$\boxed{\partial_t \tilde{q} + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v}) = 0, \quad \partial_t(\tilde{q}\tilde{v}) + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v} \otimes \tilde{v}) = -\mathrm{grad}(p(\tilde{q}))}$$

(en supposant, comme Euler, que p est une fonction de q)

$$\boxed{\to \ \partial_\tau q + \mathrm{div}(qv) = 0, \ \ qv + 2\tau[\partial_\tau(qv) + \mathrm{div}(qv \otimes v)] = -\mathrm{grad}(p(q))}$$

D'EULER A LA CHALEUR (ET A FOURIER)
PAR UN CHANGEMENT NON-LINEAIRE DU TEMPS

$$t \to \tau = t^2/2, \quad (\tilde{q}, \tilde{v})(t, x) = (q(\tau, x), \tau' v(\tau, x)), \quad \tau' = \frac{d\tau}{dt} = t$$

(de sorte que $\tilde{v}(t, x)dt = v(\tau, x)d\tau$)

$$\boxed{\partial_t \tilde{q} + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v}) = 0, \quad \partial_t(\tilde{q}\tilde{v}) + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v} \otimes \tilde{v}) = -\mathrm{grad}(p(\tilde{q}))}$$

(en supposant, comme Euler, que p est une fonction de q)

$$\boxed{\to \ \partial_\tau q + \mathrm{div}(qv) = 0, \quad qv + 2\tau[\partial_\tau(qv) + \mathrm{div}(qv \otimes v)] = -\mathrm{grad}(p(q))}$$

Dans le régime $\tau << 1$, pour les "temps petits", on obtient une EQUATION ASYMPTOTE en retirant les termes en rouge.

IL NOUS RESTE L'EQUATION "ASYMPTOTE"

$$\boxed{\partial_\tau q + \mathrm{div}(qv) = 0, \quad qv = -\mathrm{grad}(p(q))}$$

qui, dans le cas d'un fluide "isotherme" (i.e. lorsque p est linéaire en q, $p = \gamma^2 q$, avec "vitesse du son" γ), n'est autre que la célèbrissime EQUATION DE LA "CHALEUR", résolue par Fourier au 19ème siècle (après Euler et par transformation de ... Fourier !),

$$\boxed{\partial_\tau q = \gamma^2 \triangle q, \quad \triangle = \mathrm{div}(\mathrm{grad})}$$

Dans le cas général, on a l'équation (non-linéaire) des "milieux poreux"

$$\boxed{\partial_\tau q = \triangle(p(q))}$$

D'EULER AUX ONDES
PAR LINEARISATION

$$(\tilde{q}, \tilde{v})(t, x) = (q^* + \epsilon q(t, x), \epsilon v(t, x)),$$

(où q^* est une constante)

D'EULER AUX ONDES
PAR LINEARISATION

$$(\tilde{q}, \tilde{v})(t,x) = (q^* + \epsilon q(t,x), \epsilon v(t,x)),$$

(où q^* est une constante)

$$\boxed{\partial_t \tilde{q} + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v}) = 0, \quad \partial_t(\tilde{q}\tilde{v}) + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v} \otimes \tilde{v}) = -\mathrm{grad}(p(\tilde{q}))}$$

(en supposant encore que p est une fonction de q)

$$\boxed{\rightarrow \qquad \partial_t q + \mathrm{div}((q^* + \epsilon q)v) = 0}$$

$$\boxed{\partial_t((q^* + \epsilon q)v) + \mathrm{div}((q^* + \epsilon q)\epsilon v \otimes v) = -\mathrm{grad}\left(\frac{p(q^* + \epsilon q) - p(q^*)}{\epsilon}\right)}$$

D'EULER AUX ONDES PAR LINEARISATION

$$(\tilde{q}, \tilde{v})(t, x) = (q^* + \epsilon q(t, x), \epsilon v(t, x)),$$

(où q^* est une constante)

$$\boxed{\partial_t \tilde{q} + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v}) = 0, \quad \partial_t(\tilde{q}\tilde{v}) + \mathrm{div}(\tilde{q}\tilde{v} \otimes \tilde{v}) = -\mathrm{grad}(p(\tilde{q}))}$$

(en supposant encore que p est une fonction de q)

$$\boxed{\rightarrow \qquad \partial_t q + \mathrm{div}((q^* + \epsilon q)v) = 0}$$

$$\boxed{\partial_t((q^* + \epsilon q)v) + \mathrm{div}((q^* + \epsilon q)\epsilon v \otimes v) = -\mathrm{grad}\left(\frac{p(q^* + \epsilon q) - p(q^*)}{\epsilon}\right)}$$

Dans le régime $\epsilon << 1$, pour de "petites fluctuations de densité et de vitesse", on obtient une EQUATION ASYMPTOTE en éliminant les termes petits en ϵ.

IL NOUS RESTE L'EQUATION "ASYMPTOTE"

$$\boxed{\partial_t q + q^* \mathrm{div}\, v = 0, \quad q^* \partial_t v + p'(q^*) \mathrm{grad} q = 0}$$

QUI N'EST AUTRE QUE L'EQUATION "DES ONDES"
(presqu'aussi fameuse que celle de la chaleur)

$$\boxed{\partial^2_{tt} q = \gamma^2 \triangle q}$$

(après élimination de v), avec "vitesse du son" $\gamma = \sqrt{p'(q^*)}$.

"EULER 2D" COMME COUPLAGE D'EDP LINEAIRES

Dans le cas incompressible, où $\mathrm{div}\, v = 0$, et dans le plan (et aussi dans un domaine simplement connexe du plan), on peut écrire

$$v = (-\partial_2 \psi, \partial_1 \psi)$$

d'où "l'équation de Poisson" $\boxed{-\triangle \psi = \omega}$ où $\boxed{\omega = \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2}$.

"EULER 2D" COMME COUPLAGE D'EDP LINEAIRES

Dans le cas incompressible, où $\mathrm{div}\, v = 0$, et dans le plan (et aussi dans un domaine simplement connexe du plan), on peut écrire

$$v = (-\partial_2 \psi, \partial_1 \psi)$$

d'où "l'équation de Poisson" $\boxed{-\triangle \psi = \omega}$ où $\boxed{\omega = \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2}$.
De l'équation d'Euler, on obtient pour le "tourbilllon" ω

$$\boxed{\partial_t \omega + (v \cdot \mathrm{grad})\omega = 0}$$

(l'équation de "transport de ω par v"), qui s'écrit aussi (car $\mathrm{div}\, v = 0$)
$\boxed{\partial_t \omega + \mathrm{div}(\omega v) = 0}$ ou encore $\boxed{\partial_t \omega + \partial_1 \psi \partial_2 \omega - \partial_2 \psi \partial_1 \omega = 0}$

Dans ce cas, les équations d'Euler ne sont que le couplage de deux équations linéaires (l'une en ψ avec ω comme donnée et vice versa).