Processus aléatoires Thomas Budzinski
ENS Paris, 2016-2017 Bureau V2
thomas.budzinski@ens.fr

TD 12 : Révisions

Lundi 2 Janvier

Exercice 1 (Marche aléatoire en milieu aléatoire)
Soient $(\omega_x^+)_{x\in\mathbb{Z}}$ une famille de variables i.i.d. à valeurs dans $]0,1[$. On introduit :

$$\omega_x^- = 1-\omega_x^+,\ \ \omega_x = (\omega_x^-,\omega_x^+)\ \text{ et }\ \rho_x = \frac{\omega_x^-}{\omega_x^+}.$$

Conditionnellement à ω, on définit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov issue de 0 de loi P_ω telle que pour tout $n\geq 0$,

$$P_\omega\left(X_{n+1}=x+1|X_n=x\right)=\omega_x^+\ \text{ et }\ P_\omega\left(X_{n+1}=x-1|X_n=x\right)=\omega_x^-.$$

Le but de cet exercice est de montrer que

- si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]<0$, alors $\mathbb{P}$-p.s., $P_\omega\left(X_n\to+\infty\right)=1$,
- si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]>0$, alors $\mathbb{P}$-p.s., $P_\omega\left(X_n\to-\infty\right)=1$,
- si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]=0$, alors $\mathbb{P}$-p.s., $P_\omega\left(\limsup X_n=+\infty \text{ et } \liminf X_n=-\infty\right)=1$.

1. Soit $a\leq b$ des entiers, on pose

$$\Pi_{a,b}=\prod_{a<x\leq b}\rho_x \ \text{ et }\ f(z)=\begin{cases}\sum_{0\leq x<z}\Pi_{0,x} & \text{si } z\geq 0\\ -\sum_{z\leq x<0}\Pi_{x,0}^{-1} & \text{si } z<0\end{cases}$$

   Montrer que $f(X_n)$ est une martingale sous P_ω pour la filtration canonique.

2. Soient $m_-<0<m_+$. On pose $T_{m_+}=\inf\{n\geq 1 : X_n=m_+\}$ et on définit de même T_{m_-}. Calculer $P_\omega\left(T_{m_+}<T_{m_-}\right)$.
3. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]<0$, montrer que $P_\omega\left(\lim X_n=+\infty\right)=1$ p.s.
4. Soit (Z_i) une suite de variables i.i.d. avec $\mathbb{E}[Z_1]=0$ et $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right]<+\infty$. Pour tout $n\geq 0$, soit $S_n=\sum_{i=1}^n Z_i$. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $S_n\geq 0$.
5. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]=0$ et $\mathbb{E}[\log^2(\rho_0)]<+\infty$, montrer que

$$P_\omega\left(\limsup X_n=+\infty,\liminf X_n=-\infty\right)=1\ \text{ p.s.}$$

Exercice 2 (Une suite de flips)
Soit $n \geq 4$. On considère un polygone régulier $\mathscr{P}_n$ à n sommets, numérotés de 1 à n. Une *triangulation* de $\mathscr{P}_n$ est une manière de tracer $n-3$ diagonales de $\mathscr{P}_n$ qui divisent $\mathscr{P}_n$ en $n-2$ triangles. On note $\mathscr{T}_n$ l'ensemble des triangulations de $\mathscr{P}_n$.

Si $t \in \mathscr{T}_n$ et d est une des diagonales de t, on peut supprimer d, ce qui crée un quadrilatère, et remplacer d par l'autre diagonale de ce quadrilatère (on dit alors qu'on *flippe* d). On obtient ainsi une triangulation qu'on note $\mathfrak{flip}(t, d)$.

On se fixe $t_0 \in \mathscr{T}_n$ et on définit $(T_n)_{n \geq 0}$ de la manière suivante : $T_0 = t_0$ et, pour tout $n \geq 0$, conditionnellement à $(T_0, \ldots, T_n)$, on choisit uniformément une diagonale d_n de T_n et on pose $T_{n+1} = \mathfrak{flip}(T_n, d_n)$.

1. Vérifier que (T_n) est une chaîne de Markov sur $\mathscr{T}_n$ et qu'elle admet la mesure uniforme comme mesure stationnaire.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathscr{T}_n$, en partant de t, il est possible d'obtenir en un nombre fini de flips la triangulation où toutes les diagonales sont issues du sommet 1. En déduire que (T_n) est irréductible.
3. La chaîne (T_n) converge-t-elle vers la mesure uniforme ?

Exercice 3 Soit G un graphe connexe, infini et localement fini (i.e. où chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins). Montrer que la marche aléatoire simple sur G ne peut pas être récurrente positive.